Правильный многоугольник — это многоугольник, все стороны которого равны и все углы которого равны. Каждый угол правильного многоугольника равен $180^\circ \cdot \dfrac{n-2}{n}$, где n — число сторон (вершин) правильного многоугольника.

Наибольший из отрезков, соединяющих две вершины многоугольника, будем называть его диагональю.

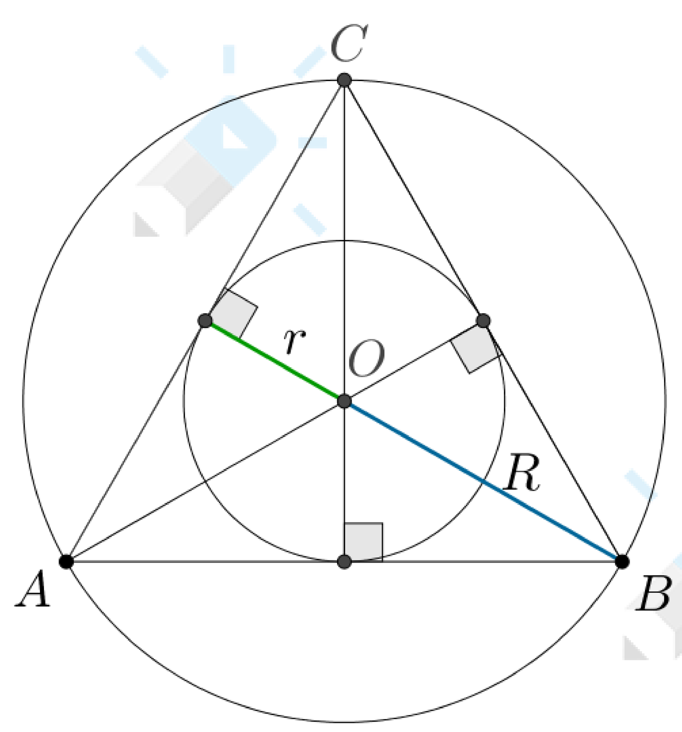
Правильный (равносторонний) треугольник

- Все углы правильного треугольника равны по 60°.
- Высота, биссектриса и медиана, проведенные к некоторой стороне правильного треугольника, совпадают.
- Все высоты (биссектрисы, медианы) правильного треугольника равны и точкой пересечения O делятся в отношении $2:1$, считая от вершины треугольника.
- Эта точка O совпадает с центром вписанной и описанной окружностей правильного треугольника.
- Если a — сторона правильного треугольника, то высота (биссектриса, медиана) ищется по формуле

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

а площадь ищется по формуле

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$



- $\frac{2}{3}h = R$ — радиус описанной около правильного треугольника окружности, $\frac{1}{3}h = r$ — радиус вписанной в правильный треугольник окружности.

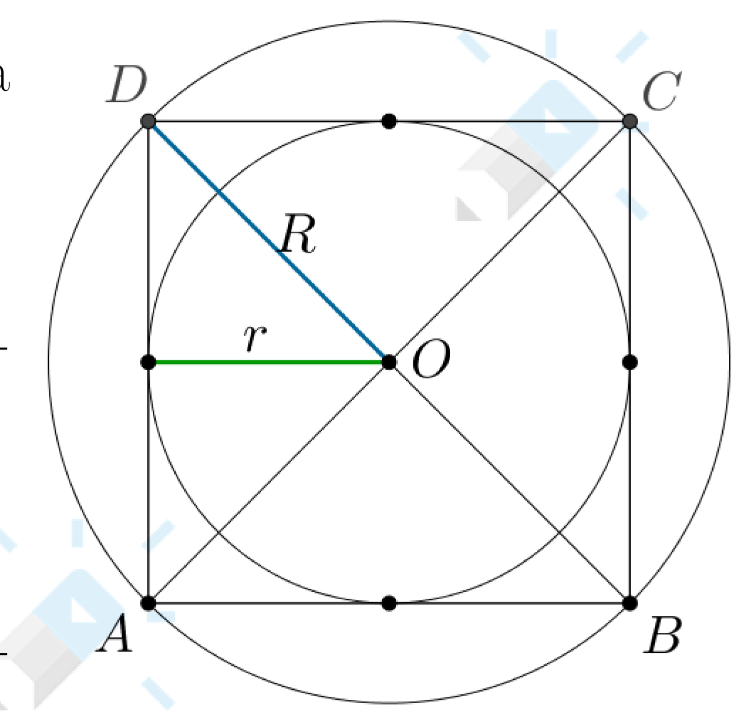
Правильный четырехугольник (квадрат)

- Все углы квадрата равны по 90°.
- Диагонали квадрата равны, взаимно перпендикулярны, точкой пересечения делятся пополам и являются биссектрисами его углов.
- Если a — сторона квадрата, то диагональ квадрата ищется по формуле

$$d = a\sqrt{2},$$

а площадь ищется по формуле

$$S = a^2$$



- Точка пересечения диагоналей квадрата — центр его вписанной и описанной окружностей.
- $\frac{1}{2}d = R$ — радиус описанной около квадрата окружности, $\frac{1}{2}a = r$ — радиус вписанной в квадрат окружности.

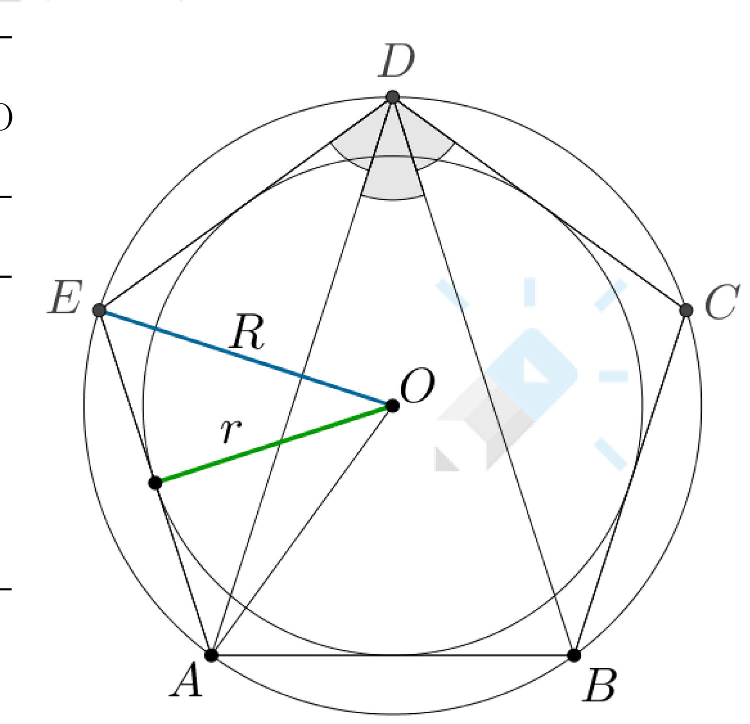
Правильный пятиугольник

- Угол правильного пятиугольника равен 108°.
- Диагонали правильного пятиугольника являются трисектрисами его углов.
- Если a — сторона правильного пятиугольника, то диагональ правильного пятиугольника ищется по формуле

$$d = \frac{\sqrt{5}+1}{2}a,$$

площадь ищется по формуле

$$S = \frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{4}a^2.$$



- Биссектрисы углов между сторонами правильного пятиугольника пересекаются в точке, являющейся центром его вписанной/описанной окружностей.

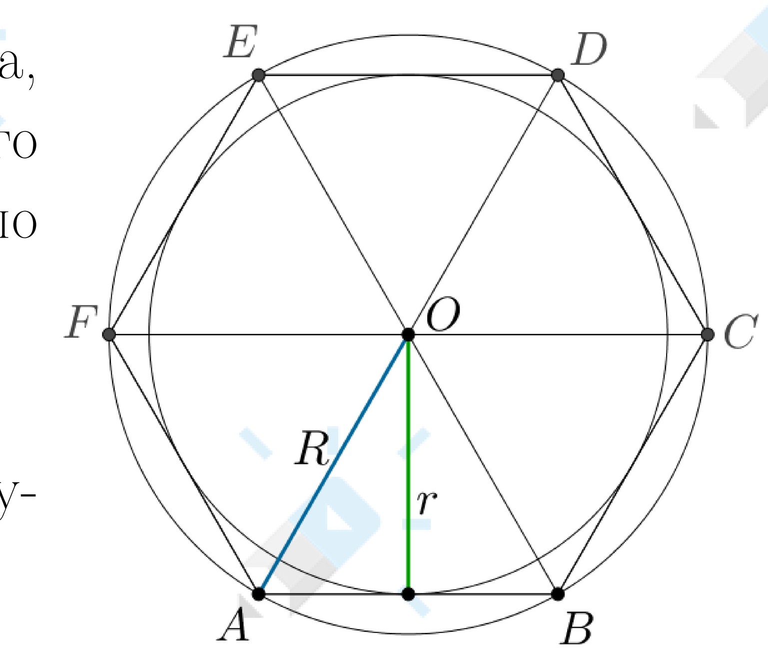
Правильный шестиугольник

- Все углы правильного шестиугольника равны по 120°.
- Диагонали правильного шестиугольника пересекаются в одной точке, являющейся центром его вписанной/описанной окружностей. Они разбивают правильный шестиугольник на 6 правильных треугольников.
- Если a — сторона правильного шестиугольника, то диагональ правильного шестиугольника ищется по формуле

$$d = 2a,$$

площадь ищется по формуле

$$S = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2.$$

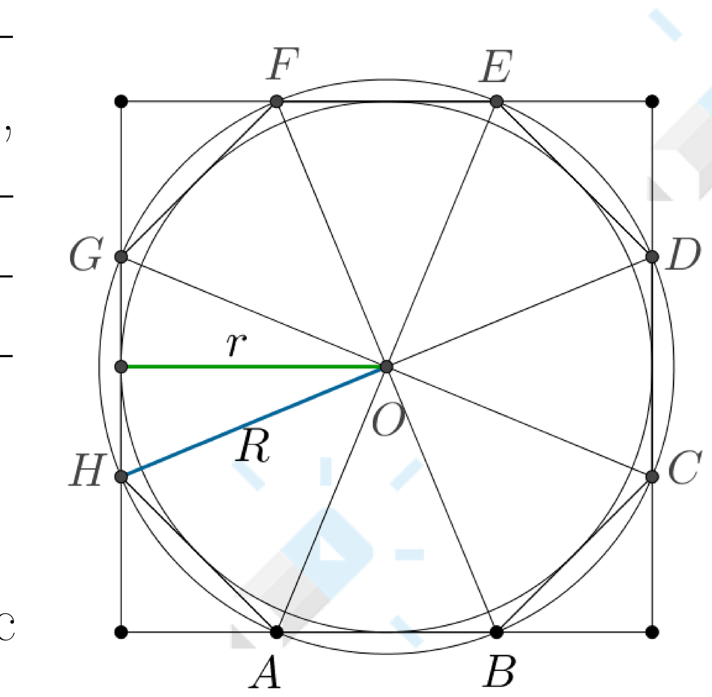


- $a = R$ — радиус описанной около правильного шестиугольника окружности, $\frac{\sqrt{3}}{2}a = r$ — радиус вписанной в правильный шестиугольник окружности.

Правильный восьмиугольник

- Все углы правильного восьмиугольника равны по 135°.
- Диагонали правильного восьмиугольника пересекаются в одной точке, являющейся центром его вписанной/описанной окружностей.
- Угол между диагоналями, проведенными из соседних вершин правильного восьмиугольника, равен 45°.
- Если a — сторона правильного восьмиугольника, $k = 1 + \sqrt{2}$, то площадь правильного восьмиугольника ищется по формуле

$$S = 2ka^2.$$



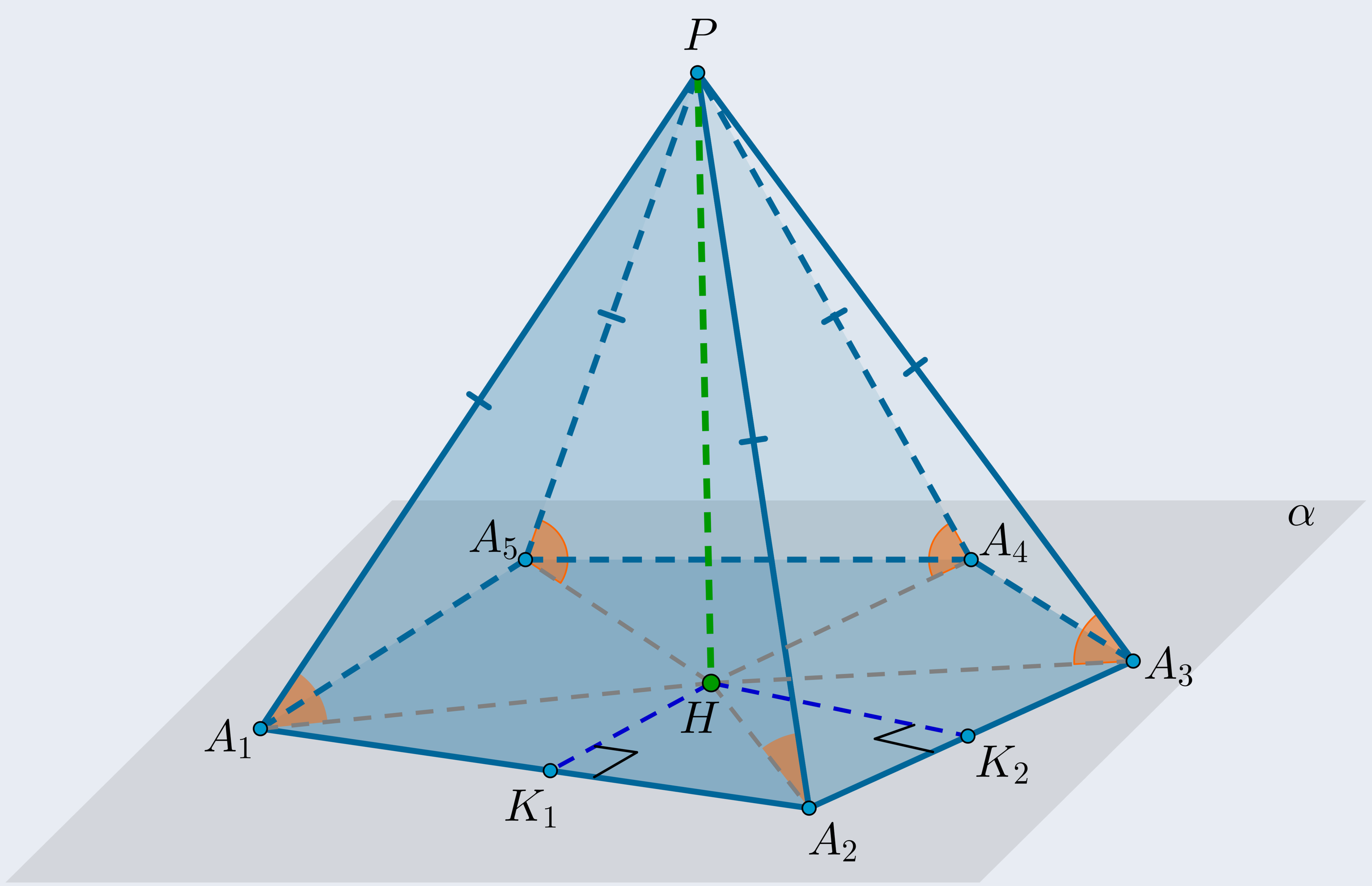
- $a\sqrt{\frac{k}{k-1}} = R$ — радиус описанной около правильного восьмиугольника окружности, $\frac{1}{2}ka = r$ — радиус вписанной в правильный восьмиугольник окружности.
- Правильный восьмиугольник со стороной a можно получить следующим образом: взять квадрат со стороной ka и отсечь от его углов четыре равнобедренных треугольника с катетами $\frac{1}{\sqrt{2}}a$.

Правильная пирамида

Пирамида называется правильной, если в основании пирамиды лежит правильный многоугольник, а вершина пирамиды проецируется в центр этого многоугольника, то есть в центр его вписанной/описанной окружностей.

Пирамида $PA_1A_2\dots A_n$ является правильной, если в ее основании лежит правильный многоугольник $A_1A_2\dots A_n$ (PH — высота пирамиды) и выполнено одно из эквивалентных условий:

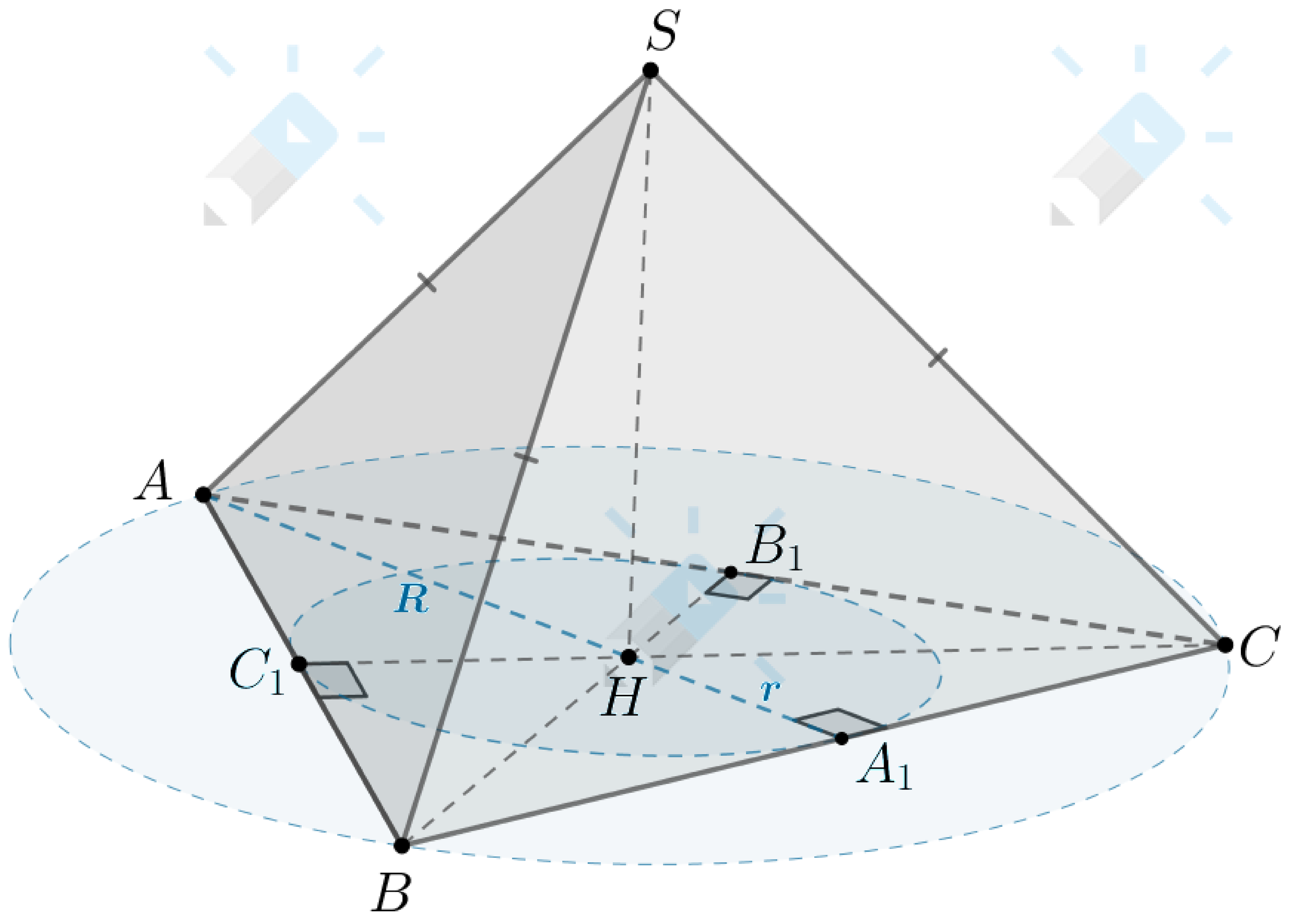
- боковые ребра пирамиды равны:
$PA_1 = PA_2 = \dots = PA_n$;
- боковые ребра наклонены к плоскости основания под одинаковым углом:
$\angle PA_1H = \angle PA_2H = \dots = \angle PA_nH$;
- боковые грани наклонены к плоскости основания под одинаковым углом:
$\angle PK_1H = \angle PK_2H = \dots = \angle PK_nH$,
где HK_1, HK_2, …, HK_n — перпендикуляры к сторонам основания.



Например, на рисунке изображена правильная пирамида $PA_1A_2A_3A_4A_5$.

Правильная треугольная пирамида

$SABC$ — правильная треугольная пирамида, боковые ребра $SA = SB = SC$, основание $\triangle ABC$ — правильный треугольник.



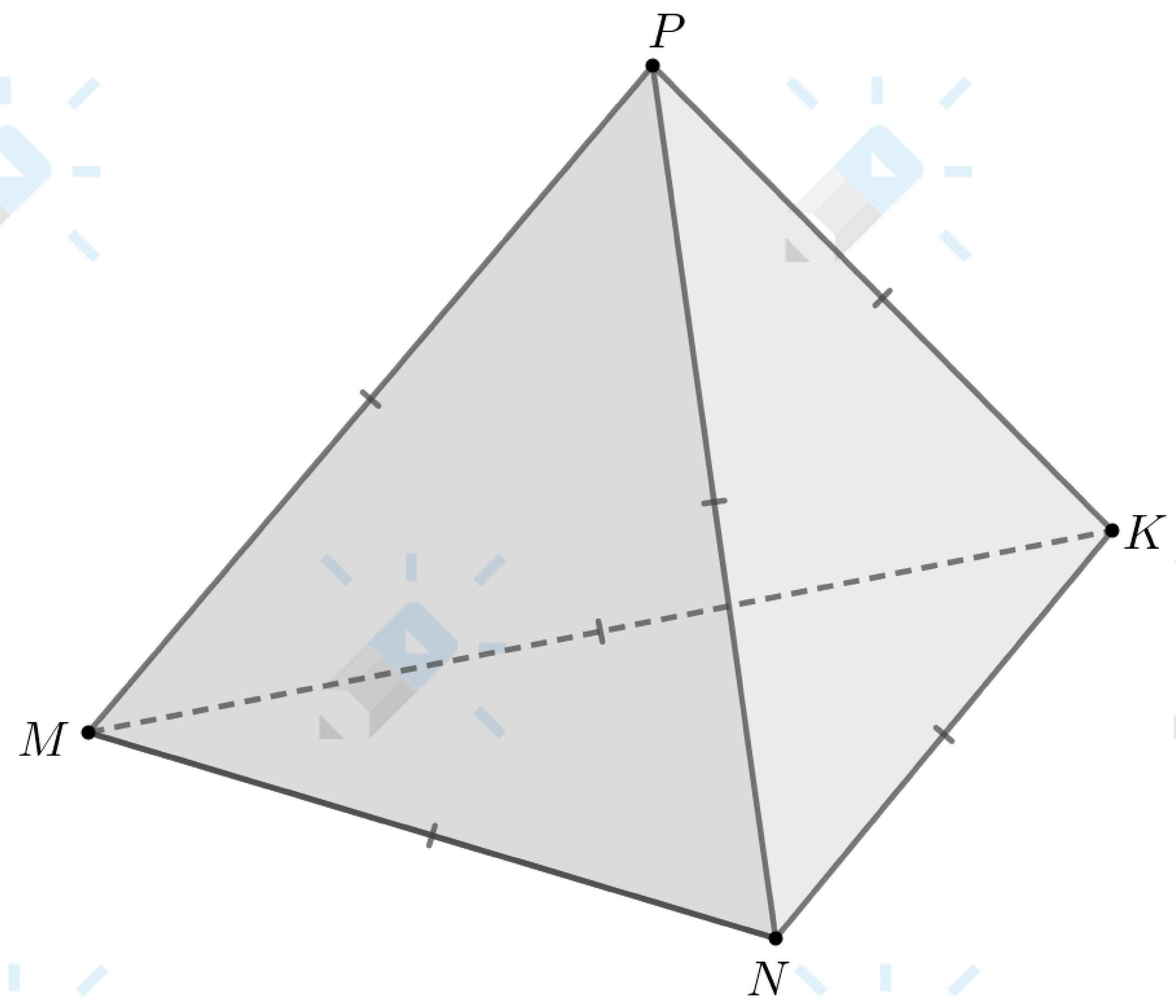
Отличительные свойства:

1. Скрещивающиеся ребра взаимно перпендикулярны: $SA \perp BC$, $SB \perp AC$, $SC \perp AB$.
2. Если SH — высота пирамиды, то H — точка пересечения медиан (высот, биссектрис) AA_1, BB_1, CC_1 основания.
3. Центры вписанной и описанной сфер лежат на высоте SH пирамиды.
4. Если a — сторона основания, то высота основания быстро ищется по формуле
$$h_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$
5. $\angle SAH = \angle SBH = \angle SCH$ — углы между боковыми ребрами и основанием.
6. $\angle SA_1H = \angle SB_1H = \angle SC_1H$ — линейные углы двугранных углов между боковыми гранями и основанием.

Правильный тетраэдр

Тетраэдр — это треугольная пирамида.
Правильный тетраэдр — треугольная пирамида, в которой все ребра равны.
Обратите внимание, что правильный тетраэдр не есть правильная треугольная пирамида: в правильной пирамиде боковые ребра равны друг другу, а в правильном тетраэдре все ребра равны друг другу.

$PMNK$ — правильный тетраэдр, ребра тетраэдра $MN = NK = KM = PM = PN = PK$.

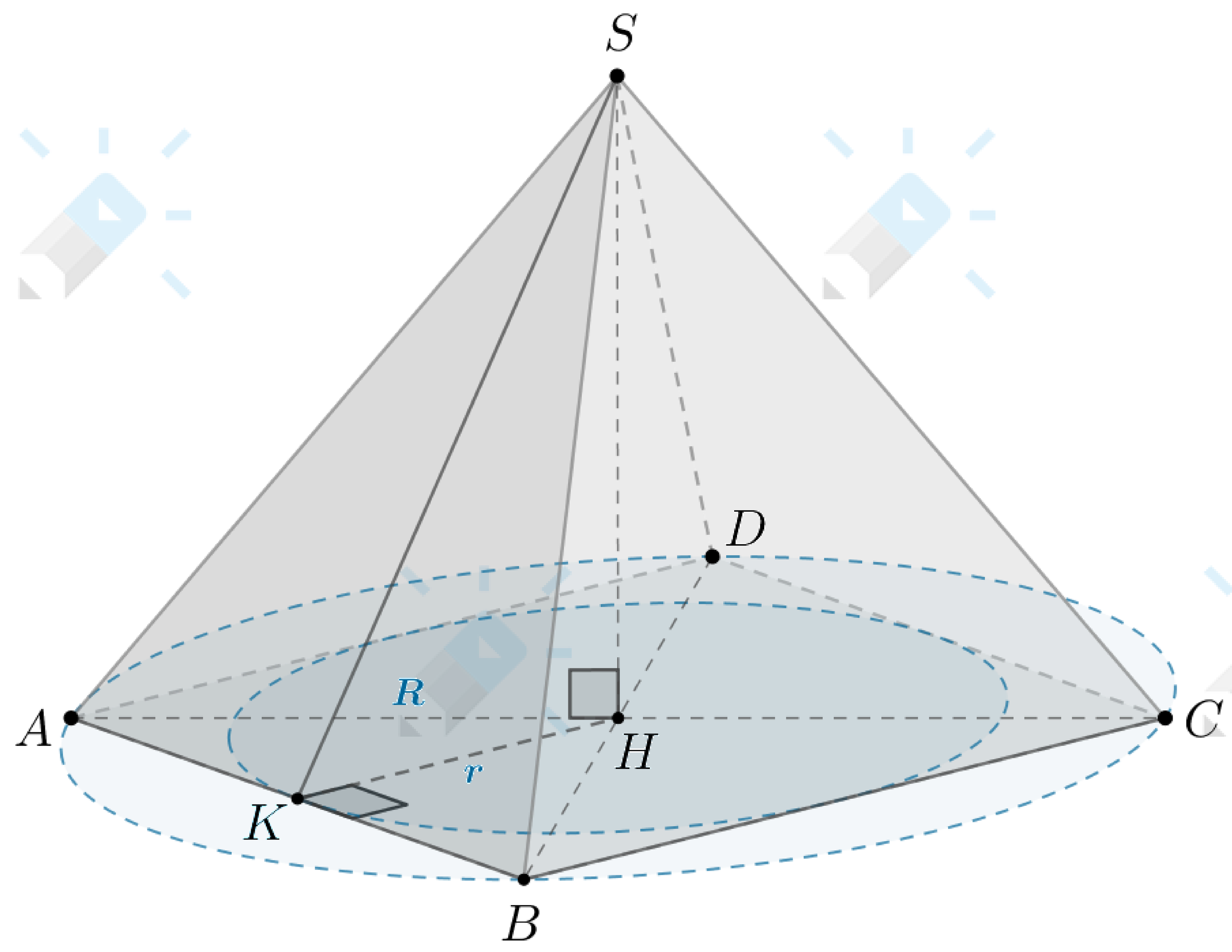


Отличительные свойства:

1. Для правильного тетраэдра выполнено все, что выполнено для правильной треугольной пирамиды, причем за основание пирамиды можно взять любую грань тетраэдра, а за вершину пирамиды — противолежащую этой грани вершину тетраэдра.
2. Центры вписанной и описанной сфер совпадают.
3. Вписанная сфера касается граней в центрах вписанных в эти грани окружностей.
4. Все высоты правильного тетраэдра пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся в отношении $3:1$, считая от вершины.

Правильная четырехугольная пирамида

$SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, боковые ребра $SA = SB = SC = SD$, основание $ABCD$ — квадрат.

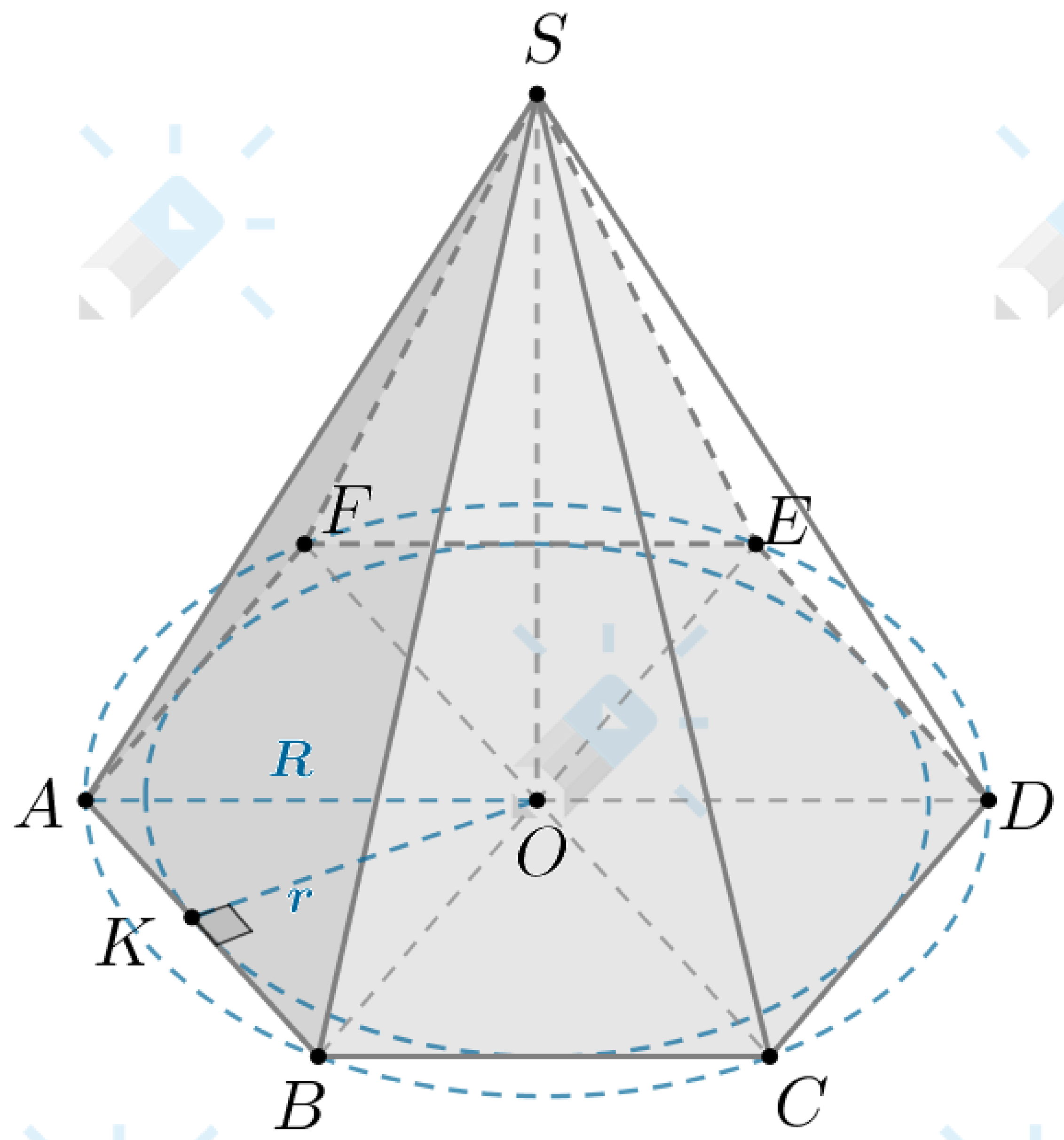


Отличительные свойства:

1. Если SH — высота пирамиды, то H — точка пересечения диагоналей основания.
2. Боковое ребро перпендикулярно скрещивающейся с ним диагонали основания:
$SA \perp BD$, $SB \perp AC$, $SC \perp BD$, $SD \perp AC$.
3. Если $HK \perp AB$, то есть $HK \parallel AD$, то $\angle SKH$ — линейный угол двугранного угла между боковой гранью и основанием.
4. $\angle SAH = \angle SBH = \angle SCH = \angle SDH$ — углы между боковыми ребрами и основанием.
5. Центры вписанной и описанной сфер лежат на высоте SH пирамиды.

Правильная шестиугольная пирамида

$SABCDEF$ — правильная шестиугольная пирамида, боковые ребра $SA = SB = SC = SD = SE = SF$, основание $ABCDEF$ — правильный шестиугольник.

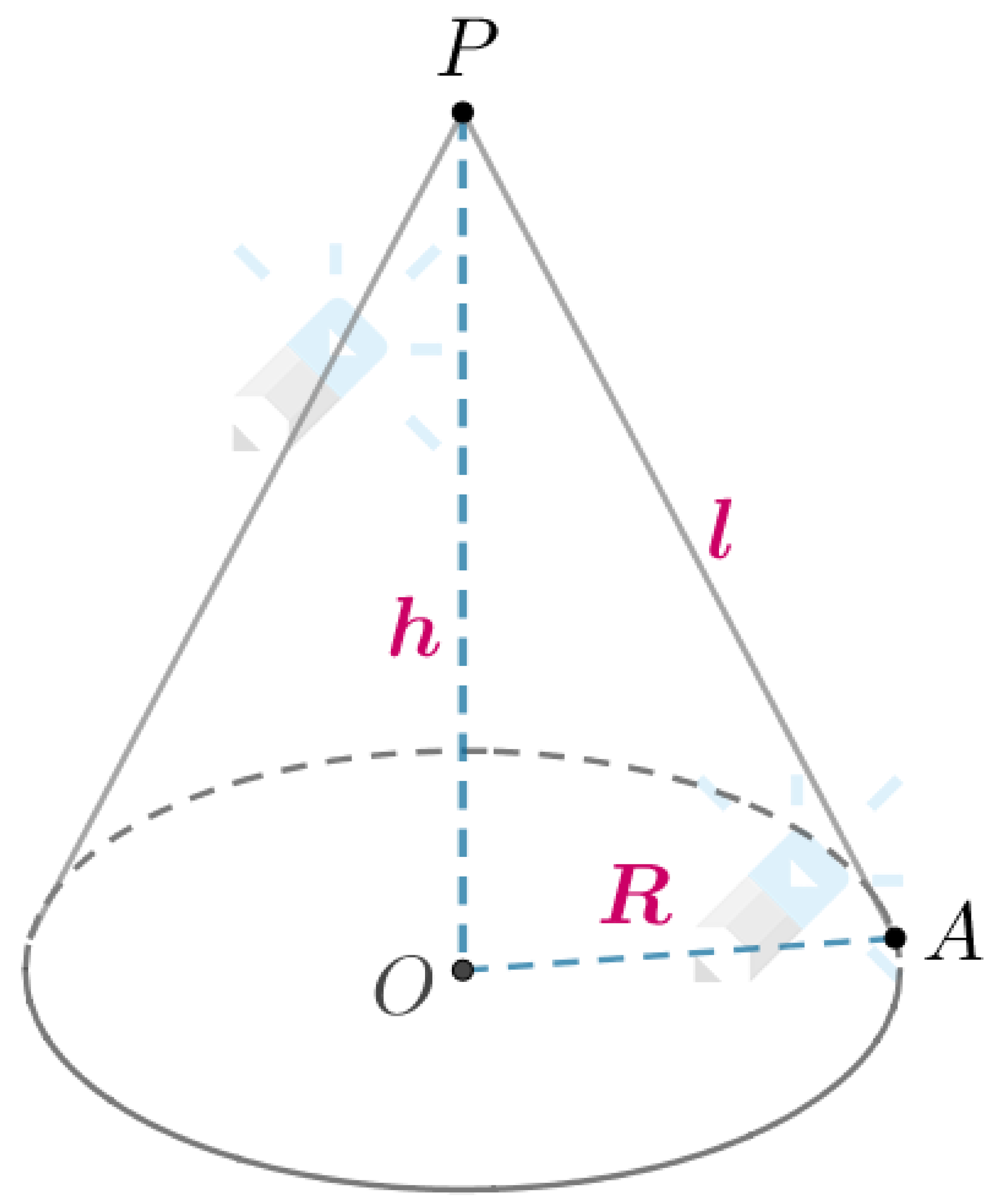


Отличительные свойства:

1. Если SO — высота пирамиды, то O — точка пересечения больших диагоналей основания.
2. $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \angle SDO = \angle SEO = \angle SFO$ — углы между боковыми ребрами и основанием.
3. Если $OK \perp AB$, то $\angle SKO$ — линейный угол двугранного угла между боковой гранью и основанием.
4. Центры вписанной и описанной сфер лежат на высоте SO пирамиды.
5. Если a — сторона основания пирамиды, то радиус описанной около основания окружности равен
$$R = a,$$
а радиус вписанной в основание окружности равен
$$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Конус

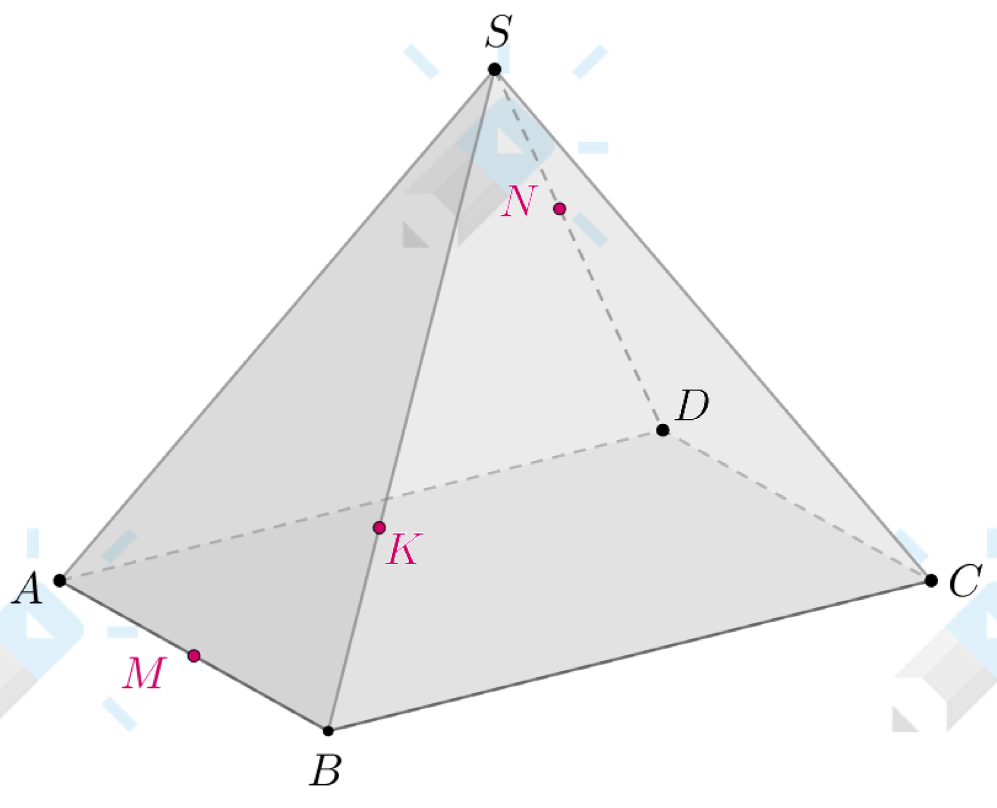
На рисунке представлен (прямой) конус с вершиной в точке P.



Отличительные свойства:

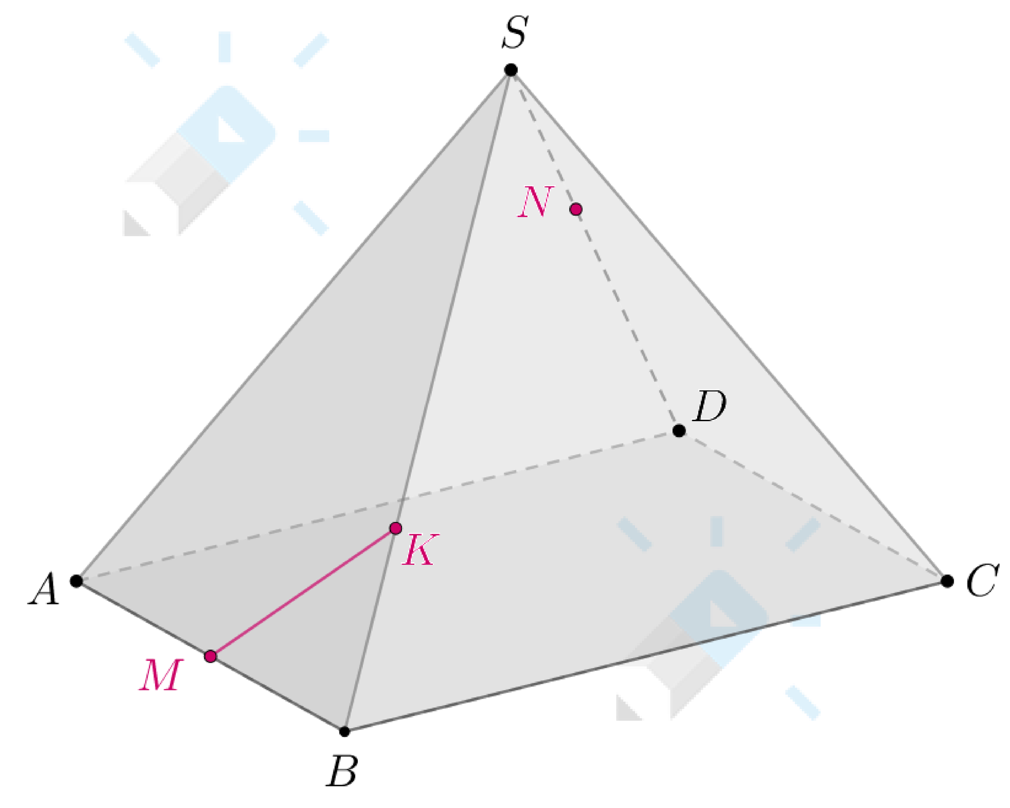
1. Если $R = OA$ — радиус основания конуса, $h = PO$ — высота конуса, $l = PA$ — образующая конуса, то это величины связаны соотношением
$$l^2 = h^2 + R^2,$$
объем конуса ищется по формуле
$$V = \frac{1}{3}h \cdot \pi R^2,$$
площадь боковой поверхности ищется по формуле
$$S_{\text{бок}} = \pi R l,$$
а площадь полной поверхности ищется по формуле
$$S = \pi R l + \pi R^2.$$
2. Угол φ сектора в развертке боковой поверхности конуса ищется по формуле
$$\varphi = 2\pi \cdot \frac{R}{l}.$$

Дано



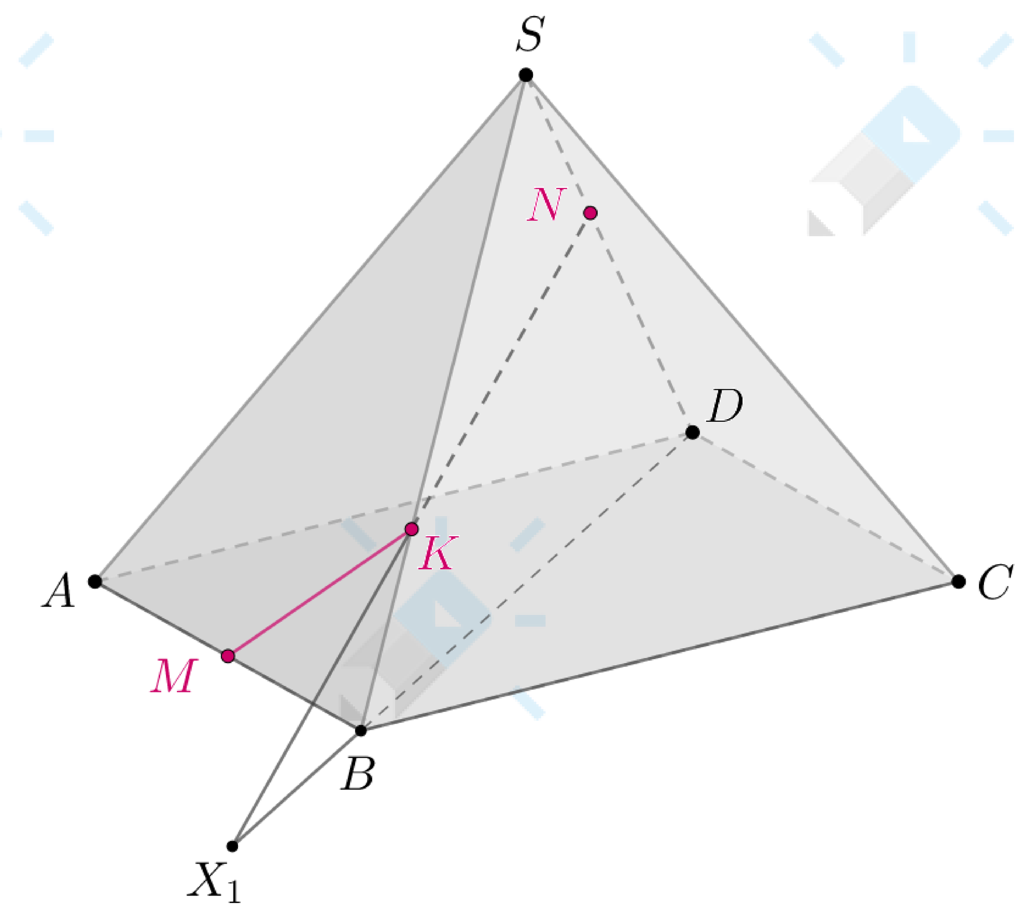
Постройте сечение правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ плоскостью, проходящей через точки M, N, K, где точка M лежит на ребре AB, точка N лежит на ребре SD, точка K лежит на ребре SB.

Шаг 1



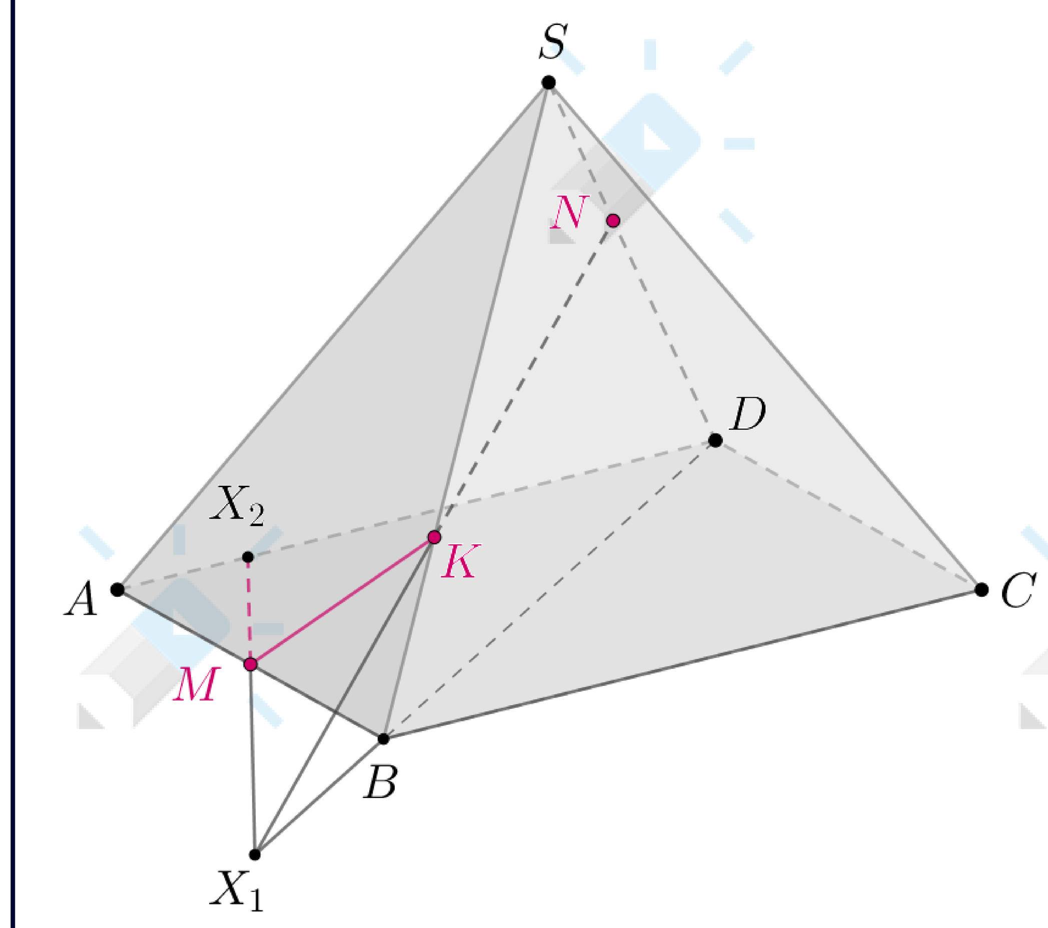
Построить сечение — найти многоугольник, все стороны которого лежат на гранях многогранника, а все вершины — на ребрах многогранника.
Точки M и K лежат в плоскости грани SAB, их можно соединить и получить первую сторону MK сечения.

Шаг 2



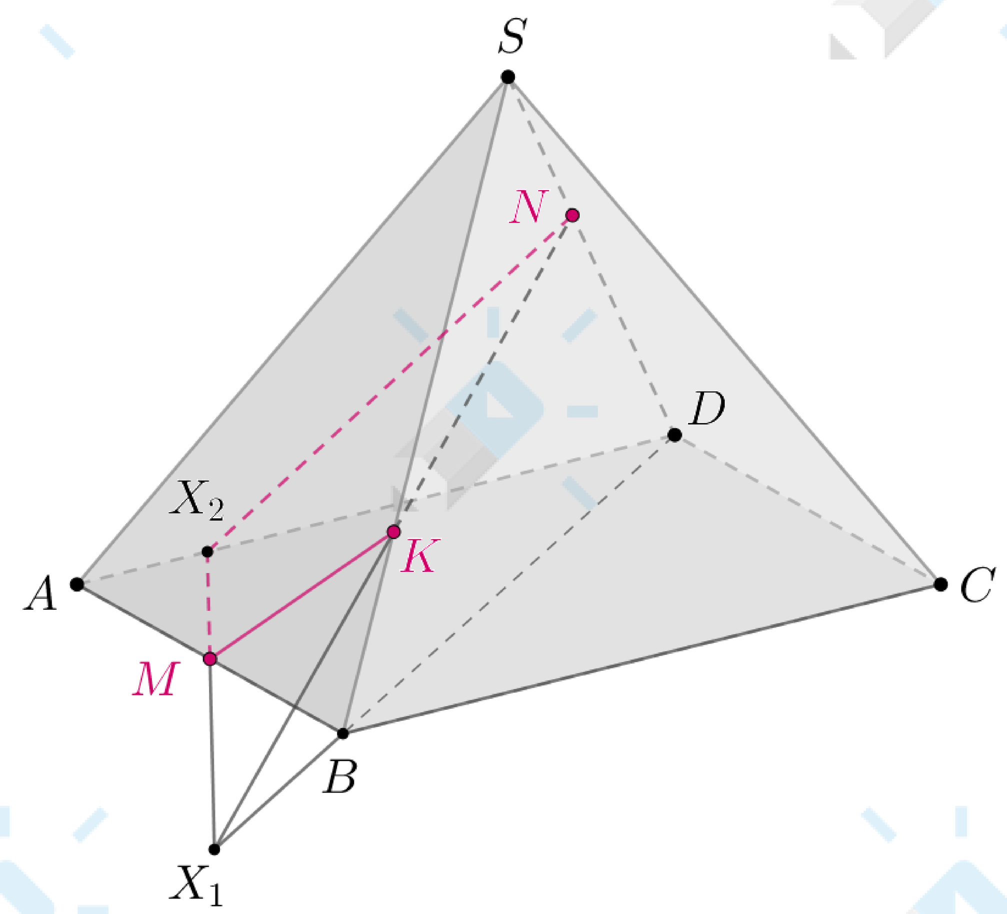
Найдем еще одну точку пересечения плоскости сечения с плоскостью ABC (помимо точки M). Для этого найдем точку X_1 пересечения прямой NK с прямой BD.
X_1 лежит в плоскости сечения, так как прямая NK лежит в этой плоскости, и лежит в плоскости основания ABC, так как BD лежит в этой плоскости.

Шаг 3



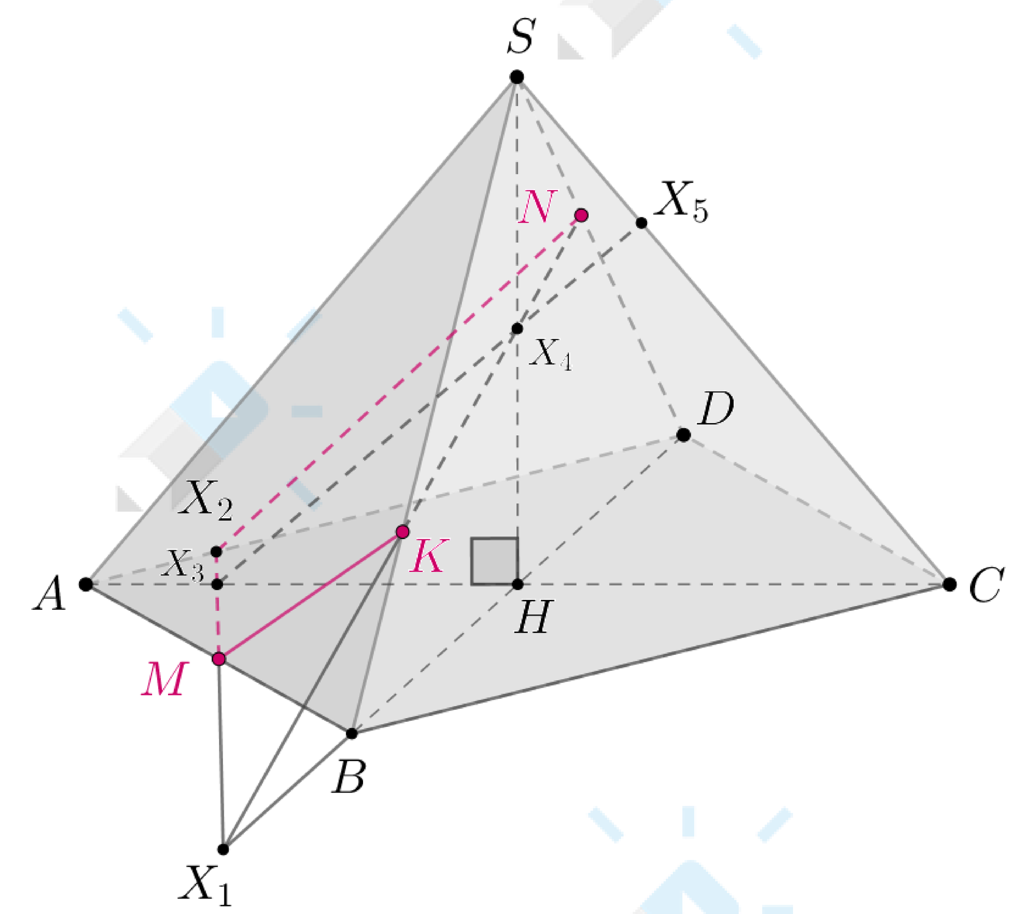
Теперь можно соединить точки X_1 и M, так как обе лежат в плоскости ABC.
Пусть прямая MX_1 пересекает ребро AD в точке X_2.
Мы получили новую вершину X_2 сечения и вторую сторону MX_2 сечения.

Шаг 4



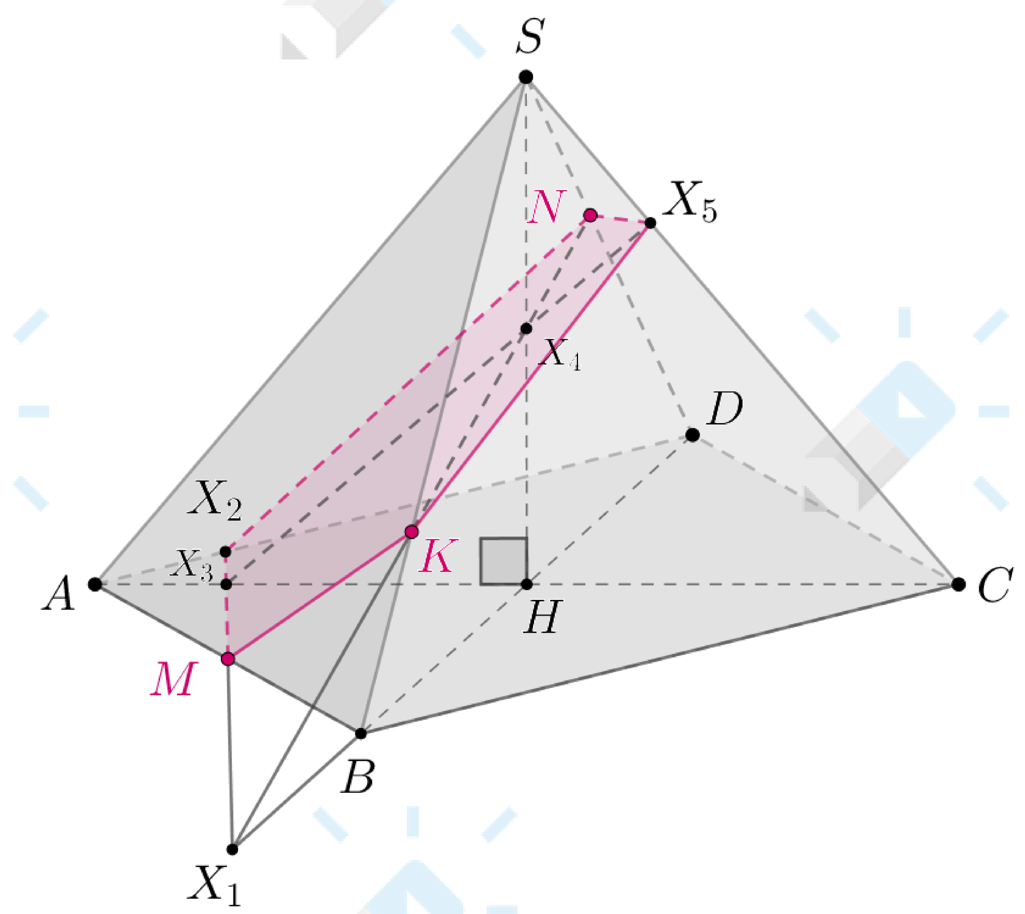
Получили еще одну точку X_2 в плоскости грани SAD, помимо точки N.
Следовательно, соединяя точки X_2 и N, мы получаем третью сторону сечения X_2N.

Шаг 5



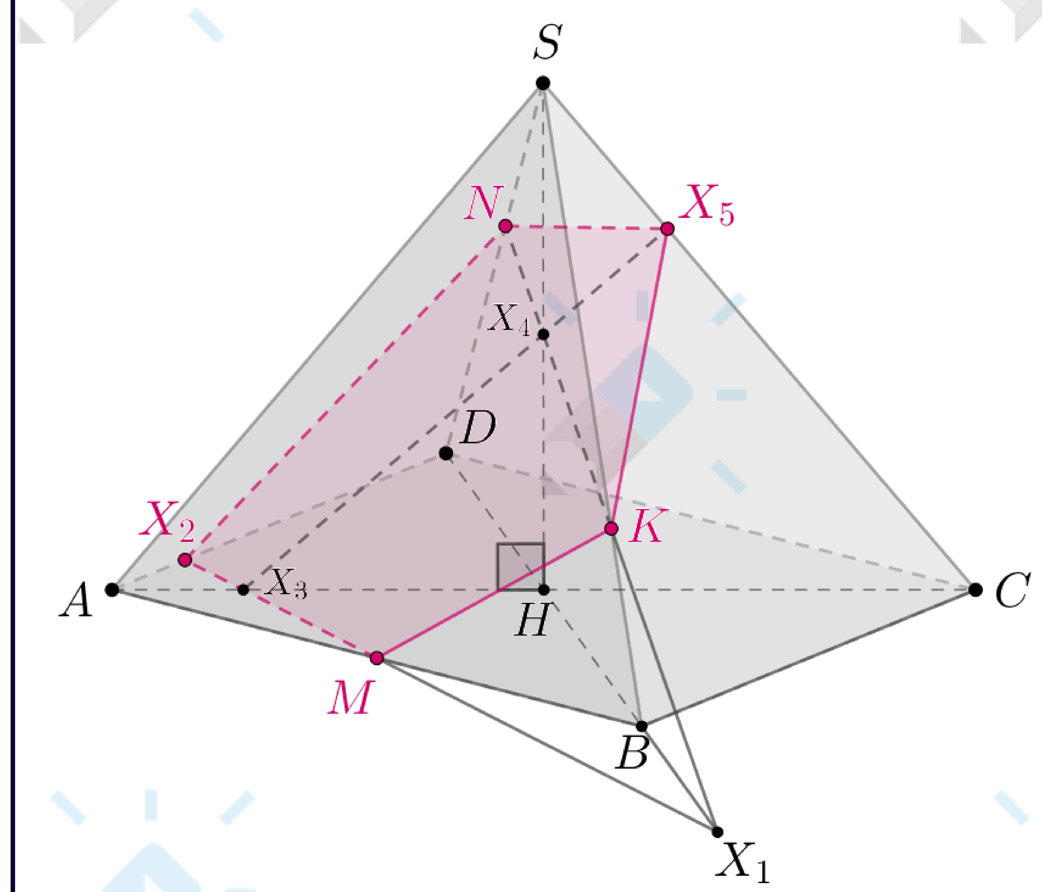
Осталось получить точку пересечения плоскости сечения с ребром SC. Для этого найдем две общие точки сечения и плоскости SAC : точка X_3 — точка пересечения MX_2 и AC; точка X_4 — точка пересечения NK и высоты пирамиды SH $(SH \subset SAC)$.
Тогда прямая X_3X_4 пересекает ребро SC в точке X_5.

Шаг 6



Теперь точки X_5 и N лежат в плоскости грани SCD, их можно соединить и получить четвертую сторону NX_5 сечения.
Также точки X_5 и K лежат в плоскости грани SBC, их тоже можно соединить и получить последнюю пятую сторону KX_5 сечения.

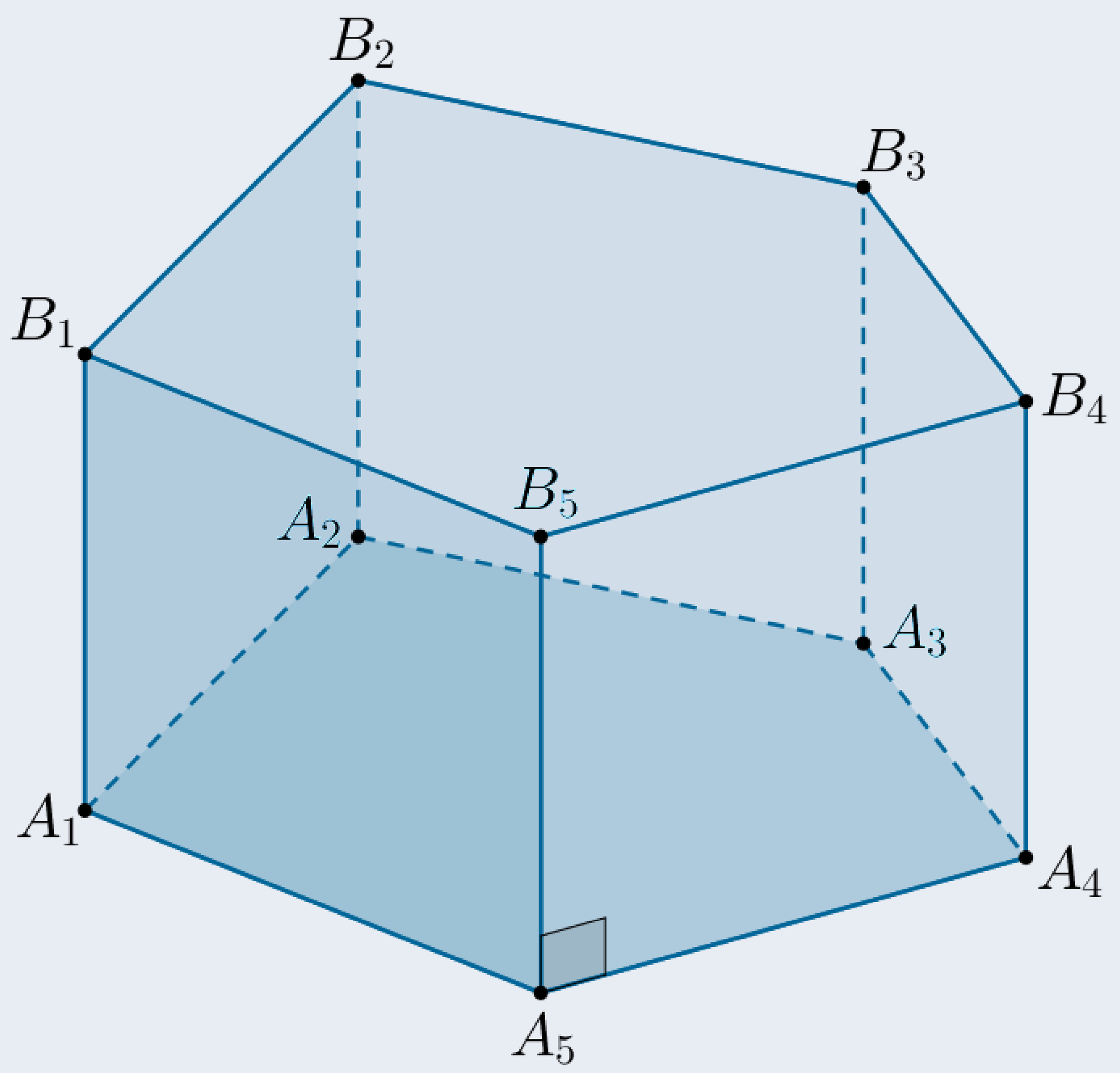
Конец



Получили сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью MNK — пятиугольник MX_2NX_5K.

Прямая и правильная призмы

Призма называется прямой, если ее боковые ребра перпендикулярны плоскостям оснований. Следовательно, боковые грани представляют собой прямоугольники, а боковое ребро равно высоте призмы.



Например, на рисунке изображена прямая призма $A_1A_2A_3A_4A_5B_1B_2B_3B_4B_5$. Боковые ребра A_1B_1, A_2B_2 и т.д. перпендикулярны плоскостям $(A_1A_2A_3)$ и $(B_1B_2B_3)$, и, как следствие, грани $A_1B_1B_2A_2$, $A_2B_2B_3A_3$ и т.д. являются прямоугольниками.

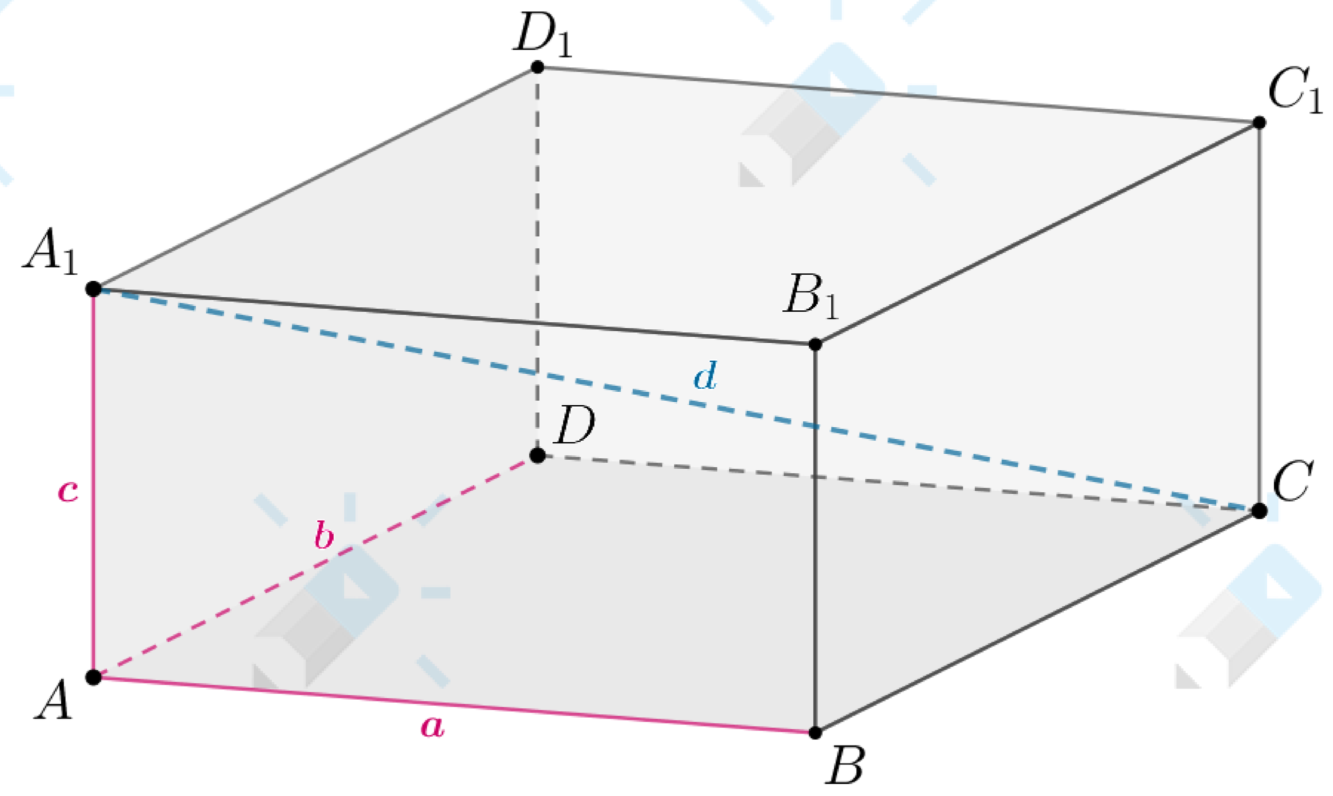
Объем V прямой призмы равен произведению длины бокового ребра h на площадь S основания:

$$V = S \cdot h.$$

Призма называется правильной, если она прямая и в основании ее лежит правильный многоугольник. Для примера, прямая призма, изображенная на рисунке, будет правильной, если $A_1A_2A_3A_4A_5$ — правильный пятиугольник.

Прямоугольный параллелепипед

Параллелепипед — это призма, в основании которой лежит параллелограмм.
Прямоугольный параллелепипед — это параллелепипед, все грани которого — прямоугольники. Другими словами, прямоугольный параллелепипед — прямая призма, в основании которой лежит прямоугольник.

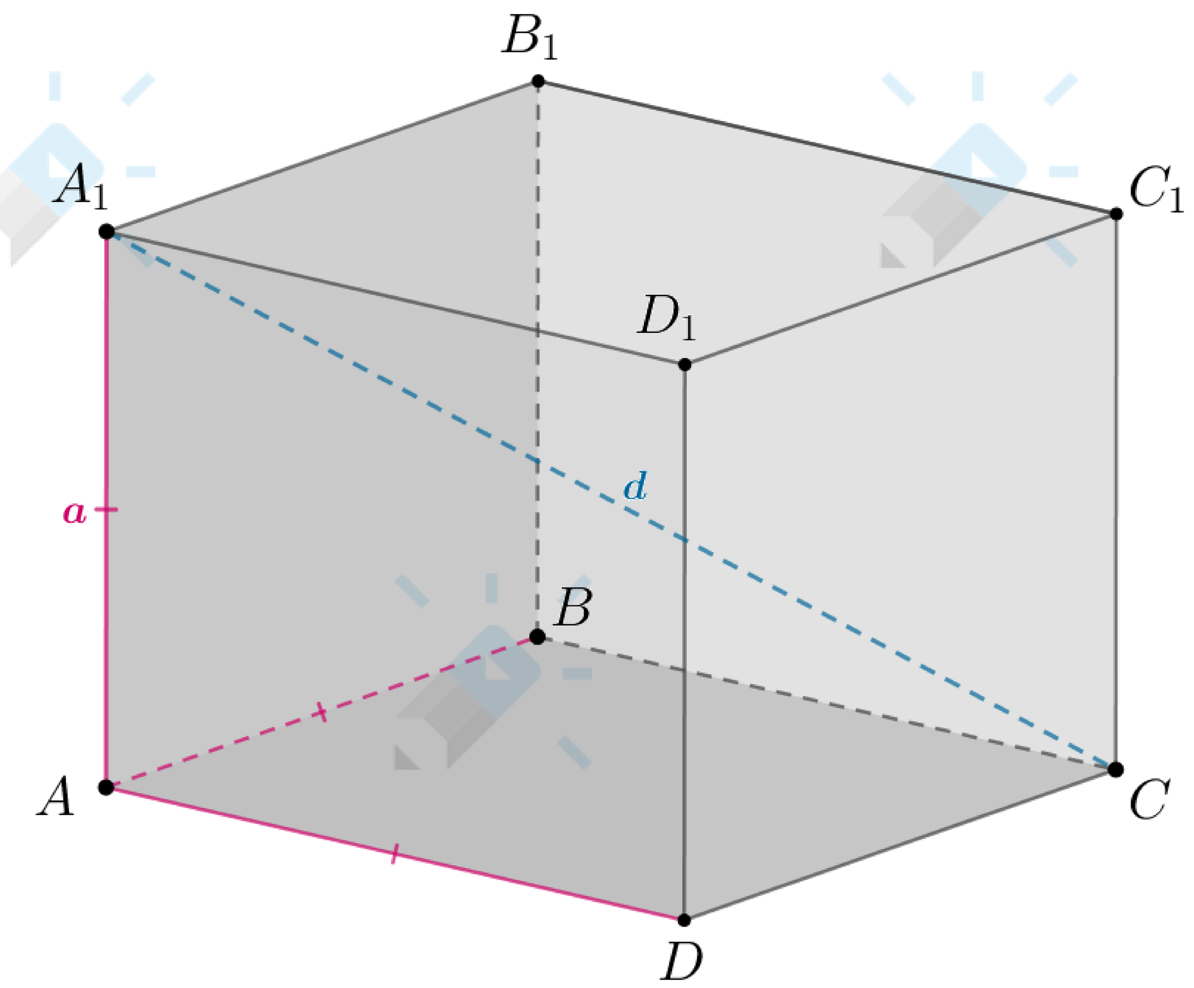


На рисунке изображен прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Введем обозначения: ребра параллелепипеда равны $AB = a$, $AD = b$, $AA_1 = c$ (называются измерениями параллелепипеда), диагональ параллелепипеда равна $A_1C = d$ (напомним, что диагональ параллелепипеда — это отрезок, соединяющий две вершины, не лежащие в одной грани). Тогда можно отметить следующие факты о прямоугольном параллелепипеде.

- Противоположные грани представляют собой одинаковые прямоугольники: $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, ABB_1A_1 и DCC_1D_1 и т.д.
- Все диагонали прямоугольного параллелепипеда равны: $d = A_1C = AC_1 = BD_1 = B_1D$ и ищутся по формуле
$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$
- Объем прямоугольного параллелепипеда ищется по формуле
$$V = abc.$$
- Площадь боковой поверхности прямоугольного параллелепипеда (как и любой прямой призмы) равна произведению периметра основания на длину бокового ребра:
$$S_{\text{бок.пов-ти}} = 2(a+b)c.$$
- Площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда равна
$$S_{\text{полн.пов-ти}} = 2(ab+bc+ac).$$

Куб

Куб — это прямоугольный параллелепипед с равными измерениями. На рисунке изображен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, все ребра которого равны a. Как следствие, все грани куба представляют собой равные квадраты.



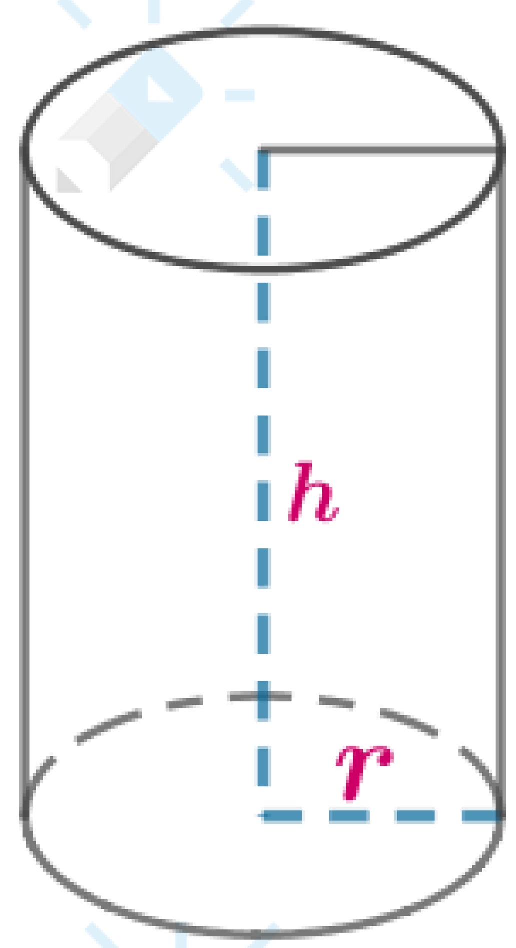
Куб обладает следующими свойствами.

- Площадь полной поверхности куба равна
$$S_{\text{полн.пов-ти}} = 6a^2.$$
- Объем куба равен
$$V = a^3.$$
- Диагональ куба равна
$$d = a\sqrt{3}.$$

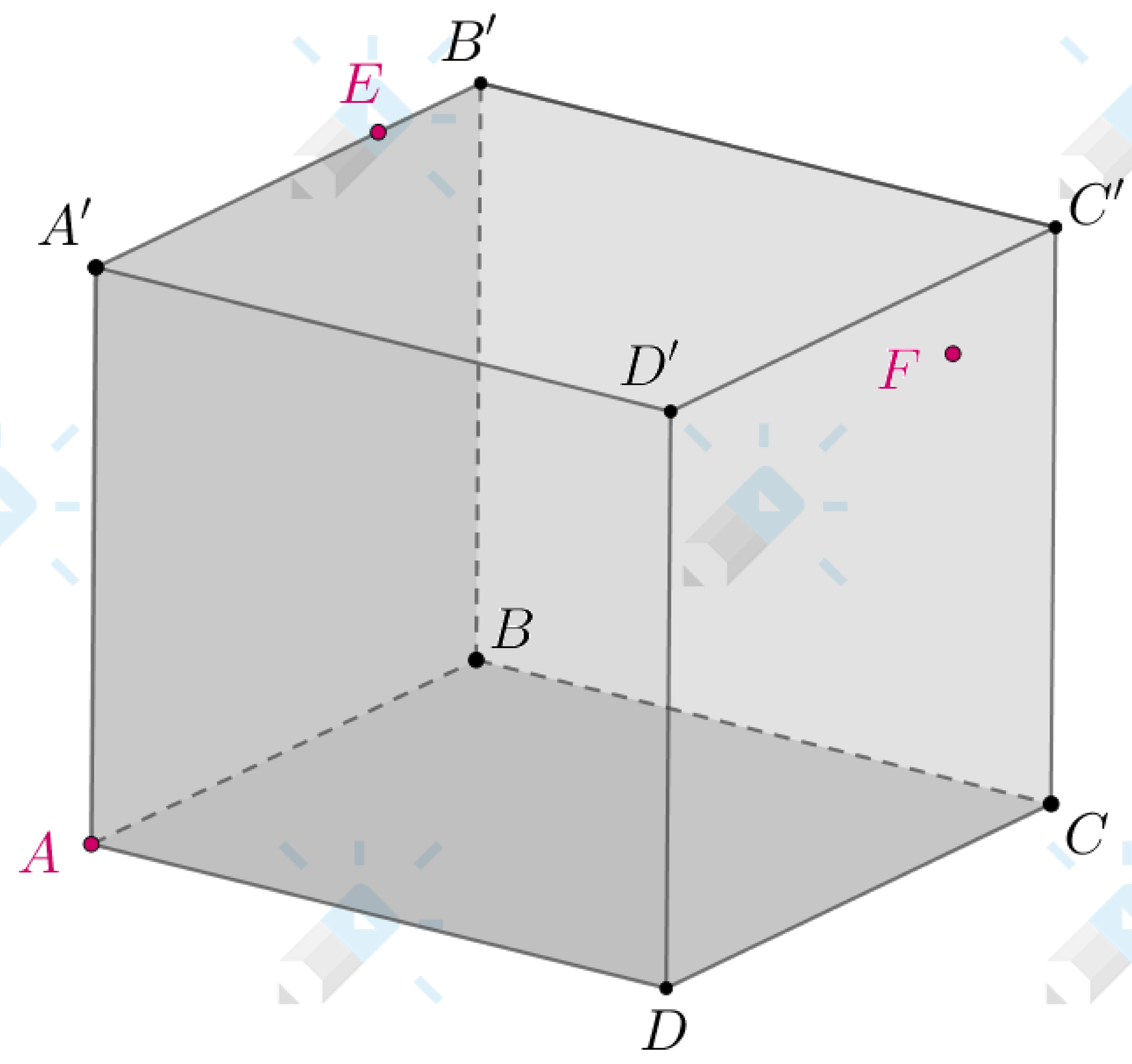
Цилиндр

Пусть r — радиус основания (прямого) цилиндра, h — его высота.

- Площадь боковой поверхности цилиндра равна
$$S_{\text{бок.пов-ти}} = 2\pi rh.$$
- Площадь полной поверхности цилиндра равна
$$S_{\text{полн.пов-ти}} = 2\pi r(r+h).$$
- Объем цилиндра равен
$$V = \pi r^2 h.$$

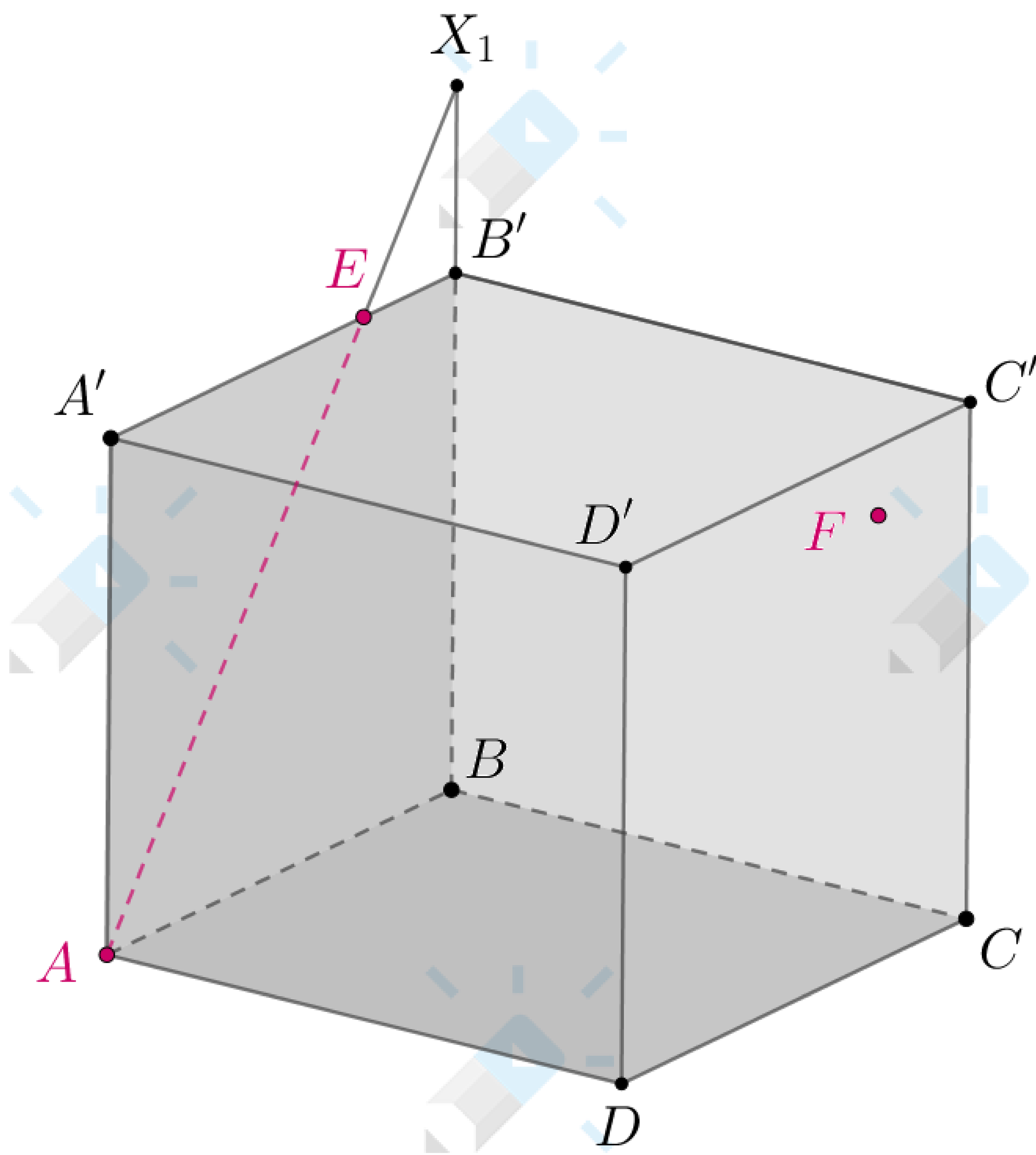


Дано



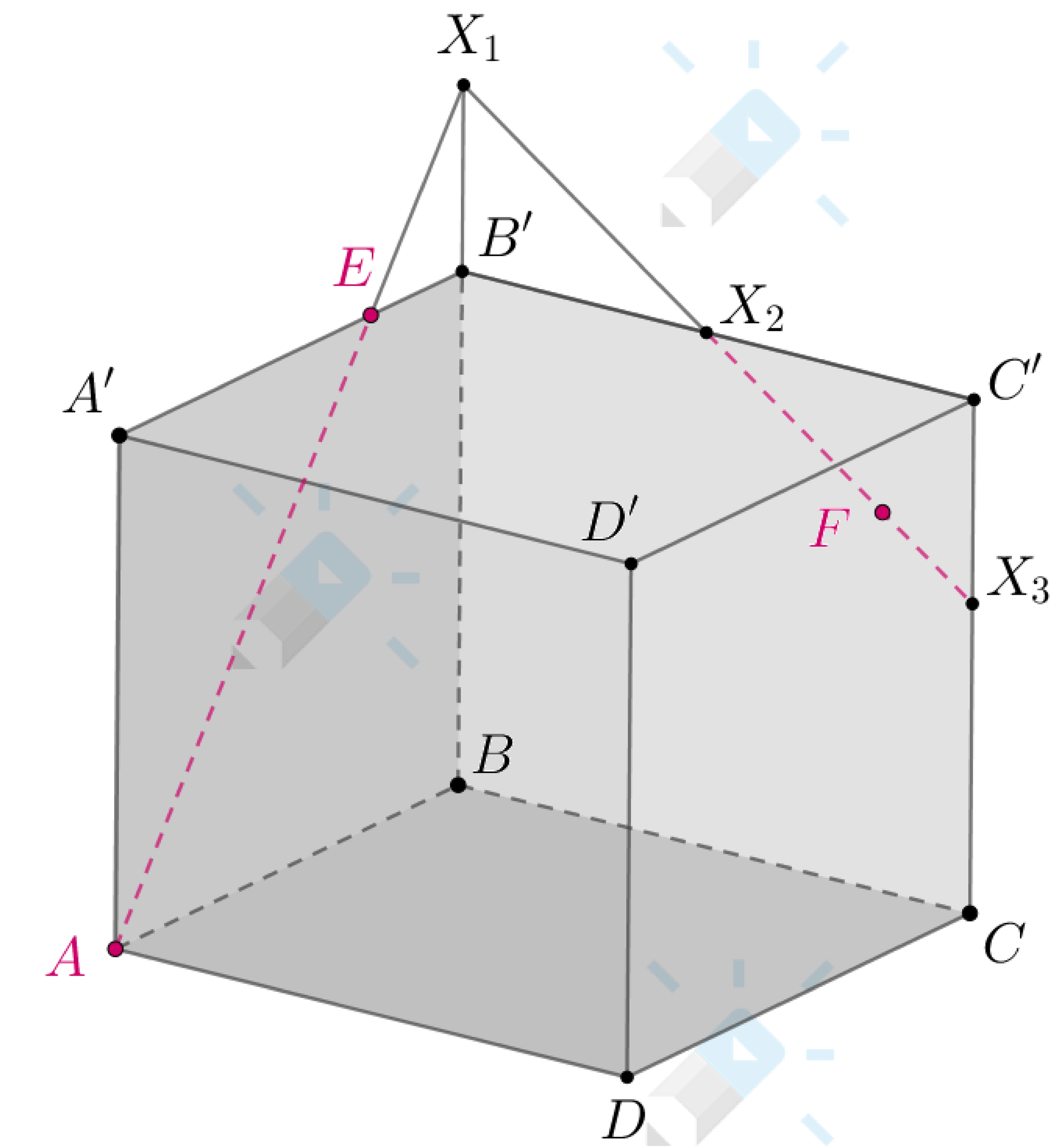
Построить сечение куба $ABCDA'B'C'D'$ плоскостью, проходящей через три точки: A, E, F, где точка E лежит на ребре $A'B'$, а точка F лежит на задней грани $BB'C'C$.

Шаг 1



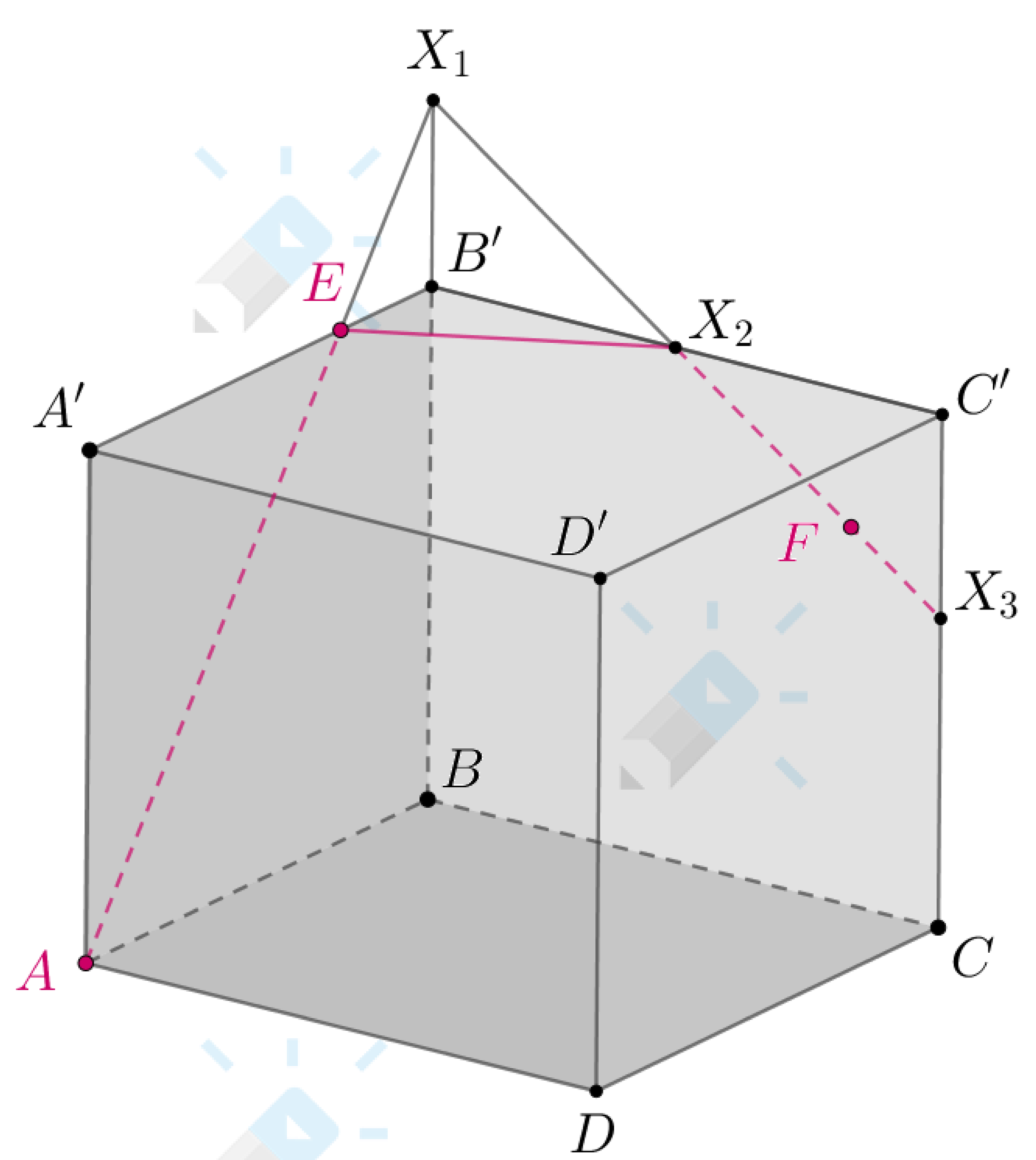
Соединяем точки A и E, так как они лежат в плоскости грани $AA'B'B$. Получаем одну из сторон сечения AE.
Продлеваем прямую AE до пересечения с прямой BB', таким образом получаем точку X_1, которая лежит вместе с точкой F в плоскости грани $BB'C'C$.

Шаг 2



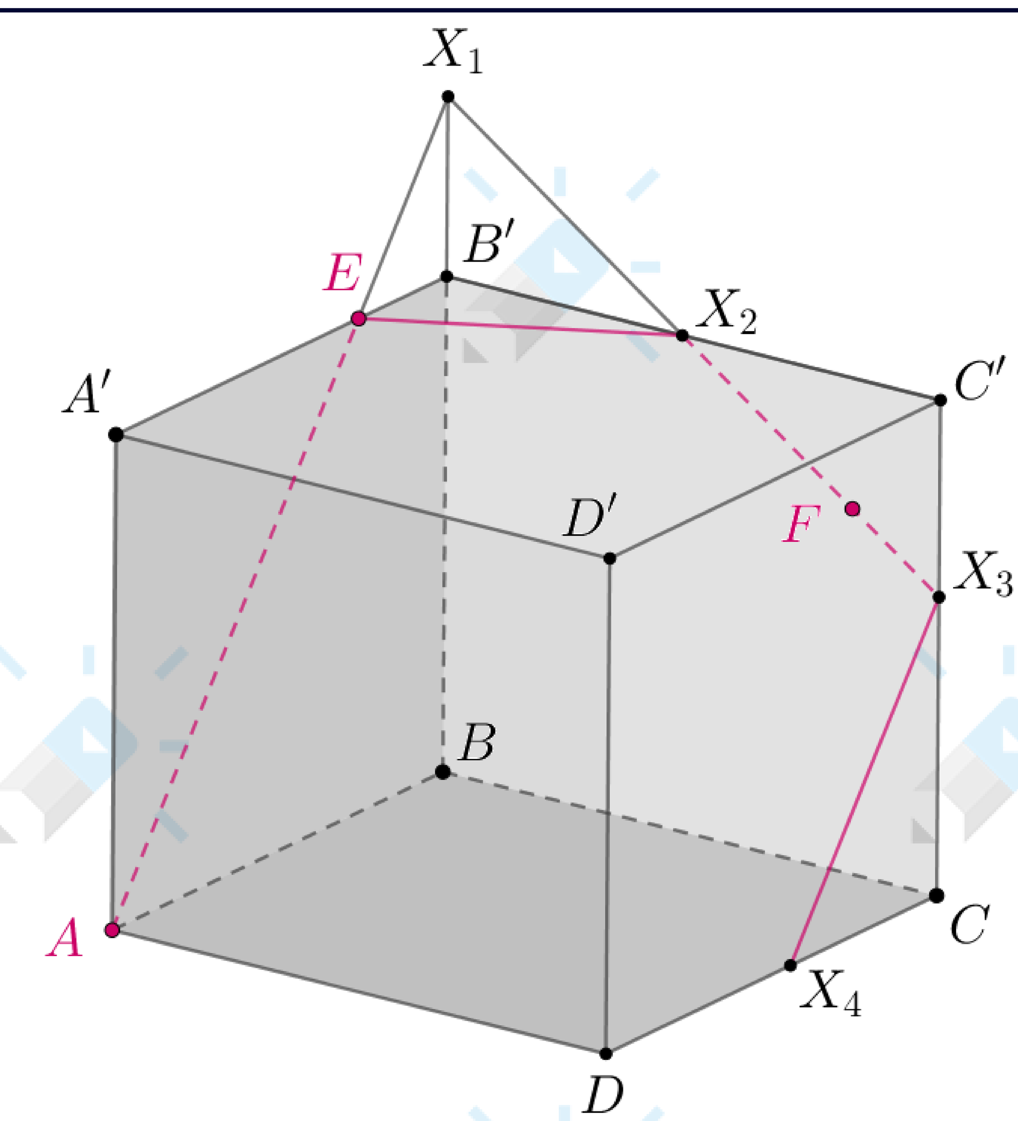
Соединяем точки X_1 и F, так как они лежат в плоскости грани $BB'C'C$, получаем две точки X_2 и X_3 пересечения плоскости сечения с ребрами $B'C'$ и CC' соответственно.
X_2X_3 — одна из сторон сечения.

Шаг 3



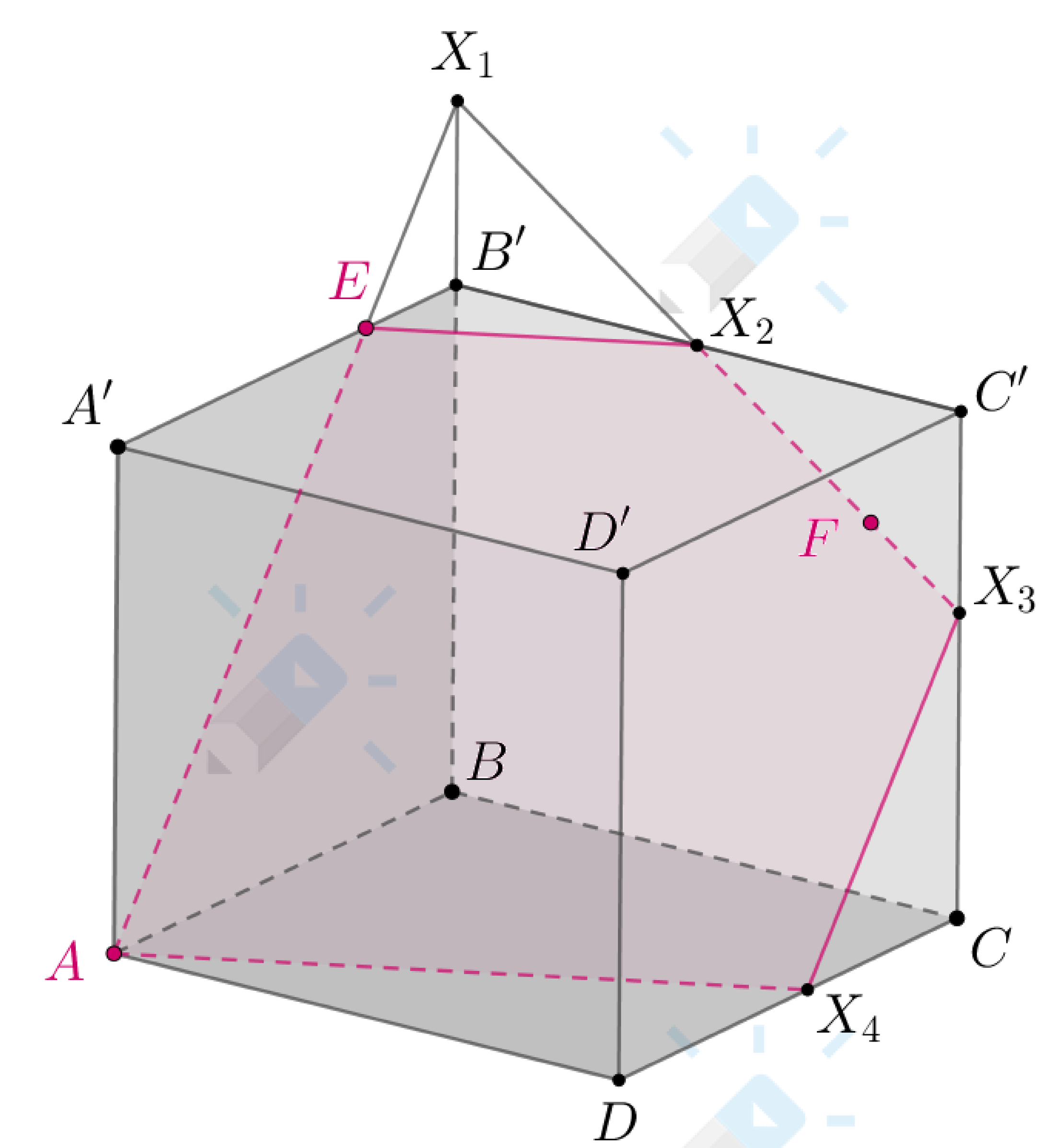
Точки E и X_2 также лежат в плоскости грани $A'B'C'D'$, соединяя их, мы получаем еще одну сторону сечения EX_2.

Шаг 4



В плоскости грани $CC'D'D$ мы получили точку X_3. В плоскости грани $AA'B'B$ есть прямая сечения — прямая AE. Так как эти грани параллельны, то и прямые пересечения плоскости сечения с этими гранями также будут параллельны.
Следовательно, проводим прямую $X_3X_4 \parallel AE$ в грани $CC'D'D$. Получаем точку X_4 на ребре CD.
X_3X_4 — еще одна из сторон сечения.

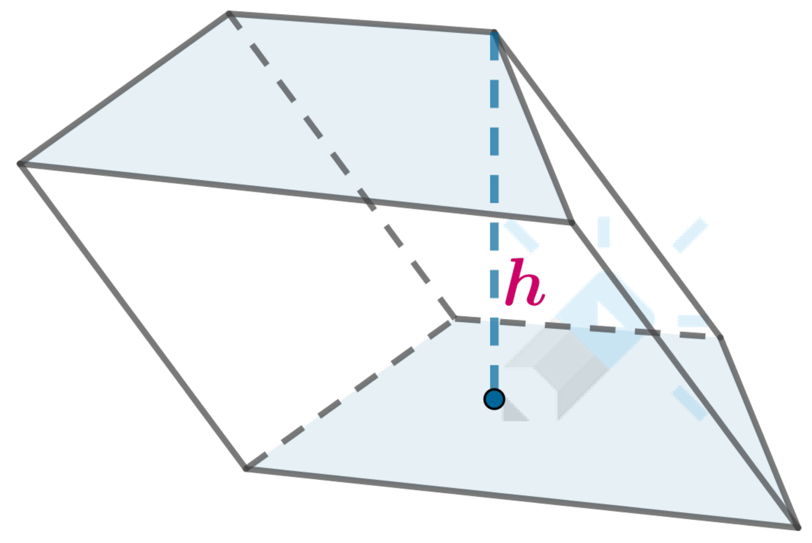
Шаг 5



Получили две точки A и X_4 в плоскости грани $ABCD$. Соединяя их, получаем последнюю сторону сечения AX_4.
Таким образом, $AEX_2X_3X_4$ — сечение куба.

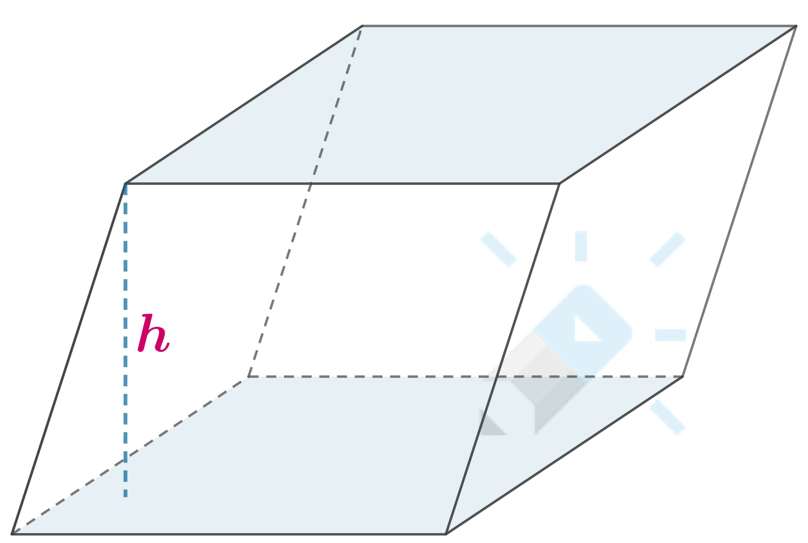
Стереометрия ЕГЭ 2023

Объемы и площади поверхностей



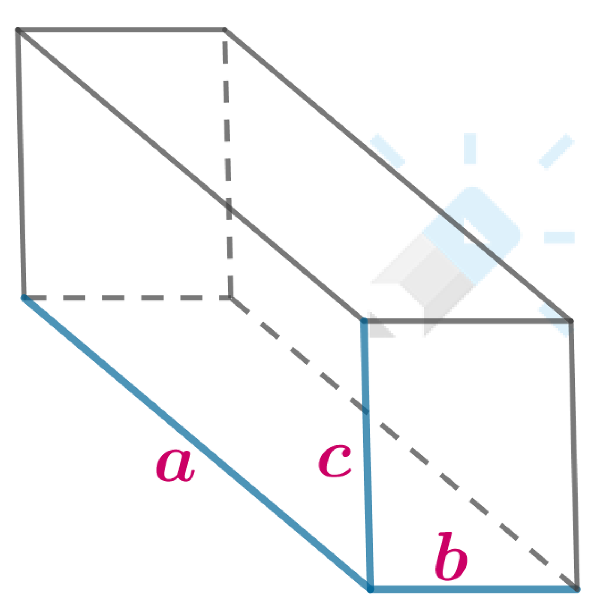
Объем призмы равен произведению площади основания на высоту призмы.

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h$$



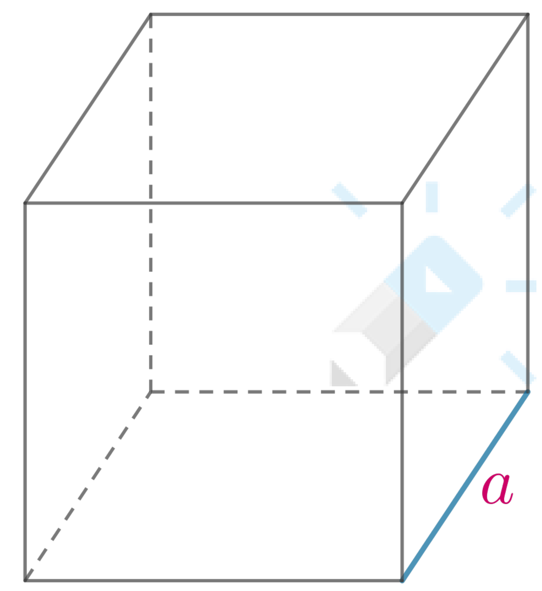
Параллелепипед — призма, все грани которой — параллелограммы.
Объем параллелепипеда равен произведению площади основания на его высоту.

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h$$



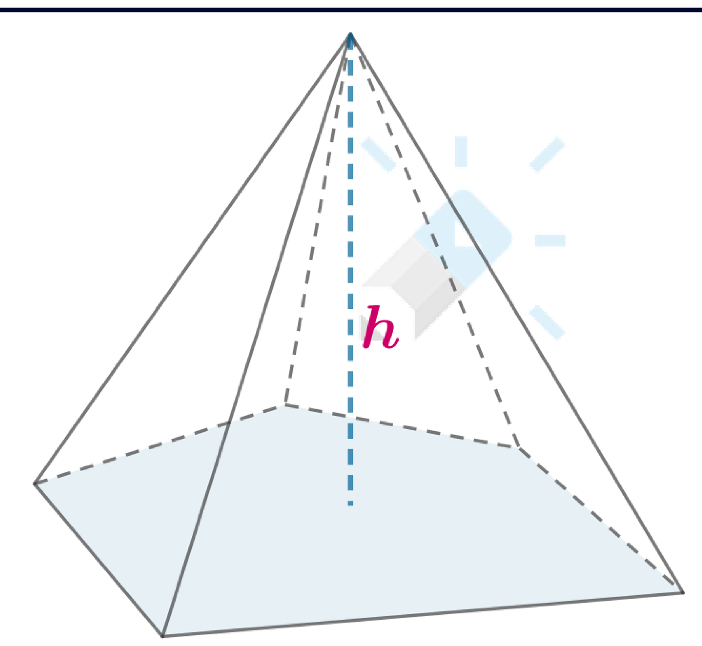
Прямоугольный параллелепипед — параллелепипед, все грани которого — прямоугольники.
Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений (длины ребер, выходящих из одной точки).

$$V = abc$$



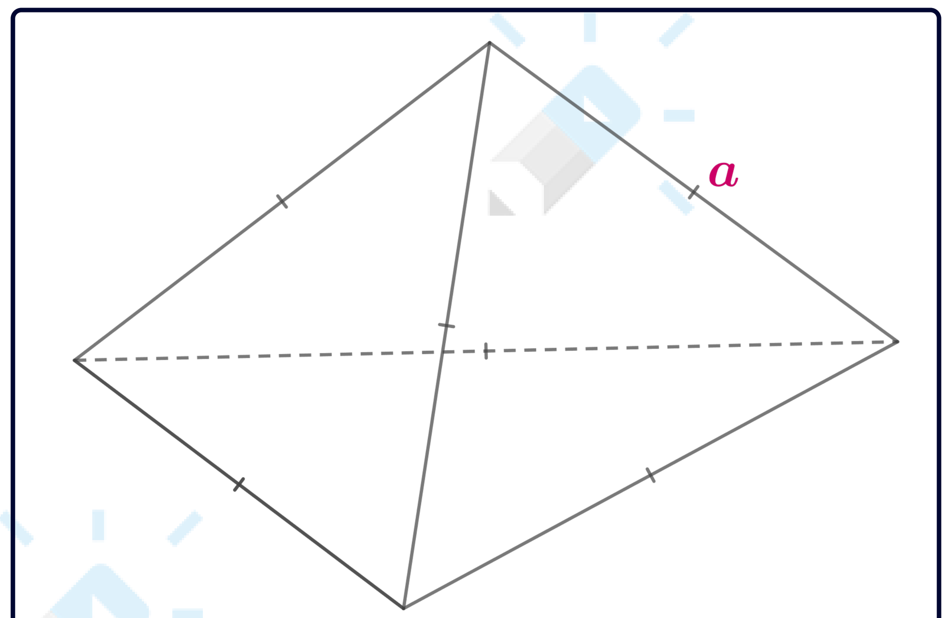
Куб — прямоугольный параллелепипед, все измерения которого равны.
Объем куба равен кубу длины его ребра.

$$V = a^3$$



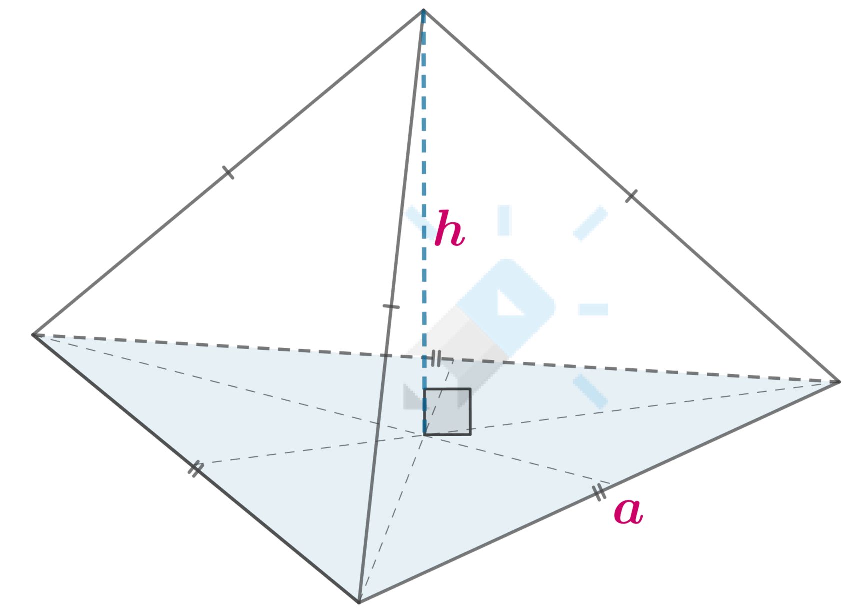
Объем пирамиды равен трети произведения площади основания на высоту пирамиды.

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$$



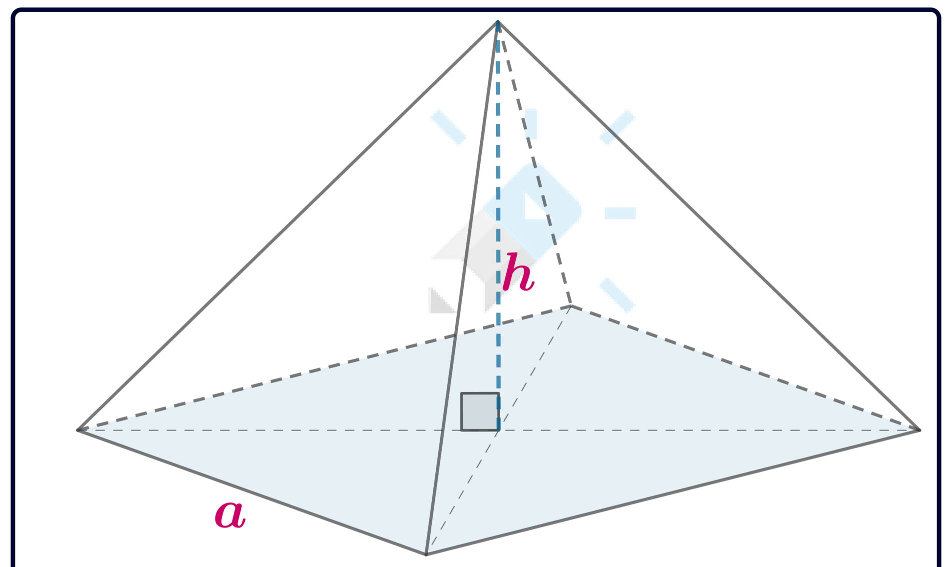
Правильный тетраэдр — треугольная пирамида, все ребра которой равны.

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$$



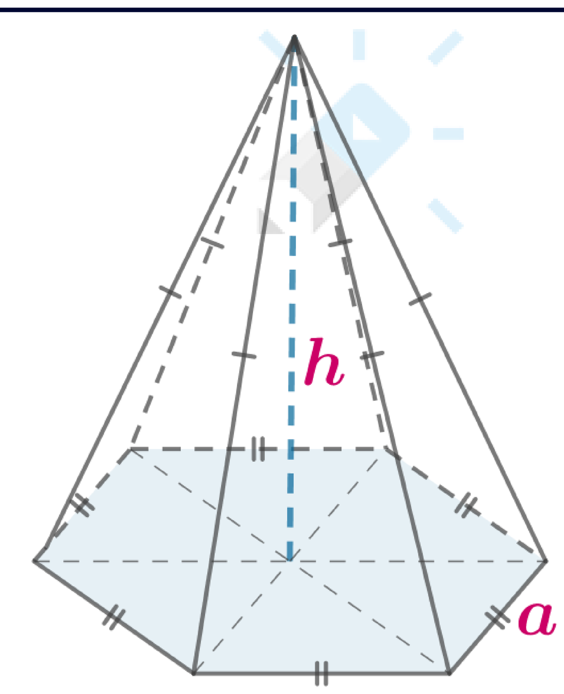
Правильная треугольная пирамида — пирамида с равными боковыми ребрами, в основании которой лежит равносторонний треугольник.

$$V = \frac{\sqrt{3}}{12} a^2 h$$



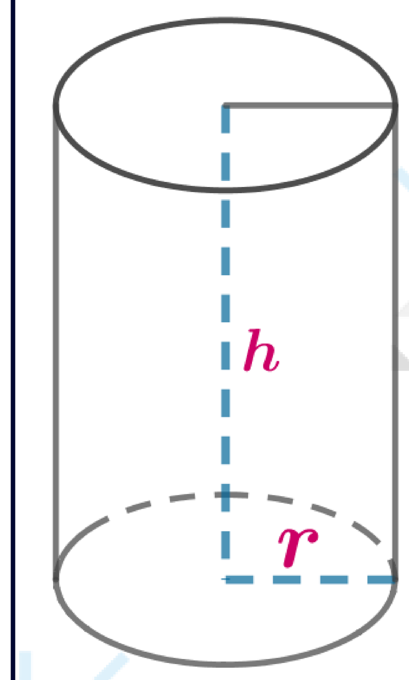
Правильная четырехугольная пирамида — пирамида с равными боковыми ребрами, в основании которой лежит квадрат.

$$V = \frac{1}{3} a^2 \cdot h$$



Правильная шестиугольная пирамида — пирамида с равными боковыми ребрами, в основании которой лежит правильный шестиугольник.

$$V = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 h$$



Объем:

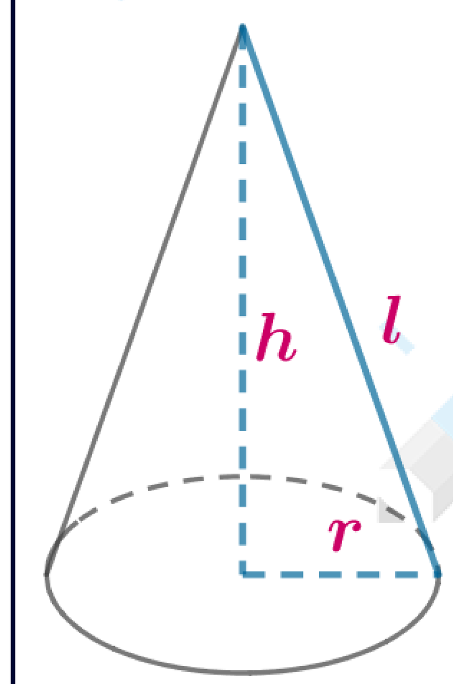
$$V = \pi r^2 h$$

Площадь боковой поверхности:

$$S = 2\pi r h$$

Площадь полной поверхности:

$$S = 2\pi r (h + r)$$



Объем:

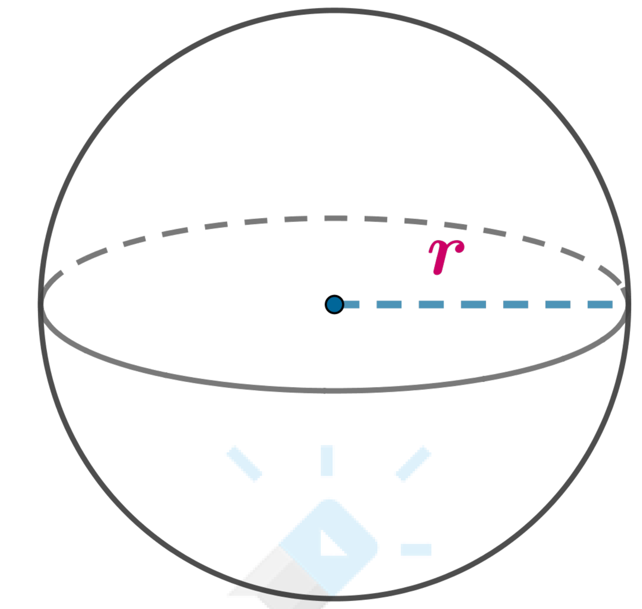
$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

Площадь боковой поверхности:

$$S = \pi r l$$

Площадь полной поверхности:

$$S = \pi r (l + r)$$



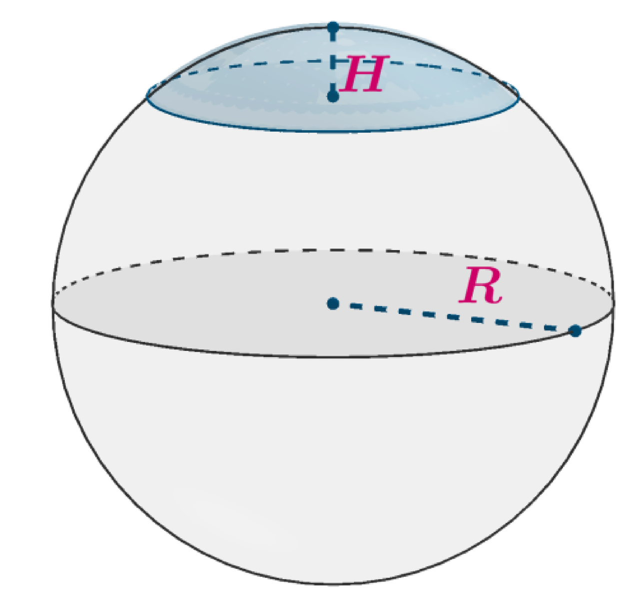
Объем шара:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Площадь сферы:

$$S = 4\pi r^2$$

Шаровой сегмент



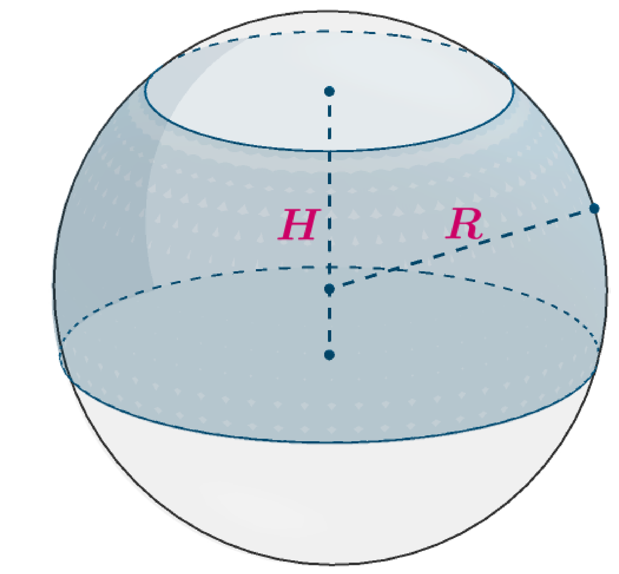
Объем:

$$V = \pi H^2 \left(R - \frac{1}{3} H\right)$$

Площадь поверхности:

$$S = 2\pi R H$$

Шаровой слой



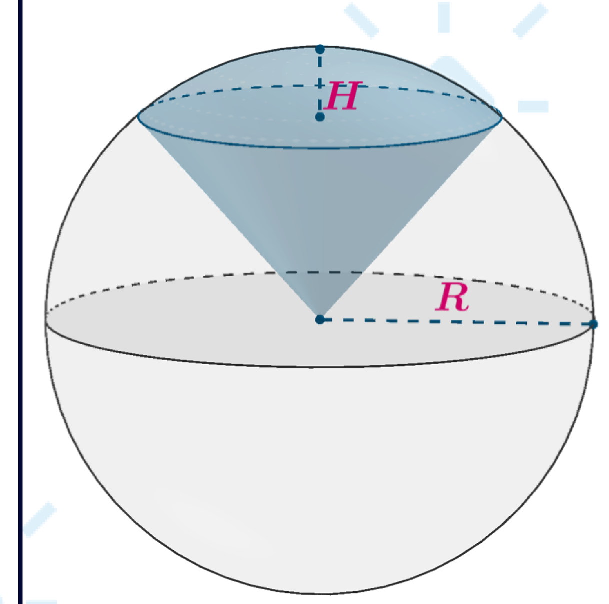
Объем равен разности объемов шаровых сегментов:

$$V = V_{\text{б}} - V_{\text{м}}$$

Площадь поверхности:

$$S = 2\pi R H$$

Шаровой сектор



Объем:

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 H$$