Разложение на множители

Часто, если в уравнении встречаются, например, слагаемые $\cos nx$, $\sin mx$ и $\cos nx\cdot\sin mx$, то это уравнение путем разложения на множители приводится к виду $A\cdot B=0$. Рассмотрим такой способ решения уравнений на примере.

Задача: Решите уравнение

$$2\cos 2x\sin x-\sqrt{3}\sin x+2\cos 2x=\sqrt{3}.$$

Решение: ОДЗ: x — произвольное вещественное число. Решим на ОДЗ.

Перенесем все слагаемые в левую часть и вынесем общие множители за скобки:

$$\underline{2\cos 2x\cdot\sin x}-\underline{\underline{\sqrt{3}\sin x}}+\underline{2\cos 2x}-\underline{\underline{\sqrt{3}}}=0\Rightarrow$$

$$2\cos 2x(\sin x+1)-\sqrt{3}(\sin x+1)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(\sin x+1)(2\cos 2x-\sqrt{3})=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\ \cos 2x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\\ x_2=\dfrac{\pi}{12}+\pi m,\ m\in\mathbb{Z}\\ x_3=-\dfrac{\pi}{12}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

Задача: Решите уравнение

$$\log_4 x\cdot\log_3(x+2)-\log_2 x+\log_3(x+2)-2=0.$$

Решение: ОДЗ:

$$\begin{cases}x>0\\ x+2>0\end{cases}\Leftrightarrow\quad x>0.$$

Решим уравнение на ОДЗ. Заметим, что $\log_2 x=2\log_4 x$. Следовательно, уравнение равносильно

$$\underline{\log_4 x\cdot\log_3(x+2)}-\underline{2\log_4 x}+\underline{\log_3(x+2)}-\underline{\underline{2}}=0\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad\log_3(x+2)\cdot(\log_4 x+1)-2\cdot(\log_4 x+1)=0\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad(\log_3(x+2)-2)(\log_4 x+1)=0\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad\left[\begin{array}{l}\log_3(x+2)=2\\ \log_4 x=-1\end{array}\right.\Rightarrow\quad\left[\begin{array}{l}x=7\\ x=0,25\end{array}\right.$$

Оба корня подходят под ОДЗ.

Квадратные уравнения (на примере тригонометрических)

Если после преобразования уравнение приняло следующий вид:

$$af^2(x)+bf(x)+c=0,$$

где $a\neq 0$, $f(x)$ — одна из функций $\sin x,\cos x,\operatorname{tg}x,\operatorname{ctg}x$, то такое уравнение с помощью замены $f(x)=t$ сводится к квадратному уравнению.

Часто при решении таких уравнений используются основные тождества:

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$	$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$
$\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	$\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$	$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

формулы двойного угла:

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ $\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{2}\sin 2\alpha$	$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$
$\operatorname{tg}2\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$	$\operatorname{ctg}2\alpha=\dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$

Задача: Решите уравнение

$$6\cos^2 x-13\sin x-13=0.$$

Решение: С помощью формулы $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$ уравнение сводится к виду:

$$6\sin^2 x+13\sin x+7=0.$$

Сделаем замену $t=\sin x$.

Так как область значений синуса $\sin x\in[-1;1]$, то $t\in[-1;1]$. Получим уравнение:

$$6t^2+13t+7=0.$$

Корни данного уравнения $t_1=-\dfrac{7}{6}$, $t_2=-1$.

Таким образом, корень t_1 не подходит. Сделаем обратную замену:

$$\sin x=-1\Rightarrow x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,n\in\mathbb{Z}.$$

Кубические уравнения (на примере показательных)

Если после преобразования уравнение приняло следующий вид:

$$af^3(x)+bf^2(x)+cf(x)+d=0,$$

где $a\neq 0$, $f(x)$ — одна из функций $a^x,\log_a x,\sin x,\cos x,\operatorname{tg}x,\operatorname{ctg}x$, то такое уравнение с помощью замены $f(x)=t$ сводится к кубическому уравнению.

Часто при решении таких уравнений используются формулы:

$(a^x)^y=a^{xy}$	
$a^x\cdot a^y=a^{x+y}$	$a^x:a^y=a^{x-y}$
$\log_a x^{2n+1}=(2n+1)\log_a x$	$\log_a x^{2n}=2n\log_a\lvert x\rvert$
$\log_{a^{2n+1}}x=\frac{1}{2n+1}\log_a x$	$\log_{a^{2n}}x=\frac{1}{2n}\log_{\lvert a\rvert}x$

или

$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$	$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$

Задача: Решите уравнение

$$8^x-3\cdot 4^x-2^x+3=0.$$

Решение: Сделаем замену $t=2^x$, $t>0$. Тогда уравнение примет вид

$$t^3-3t^2-t+3=0\quad\Leftrightarrow\quad(t-3)(t^2-1)=0\quad\Leftrightarrow\quad t=\pm1;3$$

С учетом ограничения на t сделаем обратную замену:

$$\left[\begin{array}{l}2^x=1\\ 2^x=3\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow\quad x=0;\log_2 3.$$

Задача: Решите уравнение

$$11\cos 2x-3=3\sin 3x-11\sin x.$$

Решение: При помощи формул $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$ и $\cos 2x=1-2\sin^2 x$ можно свести уравнение к уравнению только с $\sin x$:

$12\sin^3 x-9\sin x+11\sin x-3+11-22\sin^2 x=0$. Сделаем замену $\sin x=t$, $t\in[-1;1]$:

$6t^3-11t^2+t+4=0$. Подбором находим, что один из корней равен $t_1=1$. Выполнив деление в столбик многочлена $6t^3-11t^2+t+4$ на $t-1$, получим:

$(t-1)(2t+1)(3t-4)=0\Rightarrow$ корнями являются

$t_1=1$, $t_2=-\dfrac{1}{2}$, $t_3=\dfrac{4}{3}$.

Таким образом, корень t_3 не подходит. Сделаем обратную замену:

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \sin x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,n\in\mathbb{Z}\\ x=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi n,n\in\mathbb{Z}\\ x=-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n,n\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

Однородные тригонометрические уравнения второй степени

$$I.\quad a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0,\quad a\neq 0, c\neq 0$$

Заметим, что в данном уравнении никогда не являются решениями те значения x, при которых $\cos x = 0$ или $\sin x = 0$. Действительно, если $\cos x = 0$, то, подставив вместо косинуса ноль в уравнение, получим: $a\sin^2 x = 0$, откуда следует, что и $\sin x = 0$. Но это противоречит основному тригонометрическому тождеству, так как оно говорит о том, что если $\cos x = 0$, то $\sin x = \pm 1$.
Аналогично и $\sin x = 0$ не является решением такого уравнения.
Значит, данное уравнение можно делить на $\cos^2 x$ или на $\sin^2 x$. Разделим, например, на $\cos^2 x$:

$$a\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + b\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x} + c\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$a\mathrm{tg}^2 x + b\mathrm{tg}\, x + c = 0$$

Таким образом, данное уравнение при помощи деления на $\cos^2 x$ и замены $t = \mathrm{tg}\, x$ сводится к квадратному уравнению
$at^2 + bt + c = 0$, способ решения которого вам известен.
Уравнения вида

$$I'.\quad a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d,\quad a\neq 0, c\neq 0$$

с легкостью сводятся к уравнению вида I с помощью использования основного тригонометрического тождества:

$$d = d\cdot 1 = d\cdot(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

Заметим, что благодаря формуле $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ однородное уравнение второй степени можно записать в виде

$$a\sin^2 x + b\sin 2x + c\cos^2 x = 0$$

Задача: Решите уравнение

$$2\sin^2 x + 3\sin x\cos x = 3\cos^2 x + 1.$$

Решение: Подставим вместо $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$ и получим:
$\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 4\cos^2 x = 0$. Разделим данное уравнение на $\cos^2 x$:
$\mathrm{tg}^2 x + 3\mathrm{tg}\, x - 4 = 0$ и сделаем замену $t = \mathrm{tg}\, x,\ t\in\mathbb{R}$. Уравнение примет вид:
$t^2 + 3t - 4 = 0$. Корнями являются $t_1 = -4,\ t_2 = 1$. Сделаем обратную замену:

$$\left[\begin{array}{l}\mathrm{tg}\, x = 1\\ \mathrm{tg}\, x = -4\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n, n\in\mathbb{Z}\\ x = -\mathrm{arctg}\, 4 + \pi n, n\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

Однородные тригонометрические уравнения первой степени

$$II.\quad a\sin x + b\cos x = 0, a\neq 0, b\neq 0$$

Заметим, что в данном уравнении никогда не являются решениями те значения x, при которых $\cos x = 0$ или $\sin x = 0$. Действительно, если $\cos x = 0$, то, подставив вместо косинуса ноль в уравнение, получим: $a\sin x = 0$, откуда следует, что и $\sin x = 0$. Но это противоречит основному тригонометрическому тождеству, так как оно говорит о том, что если $\cos x = 0$, то $\sin x = \pm 1$.
Аналогично и $\sin x = 0$ не является решением такого уравнения.
Значит, данное уравнение можно делить на $\cos x$ или на $\sin x$. Разделим, например, на $\cos x$:
$a\dfrac{\sin x}{\cos x} + b\dfrac{\cos x}{\cos x} = 0$, откуда имеем $a\mathrm{tg}\, x + b = 0 \Rightarrow \mathrm{tg}\, x = -\dfrac{b}{a}$
Задача: Решите уравнение

$$\sin x + \cos x = 0.$$

Решение: Разделим правую и левую части уравнения на $\sin x$:
$1 + \mathrm{ctg}\, x = 0 \Rightarrow \mathrm{ctg}\, x = -1 \Rightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n, n\in\mathbb{Z}$

Неоднородные тригонометрические уравнения первой степени

$$II.\quad a\sin x + b\cos x = c, a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0$$

Существует несколько способов решения подобных уравнений. Рассмотрим те из них, которые можно использовать для любого такого уравнения:
1 СПОСОБ: при помощи формул двойного угла для синуса и косинуса и основного тригонометрического тождества:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2},$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2},$$

$$c = c\cdot\left(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right)$$

данное уравнение сведется к уравнению I.
Задача: Решите уравнение

$$\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = -1.$$

Решение: Распишем $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, $-1 = -\sin^2 x - \cos^2 x$. Тогда уравнение примет вид:
$(1+\sqrt{3})\sin^2 x + 2\sin x\cos x + (1-\sqrt{3})\cos^2 x = 0$. Данное уравнение с помощью деления на $\cos^2 x$ и замены $\mathrm{tg}\, x = t$ сводится к:
$(1+\sqrt{3})t^2 + 2t + 1 - \sqrt{3} = 0$. Корнями этого уравнения являются
$t_1 = -1,\ t_2 = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2 - \sqrt{3}$.

Сделаем обратную замену:

$$\left[\begin{array}{l}\mathrm{tg}\, x = -1\\ \mathrm{tg}\, x = 2-\sqrt{3}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n\\ x = \mathrm{arctg}\,(2-\sqrt{3}) + \pi n\end{array}\right. \quad n\in\mathbb{Z}$$

2 СПОСОБ: при помощи формул выражения функций через тангенс половинного угла:

$\sin\alpha = \dfrac{2\mathrm{tg}\,\dfrac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$	$\cos\alpha = \dfrac{1-\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$

уравнение сведется к квадратному уравнению относительно $\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2}$.
Задача: Решите то же уравнение $\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = -1$.
Решение: Сделаем подстановку
$\sin 2x = \dfrac{2\mathrm{tg}\, x}{1+\mathrm{tg}^2 x}$, $\cos 2x = \dfrac{1-\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x}$ и замену $\mathrm{tg}\, x = t$:

$$\frac{(\sqrt{3}+1)t^2 + 2t + 1 - \sqrt{3}}{1+t^2} = 0 \Rightarrow (\sqrt{3}+1)t^2 + 2t + 1 - \sqrt{3} = 0$$

(так как $1 + t^2 \geqslant 1$ при всех t, то есть всегда $\neq 0$)
Таким образом, мы получили то же уравнение, что в первом способе.
3 СПОСОБ: при помощи формулы вспомогательного угла.

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(x+\phi),\quad \text{где}\ \cos\phi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Для использования данной формулы нам понадобятся формулы сложения углов:

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta \pm \sin\beta\cdot\cos\alpha\\ \cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta \mp \sin\alpha\cdot\sin\beta\end{array}}$$

Задача: Решите то же уравнение $\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = -1$
Решение: Так как мы решаем уравнение, то можно не преобразовывать левую часть, а просто разделить обе части уравнения на $\sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$:
$\dfrac{1}{2}\sin 2x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x = -\dfrac{1}{2}$
Заметим, что числа $\dfrac{1}{2}$ и $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ получились табличные. Можно, например, взять $\dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sin\dfrac{\pi}{3}$. Тогда уравнение примет вид:

$$\sin 2x\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\cos 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

Решениями данного уравнения являются:

$$\left[\begin{array}{l}2x - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n\\ 2x - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{12} + \pi n\\ x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n\end{array}\right. \quad n\in\mathbb{Z}$$