

Метод рационализации — это способ решения некоторых неравенств, который позволяет довольно сильно упростить решение и вычисления. Он применим для некоторых неравенств, в которых присутствуют функции разного типа: и рациональные, и показательные, и логарифмические, и др.

Метод рационализации для показательных неравенств

Рассмотрим метод рационализации для решения показательных неравенств вида

$$(h(x))^{f(x)} \geq (h(x))^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} (h(x) - 1)(f(x) - g(x)) \geq 0 \\ h(x) > 0 \end{cases} \quad (1)$$

Если бы мы решали данное неравенство классическим способом, то оно было бы равносильно совокупности:

$$\begin{cases} \begin{cases} h(x) > 1 \\ f(x) \geq g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < h(x) < 1 \\ f(x) \leq g(x) \end{cases} \\ h(x) = 1 \end{cases} \quad (1')$$

Доказательство

Покажем, что решения системы (1) и совокупности (1') совпадают. Первое неравенство системы (1) равносильно совокупности

$$(a) : \begin{cases} \begin{cases} h(x) \geq 1 \\ f(x) \geq g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} h(x) \leq 1 \\ f(x) \leq g(x) \end{cases} \end{cases}$$

Совокупность (1') равносильна совокупности

$$(b) : \begin{cases} \begin{cases} h(x) \geq 1 \\ f(x) \geq g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < h(x) \leq 1 \\ f(x) \leq g(x) \end{cases} \end{cases}$$

Заметим, что решение совокупности (a) плюс условие $h(x) > 0$ и решение совокупности (b) полностью совпадают.

Пример использования

Решите неравенство

$$\left(\frac{x}{x^2 - 1}\right)^{x-1} \leq \left(\frac{x}{x^2 - 1}\right)^{2x}$$

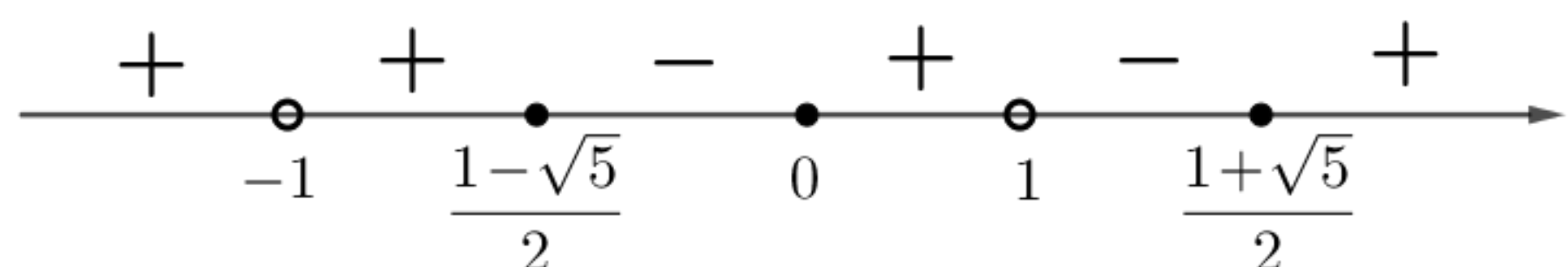
► Применим метод рационализации для данного неравенства, так как оно уже записано в нужном нам виде: $h^f \leq h^g$.

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{x^2 - 1} - 1\right)((x - 1) - (2x)) \leq 0 \\ \frac{x}{x^2 - 1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x^2 - x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x + 1)} \leq 0 \\ \frac{x}{(x - 1)(x + 1)} > 0 \end{cases}$$

Решим каждое неравенство методом интервалов.

Первое неравенство равносильно

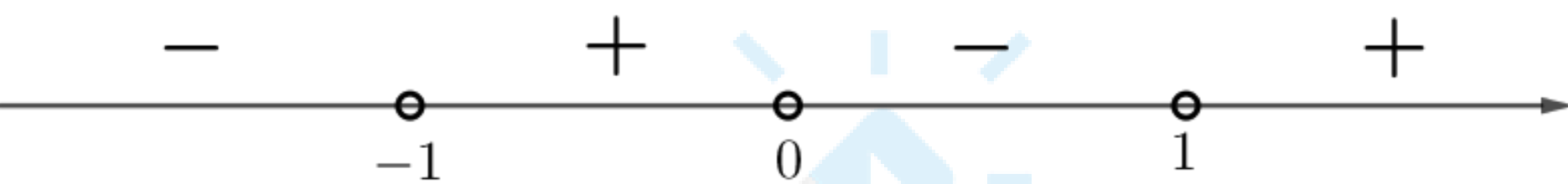
$$\frac{\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)(x + 1)}{(x - 1)(x + 1)} \leq 0$$



Следовательно, $x \in (-\infty; -1) \cup \left(-1; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left(1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

Решение второго неравенства

$$\frac{x}{(x - 1)(x + 1)} > 0$$



Пересечем множества решений этих двух неравенств. Следовательно, итоговый ответ к задаче:

$$x \in \left(-1; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left(1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$$

Метод рационализации для логарифмических неравенств

Рассмотрим метод рационализации для решения логарифмических неравенств

$$\log_{h(x)} f(x) \geq \log_{h(x)} g(x) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (h(x) - 1)(f(x) - g(x)) \geq 0 \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ h(x) > 0 \\ h(x) \neq 1 \end{cases} \quad (2)$$

Если бы мы решали данное неравенство классическим способом, то оно было бы равносильно совокупности:

$$\begin{cases} \begin{cases} h(x) > 1 \\ f(x) \geq g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < h(x) < 1 \\ f(x) \leq g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (2')$$

Доказательство

Покажем, что решения совокупности и системы совпадают.

Первое неравенство системы (2) равносильно совокупности

$$(c) : \begin{cases} \begin{cases} h(x) \geq 1 \\ f(x) \geq g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} h(x) \leq 1 \\ f(x) \leq g(x) \end{cases} \end{cases}$$

Совокупность (2') равносильна (если выписать ОДЗ отдельно) совокупности

$$(d) : \begin{cases} \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ h(x) > 0 \\ h(x) \neq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \begin{cases} h(x) \geq 1 \\ f(x) \geq g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} h(x) \leq 1 \\ f(x) \leq g(x) \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Заметим, что решение совокупности (c) плюс условия $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, $h(x) > 0$, $h(x) \neq 1$ и решение системы (d) полностью совпадают.

Пример использования

Решите неравенство

$$\log_{(x^2-1)} \frac{2x^2+3x-5}{x+1} \leq 1$$

► Выпишем и решим ОДЗ отдельно:

$$\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x^2 - 1 \neq 1 \\ \frac{2x^2 + 3x - 5}{x + 1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)(x + 1) > 0 \\ x \neq \pm\sqrt{2} \\ \frac{2(x - 1)(x + 2,5)}{x + 1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \\ x \neq \pm\sqrt{2} \\ x \in (-2, 5; -1) \cup (1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x \in (-2, 5; -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}; -1) \cup (1; \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$$

Тогда на ОДЗ, учитывая, что $1 = \log_{(x^2-1)}(x^2 - 1)$, наше неравенство равносильно неравенству

$$(x^2 - 1 - 1) \left(\frac{2x^2 + 3x - 5}{x + 1} - (x^2 - 1) \right) \leq 0 \Leftrightarrow$$

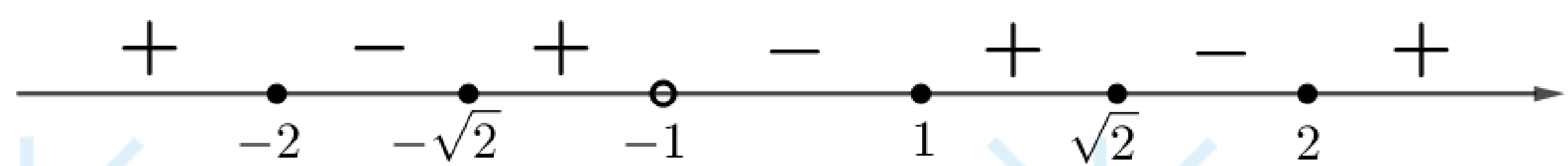
$$\frac{(x^2 - 2)(-x^3 + x^2 + 4x - 4)}{x + 1} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2(x - 1) - 4(x - 1))}{x + 1} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 - 4)(x - 1)}{x + 1} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - 2)(x + 2)(x - 1)}{x + 1} \geq 0$$

Полученное неравенство можно решить методом интервалов:



Таким образом, решением будут $x \in (-\infty; -2] \cup [-\sqrt{2}; -1) \cup [1; \sqrt{2}] \cup [2; +\infty)$.

Пересечем данное решение с ОДЗ и получим итоговый ответ к задаче:

$$x \in (-2, 5; -2] \cup (-\sqrt{2}; -1) \cup (1; \sqrt{2}) \cup [2; +\infty)$$

Более общий случай применения метода рационализации

Если неравенство представлено в виде $F(x) \vee 0$ ($\vee$ — один из знаков $\geq, \leq, >, <$), причем функция $F(x)$ является произведением и/или частным нескольких множителей, то на ОДЗ:

- если какой-то множитель имеет вид $h(x)^{f(x)} - h(x)^{g(x)}$, то его можно заменить на $(h - 1)(f - g)$;
- если какой-то множитель имеет вид $\log_{h(x)} f(x) - \log_{h(x)} g(x)$, то его можно заменить на $(h - 1)(f - g)$.

Пример использования

Решите неравенство

$$(3 + x - 2x^2) \log_{x+2} (3x + 5) \geq 0$$

► Данное неравенство можно переписать в виде

$$(3 + x - 2x^2)(\log_{x+2} (3x + 5) - \log_{x+2} 1) \geq 0$$

(так как $\log_a 1 = 0$)

Теперь неравенство представлено в необходимом нам виде: справа ноль, слева произведение двух скобок, причем одна из них — разность логарифмов с одинаковым основанием.

Выпишем отдельно ОДЗ:

$$\begin{cases} x + 2 > 0 \\ x + 2 \neq 1 \\ 3x + 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{5}{3}; -1\right) \cup (-1; +\infty)$$

Тогда на ОДЗ можно заменить второй множитель по методу рационализации, то есть исходное неравенство на ОДЗ равносильно неравенству:

$$(3 + x - 2x^2)(x + 2 - 1)(3x + 5 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(2x^2 - x - 3)(x + 1)(3x + 4) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$(2x - 3)(x + 1)(x + 1)(3x + 4) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$x \in \left[-\frac{4}{3}; \frac{3}{2}\right]$$

Пересечем данное решение с ОДЗ и получим итоговый ответ к задаче:

$$x \in \left[-\frac{4}{3}; -1\right) \cup \left(-1; \frac{3}{2}\right]$$

Пример использования

Решите неравенство

$$(3^x - 1)(0,25^x - 16)(5x^2 - 9x - 2) \leq 0$$

► Данное неравенство уже представлено в нужном нам виде: справа ноль, слева произведение трех множителей. ОДЗ данного неравенства: $x \in \mathbb{R}$.

Таким образом, неравенство равносильно:

$$(3^x - 3^0)(0,25^x - 0,25^{-2})(5x^2 - 9x - 2) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$(3 - 1)(x - 0)(0,25 - 1)(x - (-2))(5x + 1)(x - 2) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$2 \cdot (-0,75)x(x + 2)(x - 2)(5x + 1) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$x(x + 2)(x - 2)(5x + 1) \geq 0$$

(мы разделили правую и левую части на отрицательное число $-0,75$)

Решив данное неравенство методом интервалов, получим

$$x \in (-\infty; -2] \cup \left[-\frac{1}{5}; 0\right] \cup [2; +\infty)$$

Заметим, что даже если в основании степени или логарифма находится конкретное число a , а не функция $h(x)$, то скобку $(a - 1)$ опускать нельзя. ■

Пример использования

Решите неравенство

$$\frac{(1 - 4x^2)^3 \cdot (\log_5(x + 2) - \log_{25} x^2)}{2^{x+1} - 8} \geq 0$$

► Найдем ОДЗ данного неравенства:

$$\begin{cases} x + 2 > 0 \\ x^2 > 0 \\ 2^{x+1} - 8 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-2; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$$

Решим данное неравенство на ОДЗ.

На ОДЗ $\log_5(x + 2) = \log_{25}(x + 2)^2$, следовательно, применяя метод рационализации, получим:

$$\frac{(4x^2 - 1)^3(25 - 1)((x + 2)^2 - x^2)}{(2 - 1)(x + 1 - 3)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(2x - 1)^3(2x + 1)^3(x + 1)}{x - 2} \leq 0$$

Решив данное неравенство методом интервалов, получим

$$x \in [-1; -0,5] \cup [0,5; 2)$$

Пересекая данное решение с ОДЗ, получим итоговый ответ:

$$x \in [-1; -0,5] \cup [0,5; 2)$$