Теория по производной для №8 из ЕГЭ от «Школково»

Содержание

1 Базовые определения

1.1 Что такое функция?

Возьмем две неизвестные: x и y. *Функция* — это некоторая зависимость $y = y(x)$ переменной y от переменной x, при которой каждому значению x соответствует не более одного значения y.

Уже известные вам функции: $y = x$, $y = x^2$, $y = \sin x$, $y = \sqrt{x}$, $y = \ln x$ и так далее.

Переменная x называется *независимой переменной* или *аргументом функции*.

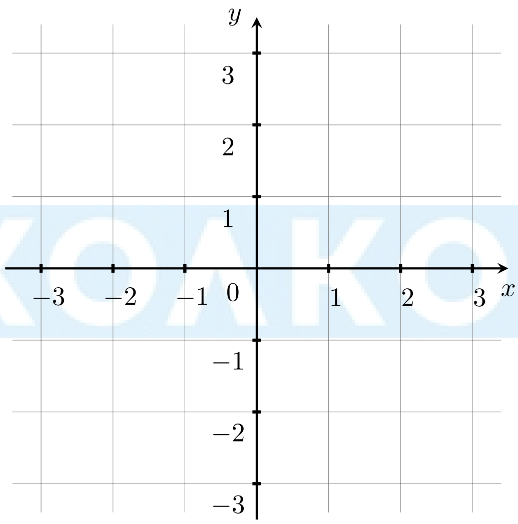
Переменная y называется *зависимой переменной* или *значением функции*.

Часто функции обозначают буквами f, g, h и тому подобными.

Например, $f(x)$ — функция, где $f(x) = \operatorname{tg}(x + 2)$.

1.2 Что такое график функции?

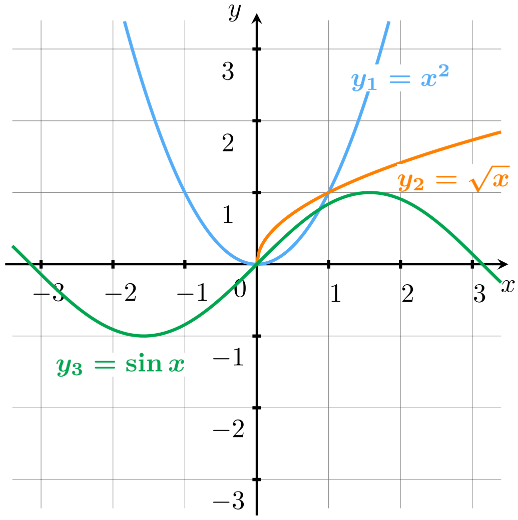
Графиком функции $y = f(x)$ называется множество всех точек $(x; y)$, координаты которых связаны соотношением $y = f(x)$. Каждая функция имеет свой график. Будем изображать графики в прямоугольной декартовой системе координат, состоящей из двух взаимно перпендикулярных прямых, имеющих направление, начало отсчета и единичный отрезок:



Горизонтальную ось называют *осью абсцисс* и обозначают Ox.

Вертикальную ось называют *осью ординат* и обозначают Oy.

Вот графики уже изученных вами функций, например, $y_1 = x^2$, $y_2 = \sqrt{x}$, $y_3 = \sin x$:

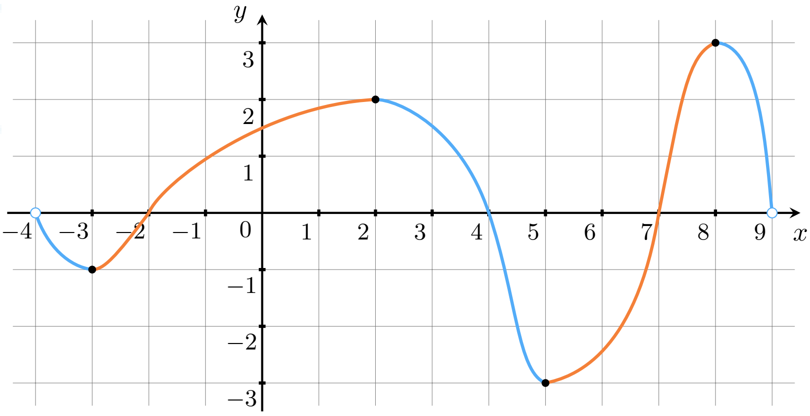


1.3 Возрастающие и убывающие функции

Функция $f(x)$ на промежутке X является *возрастающей,* если при увеличении x из этого промежутка $f(x)$ также увеличивается, то есть если мы будем идти по графику слева направо, то мы будет «подниматься».

Функция $f(x)$ на промежутке X является *убывающей,* если при увеличении x из этого промежутка $f(x)$ наоборот уменьшается, то есть если мы будем идти по графику слева направо, то мы будем «спускаться».

Рассмотрим график некоторой функции,определенной на интервале $(-4;9)$:

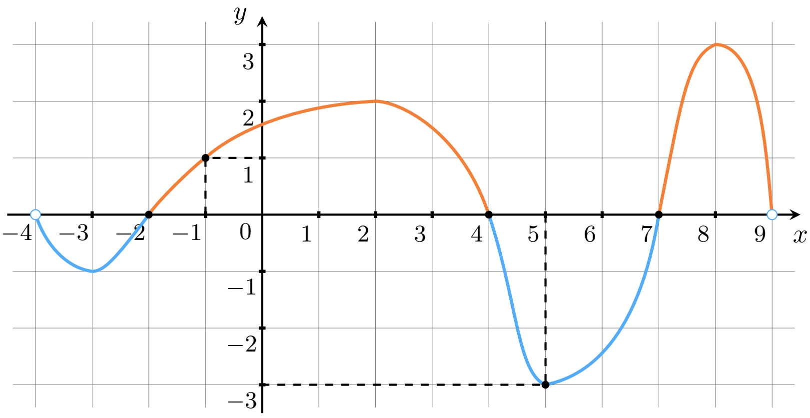


На промежутках $[-3;2]$ и $[5;8]$ функция возрастает (оранжевые части графика), а на промежутках $(-4;-3]$, $[2;5]$ и $[8;9)$ функция убывает (голубые части графика).

Если на некотором промежутке функция только возрастает или только убывает, то говорят, что функция *монотонна* на этом промежутке.

1.4 Как по графику определить, где функция положительна/отрицательна?

Часть графика, находящаяся выше оси абсцисс, соответствует положительным значениям функции (отмечено оранжевым цветом); часть графика, находящаяся ниже оси абсцисс, соответствует отрицательным значениям функции (отмечено голубым цветом).



Это значит, что если взять любую точку на оранжевой части графика и она будет иметь координаты $(x;y)$, то координата $y>0$ (иначе говоря, $f(x)>0$). Например, при $x=-1$ значение $f(-1)=1>0$.

А вот для любой точки на голубой части графика $y<0$. Например, при $x=5$ значение $f(5)=-3$.

Определение Значения аргумента, при которых функция равна нулю, называется *нулями функции.* Это абсциссы точек пересечения графика функции с осью Ox. На предыдущем рисунке нули функции — это точки $-2;4;7$.

2 Аналитический смысл производной

2.1 Определения и свойства

Производная функции $f(x)$ — это тоже некоторая функция, обозначаемая как $f'(x)$, которая определенным образом характеризует функцию $f(x)$. Как именно производная характеризует функцию и как ее находить, мы разберем дальше.

Если взять любое x_0 из области определения функции $f(x)$ и подставить в производную $f'(x)$, то мы получим некоторое конкретное число $f'(x_0)$, равное значению производной в точке x_0.

Следует также сказать, что не у любой функции есть производная и не в любой точке x_0 производная существует. Далее мы будем рассматривать только такие функции, которые имеют производную во всех точках области определения.

Что мы можем понять о функции $f(x)$, зная ее производную или зная, как выглядит график ее производной?

1) Если производная $f'(x)$ функции $f(x)$ положительна на промежутке $(a;b)$, то функция $f(x)$ на этом промежутке возрастает.

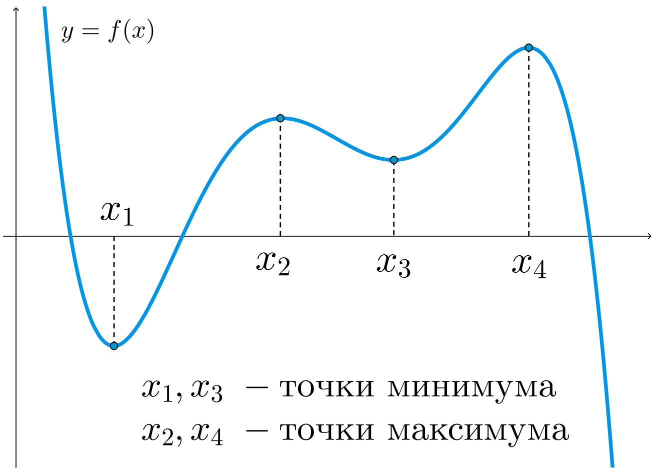
2) Если производная $f'(x)$ функции $f(x)$ отрицательна на промежутке $(a;b)$, то функция $f(x)$ на этом промежутке убывает.

Для остальных свойств нам понадобится ввести еще несколько определений.

Определение Точка x_0 называется *точкой экстремума* функции $f(x)$, если в некоторой её окрестности, которая не включает в себя саму точку x_0, выполняется либо неравенство $f(x_0) > f(x)$ (тогда точка называется *точкой максимума*), либо $f(x_0) < f(x)$ (тогда точка называется *точкой минимума*).

Рассмотрим условия, при которых точка является точкой экстремума. Если в точке x_0 функция меняется с возрастающей на убывающую или наоборот, то точка x_0 является точкой экстремума. Причем точки, в которых при проходе слева направо функция меняет свой характер монотонности с возрастания на убывание, являются точками максимума (x_{max}), а точки, в которых — с убывания на возрастание, являются точками минимума (x_{min}).

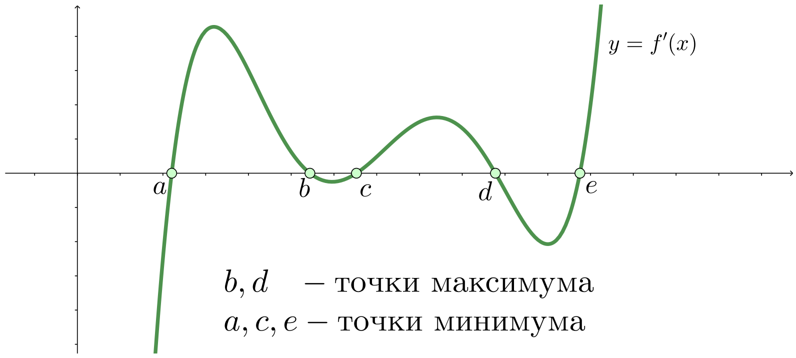
Вот как на графике функции $f(x)$ выглядят точки экстремума:



Теперь давайте подумаем. Если в точке максимума функция меняется с возрастающей на убывающую, то, учитывая свойства 1) и 2), производная, проходя через эту точку, меняется с положительной на отрицательную. Значит, в точке максимума x_{max} производная равна нулю.

Аналогично в точке минимума x_{min} производная равна нулю, но меняет свои значения уже с отрицательных на положительные (если смотреть слева направо).

Вот как на графике производной $f'(x)$ выглядят точки экстремума функции $f(x)$:



Таким образом, получаем еще два свойства:

3) Если производная $f'(x)$ в точке x_0 равна нулю и меняет свой знак с «+» на «−» (то есть график пересекает ось абсцисс «сверху вниз»), если смотреть слева направо, то точка x_0 — точка максимума функции $f(x)$.

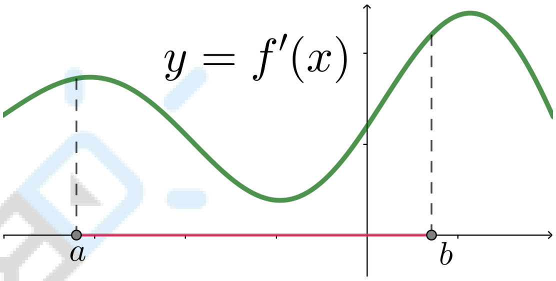
4) Если производная $f'(x)$ в точке x_0 равна нулю и меняет свой знак с «−» на «+» (то есть график пересекает ось абсцисс «снизу вверх»), если смотреть слева направо, то точка x_0 — точка минимума функции $f(x)$.

Обобщая все вышесказанное, отметим важные пункты, на которые стоит обратить внимание.

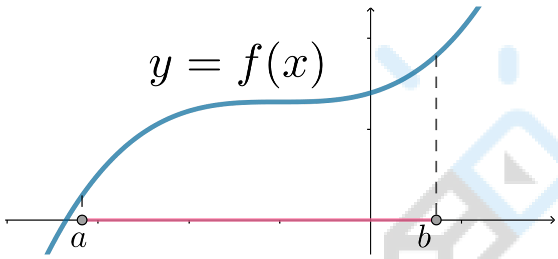
- Если при решении задач вам дан график, **обязательно обратите внимание на то, график чего вам дан: функции $f(x)$ или ее производной $f'(x)$**!
- При работе с производной мы обращаем внимание только на то, **где производная $f'(x)$ положительна, отрицательна и равна нулю.**
- При работе с самой функцией мы обращаем внимание на то, **где функция $f(x)$ возрастает, убывает и где она имеет экстремум.**
- Во фразе «производная функции $f(x)$» речь идет о производной.

2.2 Краткий справочник

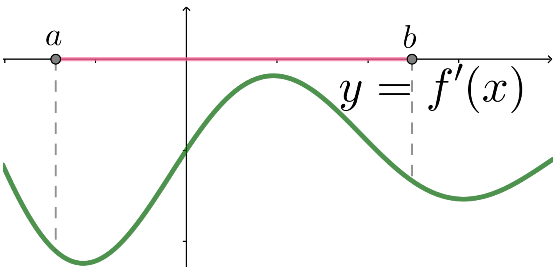
Если производная положительна на промежутке $(a;b)$



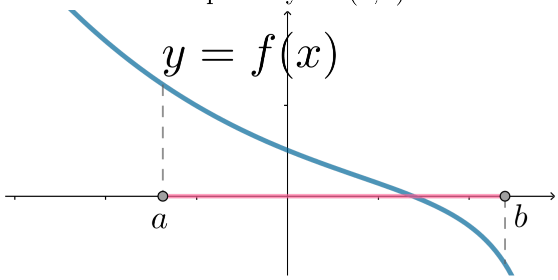
То функция возрастает на промежутке $(a;b)$



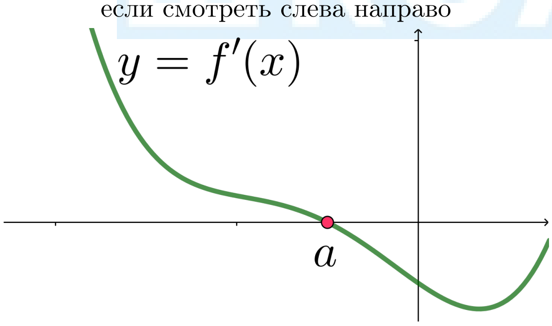
Если производная отрицательна на промежутке $(a;b)$



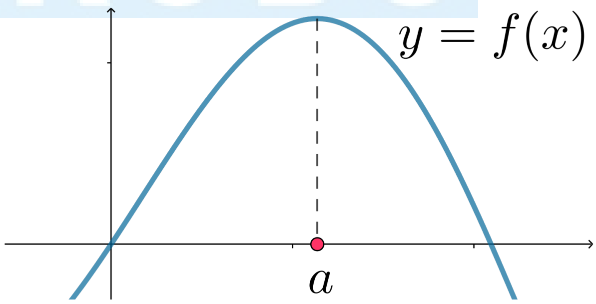
То функция убывает на промежутке $(a;b)$



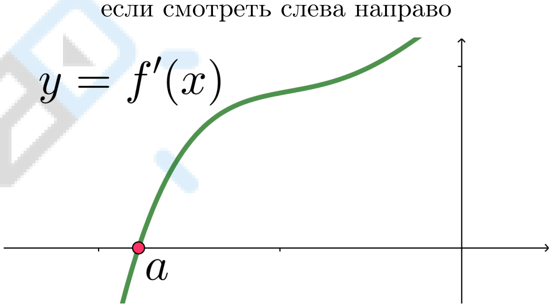
Если производная равна нулю в точке $x = a$, причем меняет знак с «плюса» на «минус», если смотреть слева направо



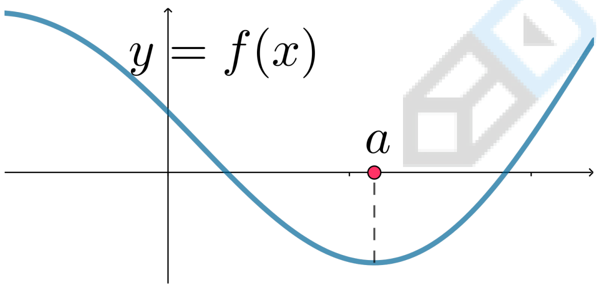
То точка $x = a$ является точкой максимума функции



Если производная равна нулю в точке $x = a$, причем меняет знак с «минуса» на «плюс», если смотреть слева направо



То точка $x = a$ является точкой минимума функции

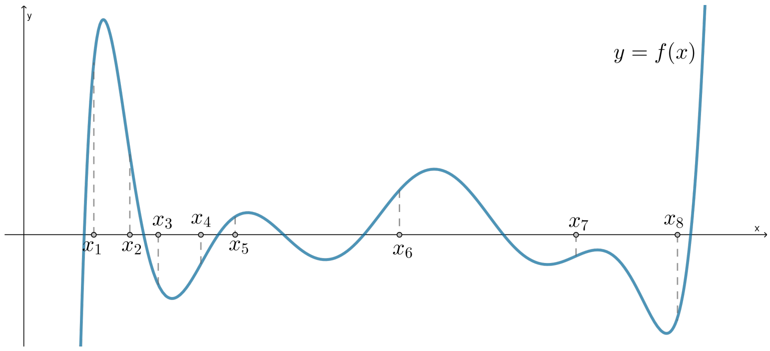


Все эти свойства верны и в обратную сторону.

2.3 Задачи №8 формата ЕГЭ

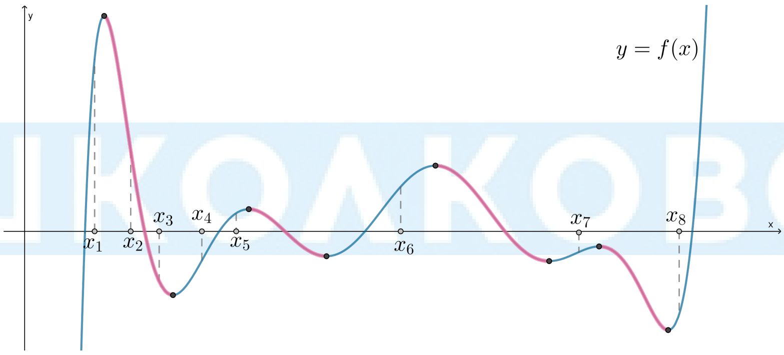
Пример 1

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены восемь точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



Решение

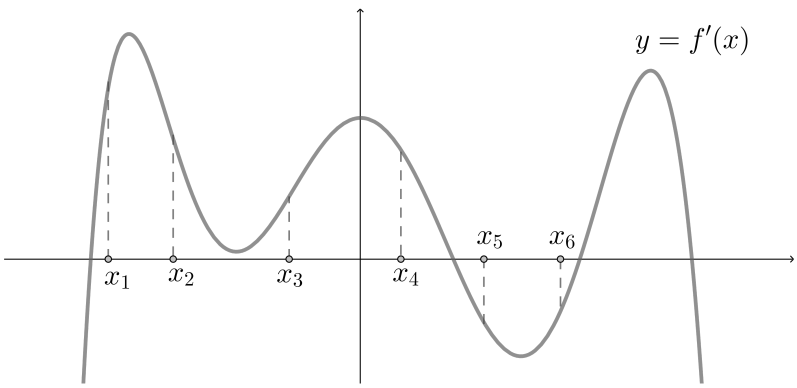
Так как на рисунке изображен график самой функции, то из рисунка мы можем извлечь следующую информацию: где функция возрастает, убывает или имеет экстремум. Нам нужно найти точки, в которых производная отрицательна, то есть функция убывает. Отметим на рисунке промежутки, на которых функция убывает:



Таким образом, мы видим, что в эти промежутки попадают только две точки: x_2 и x_3. Следовательно, ответ: 2.

Пример 2

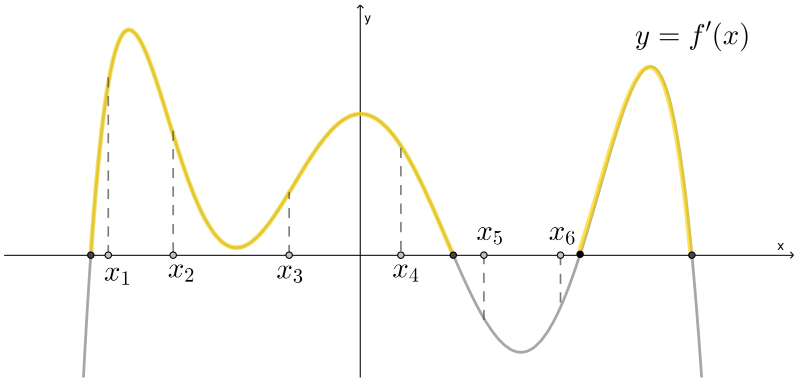
На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечены шесть точек x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6. Сколько из этих точек лежит на промежутках возрастания функции $f(x)$?



Решение

Так как на рисунке изображен график производной, то из рисунка мы можем определить, где производная положительна, отрицательна или равна нулю.

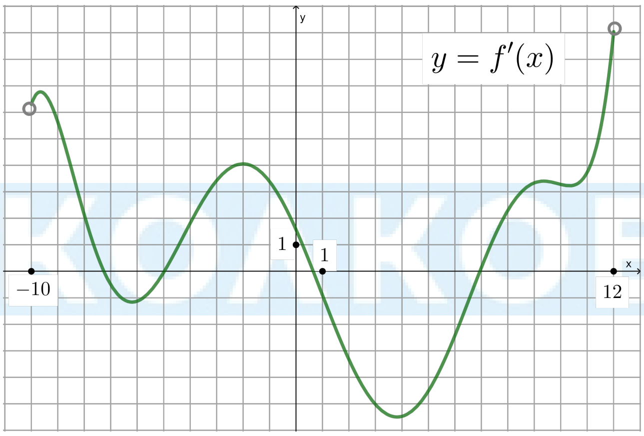
Если производная положительна на промежутке, то функция на этом промежутке возрастает. Следовательно, отметим те части графика, где производная положительна (это части графика, находящиеся выше оси абсцисс):



На отмеченные части графика попадают четыре точки. Следовательно, ответ: 4.

Пример 3

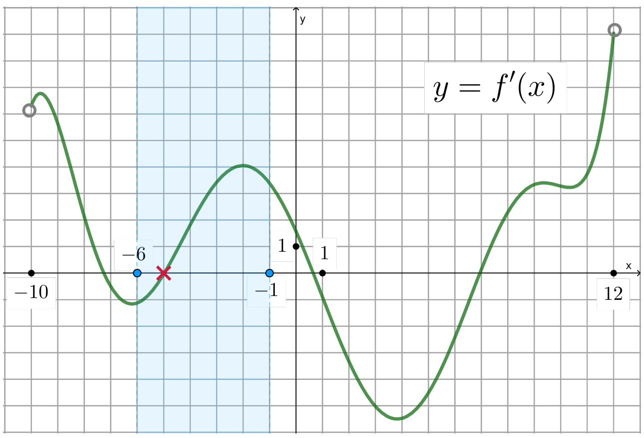
На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-10; 12)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-6; -1]$.



Решение

Так как на рисунке изображена производная, то мы можем определить, где производная положительна, отрицательна или равна нулю.

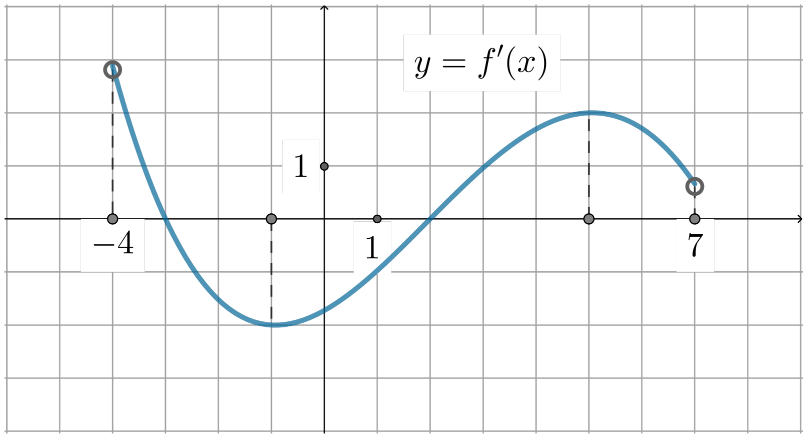
Нам нужно найти точку экстремума функции, следовательно, по графику производной нам нужно найти, где производная равна нулю. Отметим границы отрезка $[-6; -1]$, на котором нам нужно найти ноль производной (то есть точку пересечения графика с осью абсцисс):



Таким образом, мы видим, что в этой области один нуль производной — это $x = -5$. Ответ: -5.

Пример 4

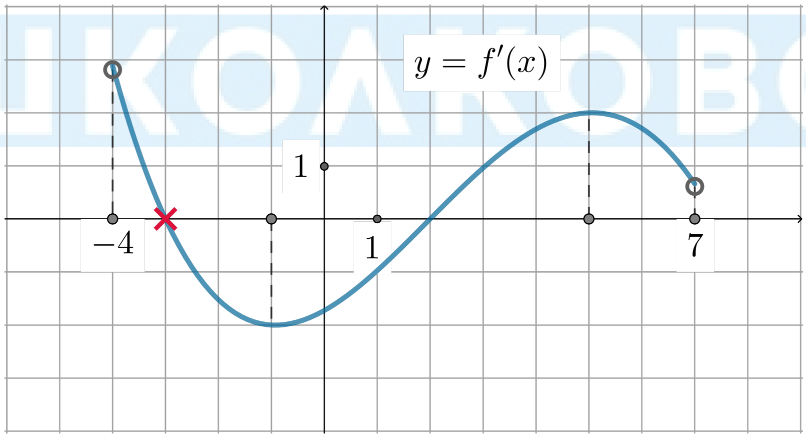
На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-4; 7)$. Найдите точку максимума функции $f(x)$.



Решение

Так как на рисунке изображена производная, то мы можем определить, где производная положительна, отрицательна или равна нулю.

Нам нужно найти точку максимума функции, следовательно, по графику производной нам нужно найти, где производная равна нулю, причем меняет свой знак с «плюса» на «минуса», если смотреть слева направо. Такая точка на графике одна — это $x = -3$. Следовательно, ответ: -3.

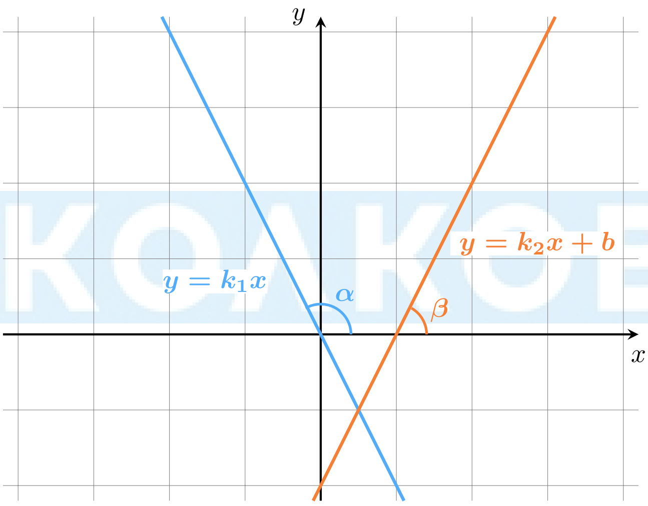


3 Геометрический смысл производной

3.1 Определения и свойства

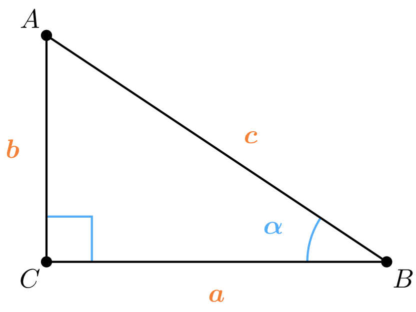
Перейдем к геометрическому смыслу производной. Для начала вспомним некоторые факты об уравнениях прямых.

- Линейная функция — функция вида $f(x) = kx + b$, где k, b — некоторые числа.
- Графиком линейной функции является прямая.
- Если $b = 0$, то прямая проходит через начало координат.
- Графиком $x = a$ является прямая, параллельная оси Oy.
- Графиком $y = b$ является прямая, параллельная оси Ox.
- Если две прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ параллельны, то $k_1 = k_2$.
- Для $f(x) = kx + b$ угловой коэффициент k равен тангенсу угла наклона прямой к положительному направлению оси Ox (сокращенно будем говорить «угол наклона»).



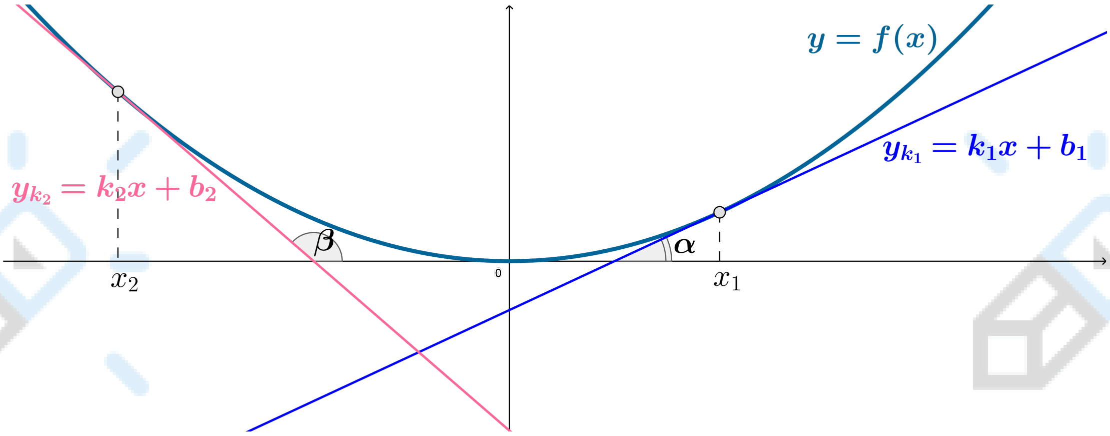
Таким образом, на картинке выше $k_1 = \operatorname{tg}\alpha$, $k_2 = \operatorname{tg}\beta$.

Напомним, что тангенс острого угла в прямоугольном треугольнике — это отношение противолежащего катета к прилежащему:



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$$

Итак, каков геометрический смысл производной? Если функция в точке x_0 имеет производную, то это значит, что в этой точке можно провести касательную к графику данной функции. Касательная — это некоторая прямая, которая касается графика функции в точке x_0, это выглядит так:



На чертеже изображены две различные касательные y_{k_1} и y_{k_2}, проведенные к графику функции $f(x)$ в точках x_1 и x_2.

Угол наклона касательной y_{k_1} равен α, угол наклона касательной y_{k_2} равен β.

Если нам известно уравнение $y = f(x)$ функции, то, выбрав точку x_0, в которой мы хотим провести касательную к графику этой функции, можно записать уравнение этой касательной:

$$y_k = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Если переписать уравнение касательной так, чтобы первое слагаемое было kx, то есть записать в виде $y_k = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$, то получим

$$\begin{cases} k = f'(x_0) \\ b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 \end{cases}$$

Таким образом, с одной стороны, угловой коэффициент k касательной, как и любой прямой, равен тангенсу угла наклона α. С другой стороны, если эта прямая касается графика функции $f(x)$ в точке x_0, то угловой коэффициент k также равен числу $f'(x_0)$. Тогда получаем

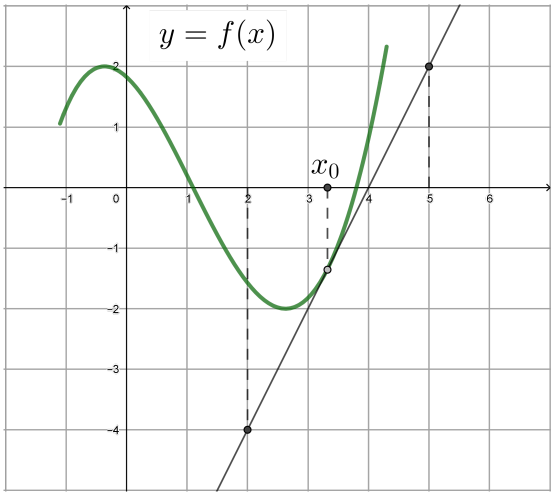
$$\operatorname{tg} \alpha = k = f'(x_0)$$

Таким образом, геометрический смысл производной заключается в следующем: если к графику функции $f(x)$ в некоторой точке x_0 проведена касательная, то значение производной в точке касания равно тангенс угла наклона касательной, то есть $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$.

3.2 Задачи №8 формата ЕГЭ

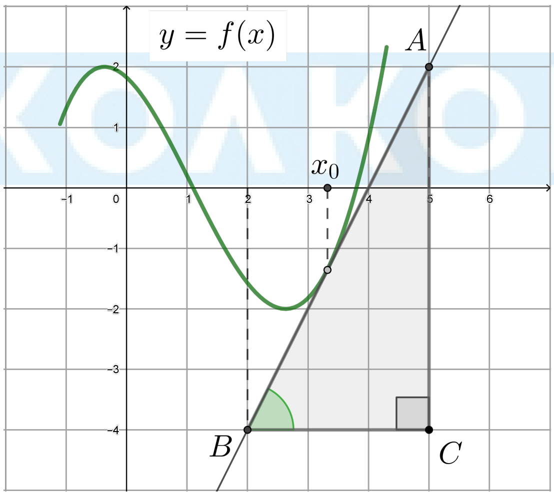
Пример 5

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Решение

Необходимо найти $f'(x_0)$.



Мы знаем, что если в точке x_0 к графику функции $f(x)$ проведена касательная, то $f'(x_0)$ равно тангенсу угла наклона касательной. Построим прямоугольный треугольник ABC, как показано на рисунке.

Тогда $BC \parallel Ox$ и угол наклона касательной к положительному направлению оси Ox равен углу ABC.

Тогда по определению тангенса острого угла в прямоугольном треугольнике имеем:

$$\operatorname{tg} \angle ABC = \frac{AC}{BC} = \frac{6}{3} = 2$$

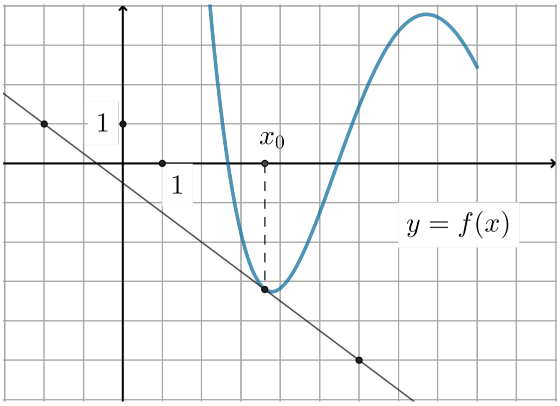
Значит,

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \angle ABC = 2.$$

Ответ: 2.

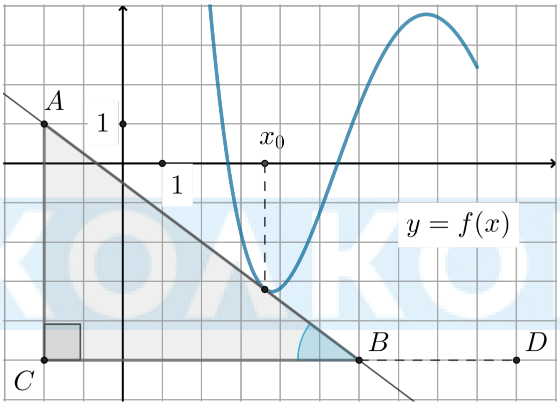
Пример 6

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Решение

Необходимо найти $f'(x_0)$.



Мы знаем, что если в точке x_0 к графику функции $f(x)$ проведена касательная, то $f'(x_0)$ равно тангенсу угла наклона касательной. Построим прямоугольный треугольник ABC, как показано на рисунке. Отрезок BC продлим за точку B и отметим на продолжении точку D. Тогда $\angle ABD$ равен углу наклона касательной к положительному направлению оси Ox.

Следовательно, нам нужно найти $\operatorname{tg}\angle ABD$.

Здесь нам понадобится следующая формула:

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$

Эта формула означает, что если у нас есть два угла, сумма которых равна 180°, то тангенсы этих углов противоположны.

Таким образом, мы можем найти $\operatorname{tg}\angle ABC$ и тогда $\operatorname{tg}\angle ABD = -\operatorname{tg}\angle ABC$.

По определению тангенса острого угла в прямоугольном треугольнике имеем:

$$\operatorname{tg}\angle ABC = \frac{AC}{BC} = \frac{6}{8} = 0{,}75$$

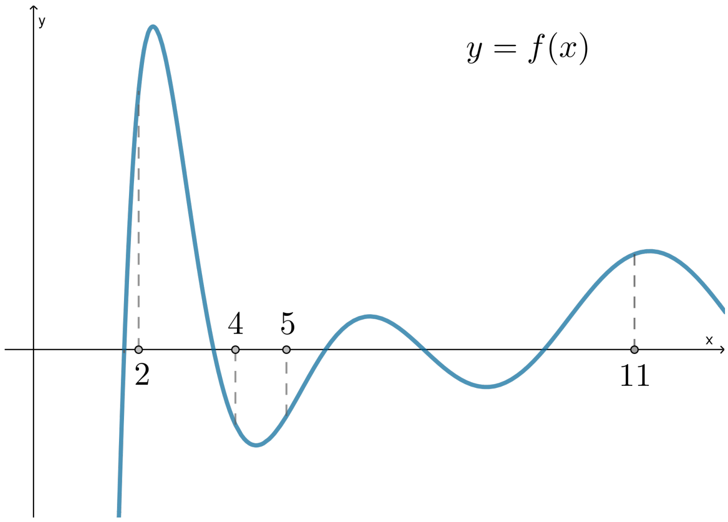
Значит,

$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\angle ABD = -\operatorname{tg}\angle ABC = -0{,}75.$$

Ответ: $-0{,}75$.

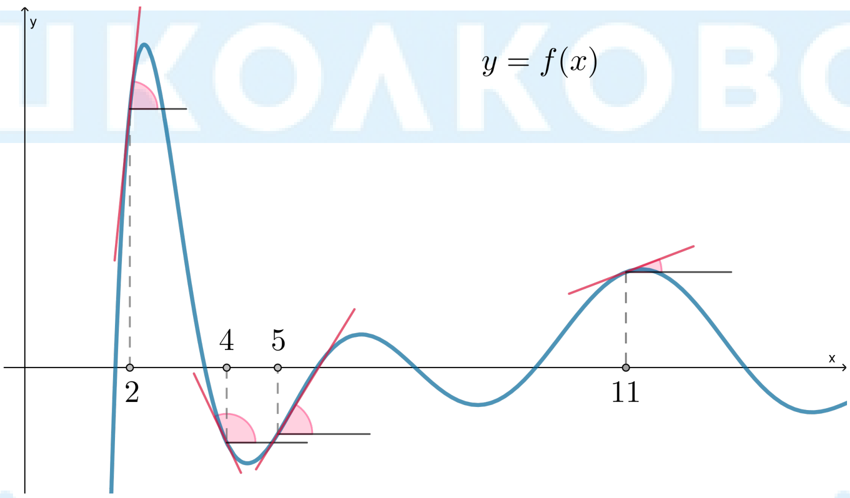
Пример 7

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки 2, 4, 5, 11. В какой из этих точек значение производной наибольшее?



Решение

Значение производной функции в точке x_0 равно тангенсу угла наклона касательной, проведенной к графику этой функции в точке x_0. Тогда нарисуем касательные к графику функции, проведенные в точках $x_0 = 2; 4; 5; 11$ и отметим углы, равные углам наклона этих касательных к положительному направлению оси Ox :



Так как $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$ и нам нужно найти наибольшее значение $f'(x_0)$, то найдем наибольшее значение $\operatorname{tg} \alpha$.

Мы знаем, что у острых углов тангенс положительный, у тупых — отрицательный. Следовательно, так как мы ищем наибольшее значение тангенса, то нам нужно исследовать только острые углы. Это углы в точках 2, 5 и 11.

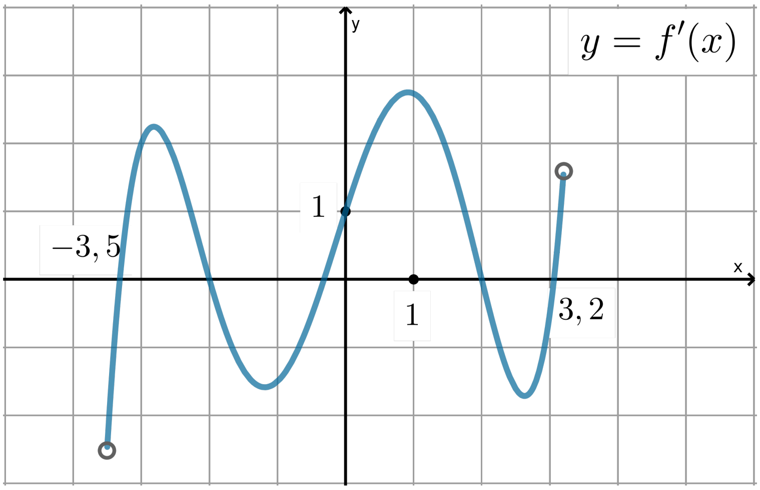
Так как **для углов от 0° до 90° верно, что чем больше угол, тем больше его тангенс**, то наибольший тангенс будет у угла в точке 2.

Для углов от 90° до 180° также верно, что чем больше угол, тем больше его тангенс.

Ответ: 2.

Пример 8

На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-3{,}5; 3{,}2)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = -x - 9$ или совпадает с ней.

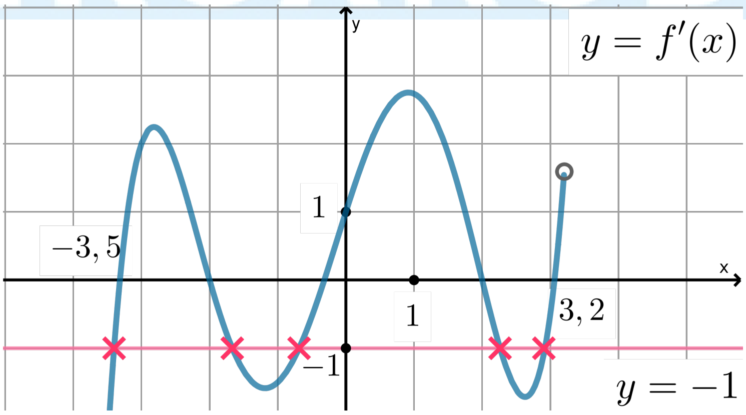


Решение

Пусть x_0 — точка, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = -x - 9$ или совпадает с ней. Тогда, с одной стороны, уравнение этой касательной выглядит так: $y_k = f'(x_0)x + b$. С другой стороны, так как y_k параллельна или совпадает с $y = -x - 9$, то их угловые коэффициенты равны, то есть $f'(x_0) = -1$.

Следовательно, нам нужно найти количество x_0, в которых $f'(x_0) = -1$.

На рисунке как раз изображен график производной, поэтому найдем количество точек на графике, у которых ордината равна -1. Для этого проведем прямую $y = -1$:



Отсюда мы видим, что график имеет пять точек, у которых $y = -1$.

Ответ: 5.

4 Физический смысл производной

Если положение точки при ее движении по прямой задается функцией $x = x(t)$, где t — время движения, а x — расстояние от движущейся точки до точки $x = 0$, то производная функции x — это функция скорости, то есть

$$x'(t) = v(t).$$

Вторая производная функции x (или первая производная функции v) — это функция ускорения, то есть

$$x''(t) = v'(t) = a(t).$$

Пример 9

Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = 7t^2 - 12t.$$

Здесь x — расстояние от точки $x = 0$ в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите ее скорость в момент времени $t = 1$ с. Ответ дайте в метрах в секунду.

Решение

Скорость материальной точки, прямолинейно движущейся по закону $x(t)$, в момент времени t_0 равна $x'(t_0)$. Найдем производную закона движения:

$$v(t) = x'(t) = 14t - 12$$

Тогда в момент $t = 1$ с скорость точки в метрах в секунду равна

$$v(1) = x'(1) = 14 \cdot 1 - 12 = 2$$

Ответ: 2.

Пример 10

Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = 3t^2 + 6t + 2,$$

где x — расстояние от точки $x = 0$ в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени её скорость составляла 15 м/с? Ответ дайте в секундах.

Решение

Скорость материальной точки, прямолинейно движущейся по закону $x(t)$, в момент времени t_0 равна $x'(t_0)$. Найдем производную закона движения:

$$v(t) = x'(t) = 6t + 6$$

Тогда для момента t, когда скорость материальной точки была равна 15 м/с, выполнено равенство

$$6t + 6 = 15 \quad \Leftrightarrow \quad t = 1{,}5$$

Ответ: 1,5.

Пример 11

Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = 12t^3 - 5t^2 - t + 2,$$

где x — расстояние от точки $x = 0$ в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите её ускорение в момент $t = 1$ с. Ответ дайте в метрах в секунду в квадрате.

Решение

Ускорение материальной точки, прямолинейно движущейся по закону $x(t)$, в момент времени t_0 равно второй производной от скорости, то есть равно $x''(t_0)$.

Найдем производную закона движения:

$$v(t) = x'(t) = 36t^2 - 10t - 1$$

Тогда производная от скорости равна

$$a(t) = x''(t) = (x'(t))' = \left(36t^2 - 10t - 1\right)' = 72t - 10$$

В момент $t = 1$ с ускорение в метрах в секунду в квадрате равно

$$x''(1) = 72 \cdot 1 - 10 = 62$$

Ответ: 62.