

Автор подборки: Бабаев Алипаша

Задание №13. Методы решения

Разложение на множители

Разложение на множители работает по следующему принципу: раскладываем либо методом группировки, либо узнаем одну из ФСУ (формул сокращённого умножения).

Примеры:

(a) $ab + cd + ad + bc = (ad + ab) + (cd + bc) = a(b + d) + c(b + d) = (a + c)(b + d)$. То есть задача группировки заключается в том, чтобы все слагаемые разбились на такие группы, вынося из которых общий множитель, мы бы получали одинаковые скобки, которые были бы уже общим множителем для этих двух групп.

(b) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 + 2^3 = (x + 2)^3$. То есть задача заключается в том, чтобы среди представленных слагаемых (или их части) распознать одну из формул ФСУ. Кстати, вот ФСУ, которые обязательно следует брать на вооружение:

1. $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$;
2. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;
3. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$;
4. $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.

1. (a) Решите уравнение $\cos^2 x - \frac{1}{2} \sin 2x + \sin x = \cos x$.

(b) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{15\pi}{2}; -6\pi\right]$.

2. (a) Решите уравнение $\sin 2x - 2 \cos^2(\pi - x) = 0$.

(b) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

3. (a) Решите уравнение $2 \sin^2 x + (2 - \sqrt{2}) \cos x - 2 + \sqrt{2} = 0$.

(b) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Сведение к квадратному уравнению

Это частный случай замены переменной, однако, он является наиболее простым. Он заключается в том, что мы все слагаемые, зависящие от переменной x представляем таким образом, что одно слагаемое является некоторым выражением в первой степени, а другое — тем же самым выражением, но во второй степени. Сделав соответствующую замену переменной, мы получим квадратное уравнение, которое решается стандартными способами, находим значение переменной, на которую мы заменили наши выражения, а после этого делаем обратную замену и решаем уравнение уже относительно x . Разберем наглядный пример применения вышеописанного метода.

Решите уравнение $\operatorname{tg} x + 3 \operatorname{ctg} x + 4 = 0$. Вспоминаем, что $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$. Получим уравнение $\operatorname{tg} x + \frac{3}{\operatorname{tg} x} + 4 = 0$. Домножим обе части уравнения на $\operatorname{tg} x \neq 0$: $\operatorname{tg}^2 x + 4 \operatorname{tg} x + 3 = 0$. И вот мы видим, что в данном уравнении одно слагаемое — первая степень $\operatorname{tg} x$, а другое — вторая степень $\operatorname{tg} x$. Сделаем замену $\operatorname{tg} x = t$ и решим уравнение относительно t , получив корни $t = -1$ и $t = -3$, после чего делаем обратную замену:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = -1; \\ \operatorname{tg} x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + \pi n; \\ \operatorname{tg} x = -\operatorname{arctg} 3 + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

4. (a) Решите уравнение $6 \sin^2 x + 7 \cos x - 7 = 0$.

(b) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi; -\pi]$.

5. (a) Решите уравнение $5 \sin 2x = \cos 4x - 3$.

(b) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Метод замены переменной

В него входит как сведение уравнения к квадратному, так и к другим. Суть метода та же: нужно представить данное уравнение как сумму слагаемых, каждое из которых является некоторой степенью одного и того же выражения. Разберём пример для наглядности:

Решите уравнение $x^2 + \frac{9}{x^2} - x - \frac{3}{x} = 14$. Третье и четвертое слагаемые левой части можно объединить и вынести в них минус, получив тем самым скобку $x + \frac{3}{x}$. Но, к сожалению, $\left(x + \frac{3}{x}\right)^2 \neq x^2 + \frac{9}{x^2}$. Отличие будет ровно на 6, то есть $\left(x + \frac{3}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{9}{x^2} + 6$. Поскольку отличие в выражениях заключается в некоторой константе (то есть разница никак не зависит от x), можно сделать замену переменной $x + \frac{3}{x} = t$. Тогда $x^2 + \frac{9}{x^2} = t^2 - 6$. Подставим новые выражения относительно t в исходное уравнение:

$$t^2 - 6 - t = 14 \Leftrightarrow t^2 - t - 20 = 0 \Leftrightarrow (t - 5)(t + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5; \\ t = -4. \end{cases}$$

Решив уравнение относительно t , можно провести обратную замену, чтобы найти x : в первом случае получим уравнение $x + \frac{3}{x} = 5$, которое после домножения на x превращается в обыкновенное квадратное уравнение с корнями $\frac{2,5 \pm \sqrt{13}}{2}$; во втором при таком же домножении на x получается квадратное уравнение с корнями -1 и -3 . Все полученные корни соответствуют ограничению $x \neq 0$.

6. (a) Решите уравнение $7^{x^2-2x} + 7^{x^2-2x-1} = 56$.

(b) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $[-1; 1]$.

7. (a) Решите уравнение $2 \cos^4 x + 3 \sin^2 x - 2 = 0$.

(b) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

Метод вспомогательного угла

Данный метод используется в решении уравнений вида $a \sin x + b \cos x = c$, где $c \neq 0$: левая часть преобразуется таким образом, что она превращается в формулу синуса суммы углов (или косинуса суммы), после чего происходит переход к решению элементарного тригонометрического уравнения. Рассмотрим на примере:

$\sin x + \cos x = 1$. В этом уравнении $a = b = 1$, нужно обе части уравнения разделить на такое число n , что $\frac{a}{n}$ и $\frac{b}{n}$ будут являться косинусом и синусом некоторого угла соответственно. Критерием того, что два числа — пара «косинус–синус», является соблюдение основного тригонометрического тождества: $\left(\frac{a}{n}\right)^2 + \left(\frac{b}{n}\right)^2 = 1$. Из него получим, что $n^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow n = \sqrt{a^2 + b^2}$. То есть каждую часть уравнения в данном задании нужно разделить на $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ (либо умножить на $\frac{\sqrt{2}}{2}$, это будет аналогичным действием), после чего мы получим уравнение: $\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Заметим, что левая часть полностью подходит под формулу синуса суммы углов x и $\frac{\pi}{4}$:

$$\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \sin x \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x.$$

Таким образом, уравнение сводится к элементарному тригонометрическому уравнению: $\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, которое имеет решения $x = 2\pi n$ и $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Итоговая справка:

- В общем случае левая часть уравнения вида $a \sin \alpha \pm b \cos \alpha$ превращается в $\sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha \pm \varphi)$, где $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.
- Наиболее часто встречающиеся частные случаи:
 - $\sin \alpha \pm \cos \alpha = \sqrt{2} \sin \left(\alpha \pm \frac{\pi}{4} \right)$;
 - $\sqrt{3} \sin \alpha \pm \cos \alpha = 2 \sin \left(\alpha \pm \frac{\pi}{6} \right)$;
 - $\sin \alpha \pm \sqrt{3} \cos \alpha = 2 \sin \left(\alpha \pm \frac{\pi}{3} \right)$.

8. (a) Решите уравнение $\sqrt{3} \sin 2x + 3 \cos 2x = 0$.

(b) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi \right]$.

9. (a) Решите уравнение $\sin x - \cos x = 1$.

(b) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $[-\pi; \pi]$.

Ответы

1. (a) $2\pi n, \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; (b) $-\frac{27\pi}{4}, -6\pi$.
2. (a) $\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; (b) $-\frac{7\pi}{2}, -\frac{11\pi}{4}, -\frac{5\pi}{2}$.
3. (a) $2\pi n, \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; (b) $\frac{11\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}$.
4. (a) $2\pi n, \pm \arccos \frac{1}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; (b) $-\arccos \frac{1}{6} - 2\pi, -2\pi, \arccos \frac{1}{6} - 2\pi$.
5. (a) $-\frac{\pi}{12} + \pi n, -\frac{5\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; (b) $\frac{19\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}, \frac{31\pi}{12}, \frac{35\pi}{12}$.
6. (a) $1 \pm \sqrt{3}$; (b) $1 - \sqrt{3}$.
7. (a) $\pi n, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$; (b) $-\frac{13\pi}{4}, -3\pi, -\frac{11\pi}{4}$.
8. (a) $-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}$; (b) $\frac{11\pi}{6}, \frac{14\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}$.
9. (a) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; (b) $-\pi, \frac{\pi}{2}, \pi$.