# Теория по неравенствам для №15 от «Школково»

## Содержание

# 1 Метод интервалов

## 1.1 Вступление

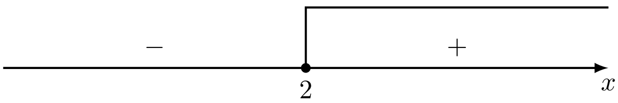
Решим неравенство $x-2\geqslant 0$. Можно перенести 2 направо и получить $x\geqslant 2$, но мы будем делать по-другому.

Назовем скобку вида $(x-2)$, то есть скобку, в которой при $x$ находится положительный коэффициент, «хорошей», а скобку вида $(2-x)$, то есть скобку, в которой при $x$ находится отрицательный коэффициент, — «плохой».

Итак, решим неравенство $x-2\geqslant 0$. Приравняем левую часть к 0 и решим полученное уравнение:

$$x-2=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=2.$$

Теперь отметим на числовой оси точку $x=2$. Поймем, что если $x$ больше 2, то есть лежит правее точки $x=2$, то значение $(x-2)$ положительно, а если меньше 2, то значение $(x-2)$ отрицательно. Значит, нам подходят только те $x$, что лежат правее 2, то есть $x\in[2;+\infty)$.




Рассмотрим неравенство

$$\frac{(x-2)^2(1-x)}{(x-3)}\leqslant 0.$$

В нем все скобки, кроме $(1-x)$, являются «хорошими», а скобка $(1-x)$ является «плохой». Сделаем ее «хорошей». Для этого домножим обе части неравенства на $-1$. Тогда справа останется 0, а слева скобка $(1-x)$ домножится на $-1$ и станет равна

$$(1-x)\cdot(-1)=1\cdot(-1)-x\cdot(-1)=-1-(-x)=x-1$$

Остальные скобки не изменятся, а знак неравенства поменяется на противоположный. Таким образом, мы получили следующее неравенство:

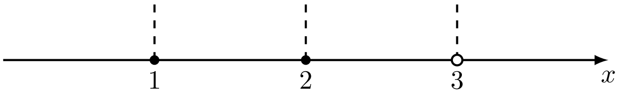
$$\frac{(x-2)^2(x-1)}{(x-3)}\geqslant 0.$$

Все скобки в полученном неравенстве являются «хорошими». При этом мы знаем, как по отдельности устроена каждая из них.

Приравняем каждую из скобок к 0:

$$\begin{aligned} x-1&=0 &&\Leftrightarrow && x=1\\ x-2&=0 &&\Leftrightarrow && x=2\\ x-3&\neq 0 &&\Leftrightarrow && x\neq 3\end{aligned}$$

Итак, сейчас вся ось разбилась на 4 промежутка:




Теперь нам нужно расставить знаки на полученных промежутках.

- Рассмотрим самый правый промежуток. На нем скобка $(x-3)$ имеет знак «+», так как все точки этого промежутка лежат правее 3. Тогда скобки $(x-2)$ и $(x-1)$ на этом промежутке тем более имеют знак «+».

  Таким образом, выражение на самом правом промежутке имеет знак «+».

- Начинаем двигаться справа налево. Попадая в следующий промежуток, мы проходим точку $x = 3$. Эта точка отмечена на оси, потому что в ней скобка $(x-3)$ меняет знак. Остальные скобки знака не поменяли, следовательно, когда мы прошли через точку $x = 3$, все выражение поменяло знак.

  Таким образом, выражение на промежутке от 2 до 3 имеет знак «$-$».

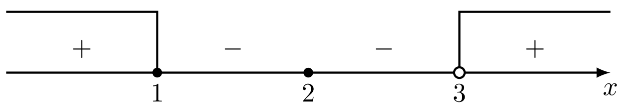
- Теперь сдвинемся на промежуток от 1 до 2, пройдя через точку $x = 2$. Сейчас в точке $x = 2$ свой знак поменяли уже две скобки, так как $(x-2)^2 = (x-2)(x-2)$, следовательно, выражение знак не изменило.

  Таким образом, выражение на промежутке от 1 до 2 имеет знак «$-$».

- Продолжаем двигаться справа налево. Проходя через точку $x = 1$, мы попадаем в самый левый промежуток. В точке $x = 1$ свой знак поменяла только скобка $(x-1)$, следовательно, выражение тоже изменило знак.

  Таким образом, выражение на самом левом промежутке имеет знак «$+$».

Получили следующую ситуацию:




Понятно, что нам подходят промежутки $(-\infty; 1]$ и $(3; +\infty)$, но также нам подходит и точка $x = 2$, так как в ней выражение равно 0. Это важный момент, так как об этой точке часто забывают.

Таким образом, ответ: $x \in (-\infty; 1] \cup \{2\} \cup (3; +\infty)$.

## 1.2 Разложение на множители квадратичного трехчлена

Решая задачу с помощью метода интервалов, нужно уметь раскладывать квадратичные трехчлены на множители. Покажем, как правильно это делать.

Пусть у нас есть квадратичный трехчлен $ax^2 + bx + c$. Рассмотрим три случая: дискриминат $D = b^2 - 4ac$ больше 0, равен 0 и меньше 0.

1. Пусть $D > 0$. Тогда
$$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1)(x - x_2),$$
   где $x_1$ и $x_2$ — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Они существуют и различны, так как $D > 0$.

   **Пример.** Пусть мы хотим разложить на множители выражение $2x^2 - 3x + 1$.

   Тогда нам нужно приравнять это выражение к 0 и найти корни полученного уравнения.
$$2x^2 - 3x + 1 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4}$$
$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{1}{2}$$
   Значит,
$$2x^2 - 3x + 1 = 2(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

2. Пусть $D = 0$. Тогда мы получаем, что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два одинаковых корня, то есть $x_1 = x_2$. Тогда
$$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1)(x - x_2) = a \cdot (x - x_1)^2$$

3. Пусть $D < 0$. Сначала рассмотрим пример. Пусть есть неравенство

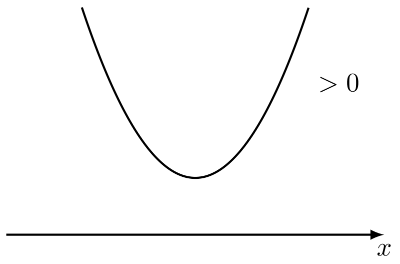
$$x^2 + x + 1 > 0$$

Чтобы решить такое неравенство, нам нужно разложить на множители квадратичный трехчлен. Запишем его дискриминант:

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0$$

Значит, уравнение $x^2 + x + 1 = 0$ не имеет решений.

Выражение $x^2+x+1$ задает параболу с ветвями, направленными вверх, которая не пересекает ось абсцисс.




Значит, $x^2 + x + 1 > 0$ при любом $x$, то есть ответ: $x \in (-\infty; +\infty)$.

Таким образом, если мы встретили такое выражение в неравенстве, то мы можем на него поделить обе части неравенства.

Важно отметить, что если мы получили, что $ax^2 + bx + c < 0$ при любом $x$, то при делении на это выражение знак неравенства изменится на противоположный, так как мы делим обе части неравенства на отрицательное число.

### 1.3 Алгоритм решения методом интервалов

Данный алгоритм специально расписан подробно, чтобы у Вас не возникло вопросов. Всего после нескольких использований этого алгоритма Вы будете решать рациональные неравенства очень быстро и без ошибок!

Отметим, что первые три шага созданы для того, чтобы преобразовать неравенство к более простому виду, что поможет Вам не допустить ошибку в решении подобных задач. Метод интервалов — это всего лишь удобный инструмент для решения рациональных неравенств, и если Вы будете всегда пользоваться одним и тем же алгоритмом, то вероятность допустить ошибку при решении таких неравенств будет минимальной.

1. Необходимо перенести все слагаемые в левую часть неравенства так, чтобы в правой части неравенства остался 0, и привести эти слагаемые к общему знаменателю так, чтобы в левой части неравенства получилась дробь. Затем нужно разложить числитель и знаменатель полученной дроби на множители.

   Например, неравенство $\dfrac{1}{x+1} < 1$ нужно переписать в следующем виде:

$$\frac{1}{x+1} - 1 < 0.$$

   Затем привести к общему знаменателю:

$$\frac{1}{x+1} - \frac{x+1}{x+1} < 0.$$

   Далее записать левую часть в виде одной дроби и привести подобные слагаемые:

$$\frac{1-(x+1)}{x+1} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-x}{x+1} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{x+1} > 0.$$

Итак, пусть после разложения на множители неравенство приняло вид

$$\frac{x^2(x-1)^3(x+1)\left(2x^2+3x+5\right)\left(2x-x^2-3\right)}{(x+1)^3(3-x)(2-3x)^2} \geqslant 0.$$

Заметим, что любой многочлен можно, а в нашем способе нужно, разложить до произведения **только** линейных скобок вида $(ax+b)$ и квадратичных скобок вида $\left(ax^2+bx+c\right)$ с отрицательным дискриминантом. При этом не нужно сокращать полученную дробь, например, сейчас мы оставляем скобку $(x+1)$ и в числителе, и в знаменателе, так как ОДЗ полученного после сокращения неравенства может отличаться от исходной ОДЗ.

2. Рассмотрим скобки, в которых остался квадратичный трехчлен с $D<0$.

   (a) Если при $x^2$ находится положительный коэффициент $a>0$, то при всех значениях $x$ выражение $ax^2+bx+c$ положительно (не может быть равно нулю!). Так как мы имеем право делить неравенство на любое число/выражение, не равное 0, то разделим обе части неравенства на такие скобки. В нашем неравенстве такой скобкой является $\left(2x^2+3x+5\right)$. Причем заметим, что так как мы делим на **положительное выражение**, то знак неравенства не меняется!

   (b) Если при $x^2$ находится отрицательный коэффициент $a<0$, то при всех значениях $x$ выражение $ax^2+bx+c$ отрицательно. Так как мы имеем право делить неравенство на любое число/выражение, не равное 0, то разделим обе части неравенства на такие скобки. В нашем неравенстве такой скобкой является $\left(2x-x^2-3\right)$. Причем заметим, что так как мы делим на **отрицательное выражение**, то знак неравенства должен измениться на противоположный!

   Итак, **обобщим второй шаг**: квадратичные скобки вида $ax^2+bx+c$ с отрицательным дискриминантом можно просто вычеркнуть, причем при вычеркивании скобок с $a>0$ знак неравенства остается прежним, а вот при вычеркивании скобок с $a<0$ знак неравенства меняется на противоположный столько раз, сколько было таких скобок. Лучше вычеркивать их последовательно по одной, **каждый раз** меняя знак неравенства на противоположный.

   Таким образом, неравенство примет вид

$$\frac{x^2(x-1)^3(x+1)}{(x+1)^3(3-x)(2-3x)^2} \leqslant 0.$$

3. Рассмотрим линейные скобки $(ax+b)$.

   Вспомним, что скобку мы называем «хорошей», если при $x$ находится положительный коэффициент, и «плохой», если при $x$ находится отрицательный коэффициент. «Хорошие» скобки мы трогать не будем, а в «плохих» скобках необходимо поменять все знаки на противоположные, то есть сделать их «хорошими».

   Для того, чтобы в одной «плохой» скобке поменять все знаки на противоположные, необходимо домножить правую и левую части неравенства на $-1$. Таким образом, после одного такого действия знак неравенства сменится на противоположный. Значит, если «плохих» скобок четное количество, то знак неравенства не изменится, если нечетное, то знак неравенства изменится на противоположный.

   Заметим, что выражение $(ax+b)^n$ — ни что иное, как произведение $n$ скобок $(ax+b)$.

   В нашем неравенстве среди «плохих» одна скобка $(3-x)$ и две скобки $(2x-3)$, так как $(2-3x)^2=(2-3x)(2-3x)$, то есть всего три «плохих» скобки, следовательно, знак неравенства изменится и неравенство примет вид:

$$\frac{x^2(x-1)^3(x+1)}{(x+1)^3(x-3)(3x-2)^2} \geqslant 0.$$

   Заметим, что множитель $x^2$ — это скобка $(x-0)^2$, или, что то же самое, $(x-0)(x-0)$ — произведение двух одинаковых линейных скобок.

4. Теперь, когда левая часть неравенства состоит из произведения только «хороших» линейных скобок в каких-то степенях, можно приступить к самому методу интервалов.

   Его суть состоит в том, что левая часть неравенства — всюду непрерывная функция, кроме тех точек, где знаменатель дроби равен нулю. Поэтому точки, в которых эта функция равна нулю, то есть точки, в которых ее числитель равен нулю, и точки, в которых эта функция не существует, то есть точки, в которых ее знаменатель равен нулю, разбивают область определения этой функции на промежутки, причем на каждом промежутке функция принимает значения строго одного знака.

   Нам как раз нужно найти те значения $x$, при которых функция $\geqslant 0$. Причем, так как наша функция — рациональная, то ее область определения — это все действительные числа ($\mathbb{R}$), кроме нулей знаменателя. Поэтому отметим нули каждой скобки на вещественной прямой, причем нули знаменателя — выколотые точки. Заметим, что если мы отметили $n$ точек, то числовая прямая разобьется на $n+1$ промежуток.

   Расставим знаки на всех промежутках справа налево. Будем ставить «+», если функция на этом промежутке принимает положительные значения, и «−» — если отрицательные. Нулю функция равна в отмеченных невыколотых точках.

   *Первые три шага мы делали для того, чтобы не подставлять точки из каждого промежутка и не вычислять, какого знака будет левая часть неравенства, так как часто промежутки ограничены числами с корнями и логарифмами, поэтому подобрать удобное число, которое можно подставить в выражение, достаточно трудозатратно.*

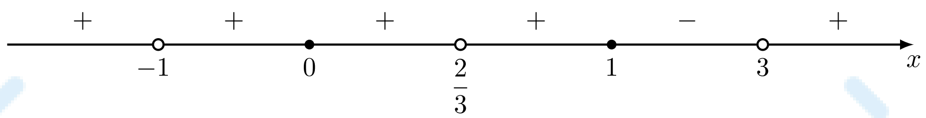
   *Знаки на промежутках мы будем расставлять справа налево, используя закономерность, которую мы могли заметить ранее, но четко сформулируем далее.*

   Так как все скобки — «хорошие», то первый справа знак всегда будет «+» (именно для этого мы и приводили неравенство к такому виду!). Действительно, если подставить любое число, превышающее самый большой нуль, то каждая скобка будет положительна, а значит и произведение таких скобок будет всегда положительно.

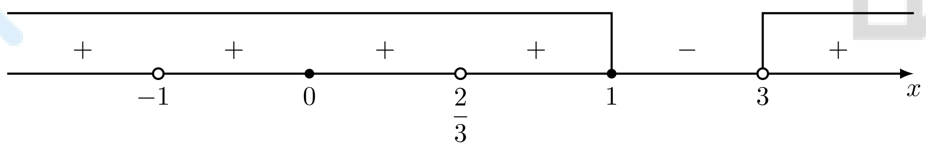
   Если какой-то нуль входит в четное количество скобок, то при переходе через него справа налево знак меняться не будет. В нашем неравенстве это точки $-1$, $0$ и $\frac{2}{3}$. Например, точка $-1$ входит в четное количество скобок $(x+1)$ : одна в числителе и три в знаменателе.

   Если нуль входит в нечетное количество скобок, то при переходе через эту точку справа налево знак будет меняться.

   Таким образом, учтя все вышеописанные правила, получим следующую расстановку знаков:




5. Неравенство практически решено и нам остается только записать ответ. В нашем случае, так как знак преобразованного неравенства $\geqslant 0$, то в ответ пойдут промежутки со знаком «+», где значение функции больше нуля, и закрашенные точки, где значение функции равно нулю:




   Таким образом,

$$x \in (-\infty; -1) \cup \left(-1; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; 1\right] \cup (3; +\infty).$$

## 1.4 Формулировка метода интервалов

1. Переносим все слагаемые в левую часть и приводим их к общему знаменателю.
2. Раскладываем выражение на множители и делаем так, чтобы все скобки были «хорошими» и линейными.
3. На самом правом промежутке ставим знак «+», так как все скобки выражения являются «хорошими». Далее двигаемся справа налево и, проходя через каждую отмеченную точку, определяем знаки промежутков.

## 1.5 Решаем задачу методом интервалов

Решите неравенство

$$\frac{x}{x-3}+\frac{x-5}{x}<\frac{2x}{3-x}.$$

**Решение**

Шаг 1.

Переносим все влево. Тогда получаем

$$\frac{x}{x-3}+\frac{x-5}{x}-\frac{2x}{3-x}<0.$$

Заметим, что «$-$» можно внести в знаменатель третьей дроби. Тогда неравенство примет вид

$$\frac{x}{x-3}+\frac{x-5}{x}+\frac{2x}{x-3}<0;$$

$$\frac{3x}{x-3}+\frac{x-5}{x}<0.$$

Приводим к общему знаменателю.

$$\frac{3x\cdot x}{(x-3)\cdot x}+\frac{(x-5)\cdot(x-3)}{x\cdot(x-3)}<0;$$

$$\frac{3x^2+x^2-8x+15}{x(x-3)}<0;$$

$$\frac{4x^2-8x+15}{x(x-3)}<0.$$

Шаг 2.

Раскладываем на множители.

$$4x^2-8x+15=0;$$

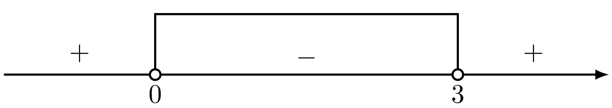
$$D=64-4\cdot4\cdot15=64-240<0.$$

Значит, $4x^2-8x+15>0$ при любом $x$, то есть на это выражение можно просто поделить обе части неравенства. Тогда получаем

$$\frac{1}{x(x-3)}<0.$$

Шаг 3.

Решаем полученное неравенство методом интервалов. Для этого рисуем числовую ось, отмечаем на ней нули скобок, расставляем знаки на промежутках. Так как каждая скобка содержится в выражении в первой степени, то в каждой из отмеченных точек знак будет меняться. Таким образом, $x\in(0;3)$.



# 2 Показательные неравенства

## 2.1 Стандартные показательные неравенства

Рассмотрим стандартное показательное неравенство

$$a^{f(x)} \geqslant a^{g(x)},$$

где $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$ — фиксированное число.

Данное неравенство приводится к одному из двух следующих случаев:

- При $a > 1$ неравенство равносильно неравенству

$$f(x) \geqslant g(x),$$

  то есть знак между показателями степени **соответствует** знаку между функциями в исходном неравенстве.

- При $0 < a < 1$ неравенство равносильно неравенству

$$f(x) \leqslant g(x),$$

  то есть знак между показателями степени **противоположен** знаку между функциями в исходном неравенстве.

Поведение, описанное выше, обусловлено тем, что показательная функция **убывает** при $0 < a < 1$ и **возрастает** при $a > 1$.

Таким образом, если основание степени больше 1, то мы можем перейти к неравенству между показателями. Если же основание степени меньше 1, то мы тоже можем перейти к неравенству между показателями, но при этом изменив знак неравенства на противоположный.

Приведем по примеру к каждому из случаев.

- Рассмотрим неравенство $3^x \geqslant 3^2$. Так как основание степени $3 > 1$, то это неравенство равносильно неравенству $x \geqslant 2$.
- Рассмотрим неравенство $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geqslant \left(\frac{1}{3}\right)^3$. Так как основание степени $\frac{1}{3} < 1$, то это неравенство равносильно неравенству $x \leqslant 3$.

## 2.2 Решаем неравенство со степенями с ЕГЭ–2022

Решите неравенство

$$\frac{2}{3^x + 27} \geqslant \frac{1}{3^x - 27}.$$

**Решение**

Для удобства сделаем замену $3^x = t > 0$. Тогда получим

$$\frac{2}{t + 27} \geqslant \frac{1}{t - 27}.$$

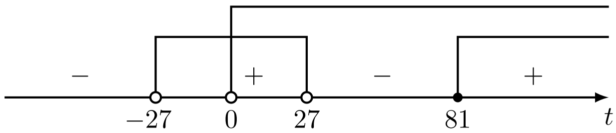
Решим это неравенство с помощью метода интервалов. Перенесем все слагаемые в левую часть:

$$\frac{2}{t + 27} - \frac{1}{t - 27} \geqslant 0.$$

Преведем дроби к общему знаменателю:

$$\frac{2\,(t-27)-(t+27)}{(t+27)\,(t-27)} \geqslant 0;$$
$$\frac{2t-54-t-27}{(t+27)\,(t-27)} \geqslant 0;$$
$$\frac{t-81}{(t+27)\,(t-27)} \geqslant 0.$$

Мы получили, что все скобки «хорошие» и линейные. Решим полученное неравенство методом интервалов:




Таким образом, $t \in (0;27) \cup [81;+\infty)$ . Сделаем обратную замену. Так как $t \in (0;27)$ , то $3^x < 27$; так как $t \in [81;+\infty)$, то $3^x \geqslant 81$. Тогда получаем

$$\left[\begin{aligned}&3^x < 27\\&3^x \geqslant 81\end{aligned}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{aligned}&3^x < 3^3\\&3^x \geqslant 3^4\end{aligned}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{aligned}&x < 3\\&x \geqslant 4\end{aligned}\right.$$

Значит, $x \in (-\infty;3) \cup [4;+\infty)$.

## 2.3 Решаем неравенство со степенями с ЕГЭ–2021

Решите неравенство

$$\frac{3^x}{3^x-3} + \frac{3^x+1}{3^x-2} + \frac{5}{9^x-5\cdot 3^x+6} \leqslant 0.$$

**Решение**

Обозначим $3^x = t > 0$, тогда

$$9^x = \left(3^2\right)^x = 3^{2x} = \left(3^x\right)^2 = t^2.$$

После замены неравенство примет вид

$$\frac{t}{t-3} + \frac{t+1}{t-2} + \frac{5}{t^2-5\cdot t+6} \leqslant 0.$$

Разложим $t^2-5t+6$ на множители. По теореме Виета

$$\begin{cases} t_1+t_2 = 5;\\ t_1\cdot t_2 = 6. \end{cases}$$

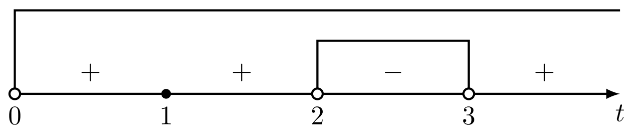
Корни $t_1$ и $t_2$ легко подбираются. Таким образом, $t_1 = 3$, $t_2 = 2$. Тогда

$$\frac{t}{t-3} + \frac{t+1}{t-2} + \frac{5}{t^2-5\cdot t+6} \leqslant 0;$$
$$\frac{t}{t-3} + \frac{t+1}{t-2} + \frac{5}{(t-3)(t-2)} \leqslant 0;$$
$$\frac{t(t-2)+(t+1)(t-3)+5}{(t-3)(t-2)} \leqslant 0;$$
$$\frac{2t^2-4t+2}{(t-3)(t-2)} \leqslant 0;$$

$$\frac{2\left(t^2-2t+1\right)}{(t-3)(t-2)} \leqslant 0;$$

$$\frac{2(t-1)^2}{(t-3)(t-2)} \leqslant 0.$$

Решим полученное неравенство методом интервалов:




Значит, $t \in \{1\} \cup (2;3)$. Сделаем обратную замену:

$$\left[\begin{aligned} &t=1\\ &2<t<3 \end{aligned}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{aligned} &3^x=1\\ &2<3^x<3 \end{aligned}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{aligned} &3^x=3^0\\ &3^{\log_3 2}<3^x<3^1 \end{aligned}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{aligned} &x=0\\ &\log_3 2<x<1 \end{aligned}\right.$$

Таким образом, ответ: $x \in \{0\} \cup (\log_3 2; 1)$.

# 3 Логарифмические неравенства

## 3.1 Стандартные логарифмические неравенства

Рассмотрим стандартное логарифмическое неравенство

$$\log_a f(x) \geqslant \log_a g(x),$$

где $a \in \mathbb{R}$, $a>0$, $a \neq 1$ — фиксированное число.

Самое главное отличие логарифма от степени — это наличие ОДЗ аргумента. Данное неравенство приводится к одному из двух следующих случаев.

- При $a>1$ неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) \geqslant g(x)\\ f(x)>0\\ g(x)>0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} f(x) \geqslant g(x)>0\\ f(x)>0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{\begin{cases} f(x) \geqslant g(x)\\ g(x)>0 \end{cases}}$$

  Таким образом, знак между аргументами логарифмов **соответствует** знаку между логарифмами в исходном неравенстве.

- При $0<a<1$ неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) \leqslant g(x)\\ f(x)>0\\ g(x)>0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 0<f(x) \leqslant g(x)\\ g(x)>0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{\begin{cases} f(x) \leqslant g(x)\\ f(x)>0 \end{cases}}$$

  Таким образом, знак между аргументами логарифмов **противоположен** знаку между логарифмами в исходном неравенстве.

Поведение, описанное выше, обусловлено тем, что функция логарифма **убывает** при основании $0<a<1$ и **возрастает** при основании $a>1$.

Таким образом, без учета ОДЗ, если основание логарифма больше 1, то мы можем перейти к неравенству между аргументами. Если же основание логарифма меньше 1, то мы тоже можем перейти к неравенству между аргументами, но при этом изменив знак неравенства на противоположный.

Приведем по примеру к каждому из случаев.

- Рассмотрим неравенство $\log_2 x \geqslant \log_2 4$. Так как основание логарифма $2 > 1$, то это неравенство равносильно неравенству $x \geqslant 4$, потому что $4 > 0$.
- Рассмотрим неравенство $\log_{\frac{1}{2}} x \geqslant \log_{\frac{1}{2}} 3$. Так как основание логарифма $\dfrac{1}{2} < 1$, то это неравенство равносильно неравенству $x \leqslant 3$, при этом, с учетом ОДЗ, $x > 0$.

## 3.2 Решаем неравенство с логарифмами с ЕГЭ–2022

Решите неравенство

$$\frac{\log_4(64x) - 2}{\log_4^2 x - \log_4 x^3} \leqslant -1.$$

**Решение**

Выпишем ограничения логарифмов:

$$\begin{cases} 64x > 0 \\ x > 0 \\ x^3 > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x > 0.$$

Преобразуем левую часть неравенства:

$$\frac{\log_4(64x) - 2}{\log_4^2 x - \log_4 x^3} = \frac{\log_4 x + \log_4 64 - 2}{\log_4^2 x - 3\log_4 x}.$$

Тогда неравенство примет вид

$$\frac{\log_4 x + \log_4 64 - 2}{\log_4^2 x - 3\log_4 x} \leqslant -1.$$

Сделаем замену $\log_4 x = t$ и перепишем неравенство:

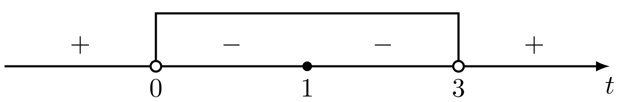
$$\frac{t + 3 - 2}{t^2 - 3t} + 1 \leqslant 0;$$

$$\frac{t + 1 + t^2 - 3t}{t(t-3)} \leqslant 0;$$

$$\frac{t^2 - 2t + 1}{t(t-3)} \leqslant 0;$$

$$\frac{(t-1)^2}{t(t-3)} \leqslant 0.$$

Решим полученное неравенство методом интервалов:




Значит, $t \in (0; 3)$. Сделаем обратную замену:

$$0 < t < 3 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \log_4 x < 3 \quad \Leftrightarrow \quad \log_4 1 < \log_4 x < \log_4 64 \quad \Leftrightarrow \quad 1 < x < 64$$

Заметим, что $x \in (1; 64)$ удовлетворяет ограничениям логарифма, а ОДЗ знаменателя мы учли, когда выкололи точки $t = 0$ и $t = 3$. Таким образом, ответ: $x \in (1; 64)$.

# 4 Метод рационализации

Метод рационализации — это способ решения некоторых неравенств, который позволяет довольно сильно упростить решение и вычисления. Далее покажем, почему метод работает, и рассмотрим несколько случаев, когда он применим.

## 4.1 Рационализация показательного неравенства

Рассмотрим метод рационализации для решения показательных неравенств вида

$$a^{f(x)} - a^{g(x)} \geqslant 0;$$
$$a^{f(x)} \geqslant a^{g(x)}.$$

- При $a > 1$ показательная функция возрастает, поэтому рассматриваемое неравенство равносильно

$$f(x) \geqslant g(x);$$
$$f(x) - g(x) \geqslant 0.$$

Так как $a > 1$, то $(a-1) > 0$, следовательно,

$$(a-1)\left(f(x) - g(x)\right) \geqslant 0.$$

- При $0 < a < 1$ показательная функция убывает, поэтому рассматриваемое неравенство равносильно

$$f(x) \leqslant g(x);$$
$$f(x) - g(x) \leqslant 0.$$

Так как $0 < a < 1$, то $(a-1) < 0$, следовательно,

$$(a-1)\left(f(x) - g(x)\right) \geqslant 0.$$

- При $a = 1$ выражение $a - 1$ равно 0, поэтому

$$(a-1)\left(f(x) - g(x)\right) \geqslant 0.$$

Таким образом, при $a > 0$

$$a^{f(x)} - a^{g(x)} \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a-1)\left(f(x) - g(x)\right) \geqslant 0.$$

Аналогично

$$a^{f(x)} - a^{g(x)} \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a-1)\left(f(x) - g(x)\right) \leqslant 0.$$

Значит, если в неравенстве появился множитель вида $a^{f(x)} - a^{g(x)}$, то мы можем его заменить на множитель $(a-1)\left(f(x) - g(x)\right)$.

*Если в подобном множителе вместо числа $a$ в основании степени стоит некоторая функция $h(x)$, то такую замену тоже можно использовать, но стоит помнить об ОДЗ: $h(x) > 0$.*

## 4.2 Пример рационализации показательного неравенства

Решите неравенство

$$(2x-1)\left(4^x - 2^{x^2}\right) \geqslant 0.$$

**Решение**

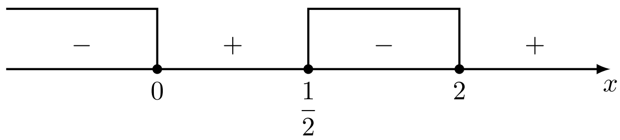
Преобразуем вторую скобку:

$$(2x-1)\left(2^{2x}-2^{x^2}\right)\geqslant 0.$$

Левая часть разложена на множители и сравнивается с 0, значит, мы можем заменить $\left(2^{2x}-2^{x^2}\right)$ на выражение $(2-1)\left(2x-x^2\right)$. Таким образом,

$$(2x-1)\left(2^{2x}-2^{x^2}\right)\geqslant 0;$$
$$(2x-1)\cdot(2-1)\left(2x-x^2\right)\geqslant 0;$$
$$(2x-1)\cdot x\cdot(2-x)\geqslant 0;$$
$$(2x-1)\cdot x\cdot(x-2)\leqslant 0.$$

Теперь мы получили неравенство, в котором все скобки «хорошие» и линейные. Можем применить метод интервалов:




Ограничений на $x$ нет, поэтому $x\in(-\infty;0]\cup\left[\frac{1}{2};2\right]$.

## 4.3 Рационализация логарифма

Рассмотрим метод рационализации для решения логарифмических неравенств вида

$$\log_{g(x)} f(x)\geqslant 0.$$

С самого начала нужно обозначить ОДЗ:

$$\begin{cases} f(x)>0; \\ g(x)>0; \\ g(x)\neq 1. \end{cases}$$

- При $g(x)>1$ логарифм возрастает, поэтому рассматриваемое неравенство равносильно

$$\log_{g(x)} f(x)\geqslant \log_{g(x)} 1;$$
$$f(x)\geqslant 1;$$
$$f(x)-1\geqslant 0.$$

Так как $g(x)>1$, то $(g(x)-1)>0$, следовательно,

$$(g(x)-1)\,(f(x)-1)\geqslant 0.$$

- При $0<g(x)<1$ логарифм убывает, поэтому рассматриваемое неравенство равносильно

$$\log_{g(x)} f(x)\geqslant \log_{g(x)} 1;$$
$$f(x)\leqslant 1;$$
$$f(x)-1\leqslant 0.$$

Так как $0 < a < 1$, то $(g(x) - 1) < 0$, следовательно,

$$(g(x) - 1)\,(f(x) - 1) \geqslant 0.$$

Таким образом, на ОДЗ

$$\log_{g(x)} f(x) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad (g(x) - 1)\,(f(x) - 1) \geqslant 0.$$

Аналогично

$$\log_{g(x)} f(x) \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad (g(x) - 1)\,(f(x) - 1) \leqslant 0.$$

Значит, если в неравенстве появился множитель вида $\log_{g(x)} f(x)$, то мы можем его заменить на множитель $(g(x) - 1)\,(f(x) - 1)$.

## 4.4 Пример рационализации логарифма

Решите неравенство

$$(x - 2) \cdot \log_x(x + 1) \geqslant 0.$$

**Решение**

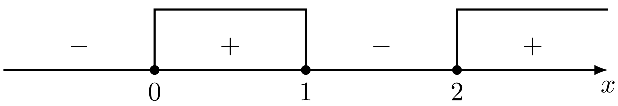
Отдельно найдем ОДЗ:

$$\begin{cases} x + 1 > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x \in (0;1) \cup (1;+\infty)$$

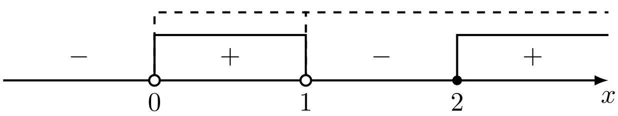
Левая часть неравенства разложена на множители и сравнивается с 0, значит, по методу рационализации мы можем заменить $\log_x(x + 1)$ на $(x - 1)((x + 1) - 1)$. Таким образом,

$$(x - 2) \cdot \log_x(x + 1) \geqslant 0;$$
$$(x - 2) \cdot (x - 1) \cdot x \geqslant 0.$$

Теперь мы получили неравенство, в котором все скобки «хорошие» и линейные. Можем применить метод интервалов:




Мы получили значения $x$, которые являются решением неравенства, полученного после рационализации. Их нужно пересечь с ОДЗ изначального неравенства:




Таким образом, $x \in (0;1) \cup [2;+\infty)$.

## 4.5 Общий случай применения метода рационализации.

Более общий случай применения метода рационализации: если неравенство представлено в виде $F(x) \vee 0$ ($\vee$ — один из знаков $\geqslant$, $\leqslant$, $>$, $<$), причем функция $F(x)$ является произведением и/или частным нескольких множителей, то на ОДЗ верно:

- если какой-то множитель имеет вид $a^{f(x)} - a^{g(x)}$, то его можно заменить на $(a - 1)\,(f(x) - g(x))$;

- если какой-то множитель имеет вид $\log_{g(x)} f(x)$, то его можно заменить на $(g(x)-1)\,(f(x)-1)$.

Решите неравенство

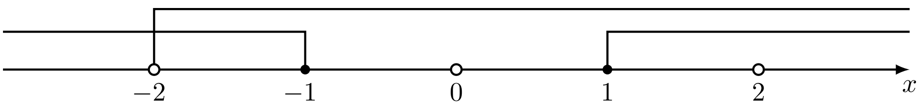
$$\frac{\left(1-4x^2\right)^3\cdot\left(\log_5(x+2)-\log_{25}x^2\right)\sqrt{x^2-1}}{2^{x+1}-8}\geqslant 0.$$

**Решение**

Найдем ОДЗ данного неравенства:

$$\begin{cases} x+2>0\\ x^2>0\\ x^2-1\geqslant 0\\ 2^{x+1}\neq 8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x>-2\\ x\neq 0\\ \left[\begin{array}{l} x\geqslant 1\\ x\leqslant -1\end{array}\right.\\ x\neq 2\end{cases}$$

Отметим полученные промежутки на числовой прямой:




Таким образом, ОДЗ это $x\in(-2;-1]\cup[1;2)\cup(2;+\infty)$.

Решим данное неравенство на полученном ОДЗ. Преобразуем левую часть неравенства. На ОДЗ верно, что

$$\log_5(x+2)=\log_{25}(x+2)^2$$

Значит,

$$\frac{\left(1-4x^2\right)^3\cdot\left(\log_5(x+2)-\log_{25}x^2\right)\sqrt{x^2-1}}{2^{x+1}-8}=-\frac{(2x-1)^3\,(2x+1)^3\cdot\left(\log_{25}\dfrac{(x+2)^2}{x^2}\right)\sqrt{x^2-1}}{2^{x+1}-2^3}$$

Тогда имеем:

$$\frac{\left(1-4x^2\right)^3\cdot\left(\log_5(x+2)-\log_{25}x^2\right)\sqrt{x^2-1}}{2^{x+1}-8}\geqslant 0;$$

$$\frac{(2x-1)^3\,(2x+1)^3\cdot\left(\log_{25}\dfrac{(x+2)^2}{x^2}\right)\sqrt{x^2-1}}{2^{x+1}-2^3}\leqslant 0.$$

Множитель $\log_{25}\dfrac{(x+2)^2}{x^2}$ по методу рационализации заменим на

$$(25-1)\left(\frac{(x+2)^2}{x^2}-1\right)=24\left(\frac{x^2+4x+4-x^2}{x^2}\right)=24\cdot\frac{4x+4}{x^2}.$$

Множитель $2^{x+1}-2^3$ по методу рационализации заменим на

$$(2-1)\left((x+1)-3\right)=x-2.$$

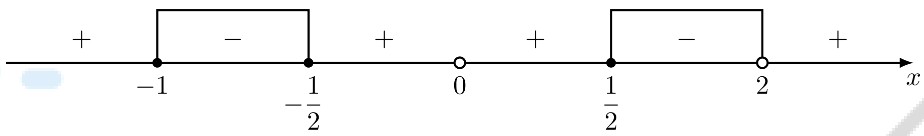
Заметим, что $\sqrt{x^2-1}\geqslant 0$ при всех $x$ из ОДЗ, причем в точках $x=\pm1$ выражение $\sqrt{x^2-1}=0$. Таким образом, это выражение не будет влиять на знак левой части, но точки $x=\pm1$ будут являться решением неравенства, так как они входят в ОДЗ, а левая часть неравенства в этих точках равна 0.

Тогда в итоге получим неравенство

$$\frac{(2x-1)^3(2x+1)^3\cdot 24\cdot \dfrac{4x+4}{x^2}}{x-2}\leqslant 0;$$

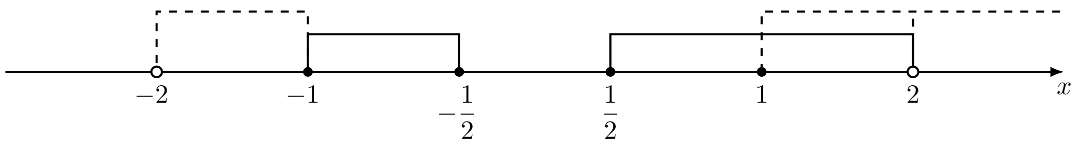
$$\frac{(2x-1)^3(2x+1)^3(x+1)}{x^2\,(x-2)}\leqslant 0.$$

Решим полученное неравенство методом интервалов. Все скобки «хорошие» и линейные, поэтому




Таким образом, $x\in\left[-1;-\dfrac{1}{2}\right]\cup\left[\dfrac{1}{2};2\right)$.

В полученное множество надо добавить решения $x=-1$ и $x=1$, но они уже и так входят в него. Теперь пересечем решение с ОДЗ:




Итоговый ответ: $x\in\{-1\}\cup[1;2)$.