Теория по №6

Содержание

1 Базовые определения, связанные с понятием функции

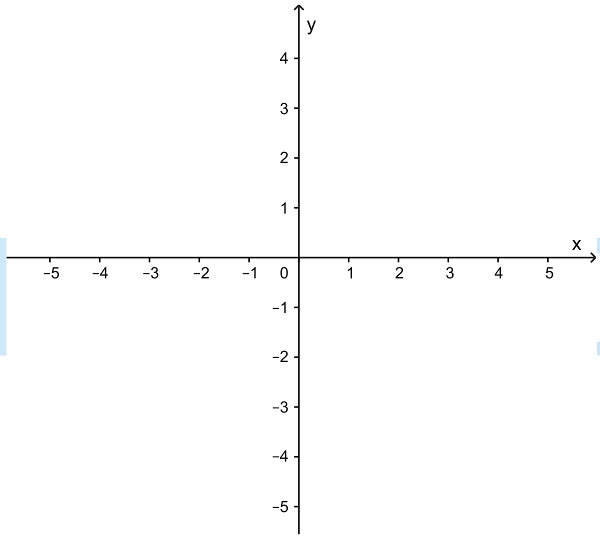
Напомним некоторые определения, необходимые для данной темы.

1.1 Что же такое функция?

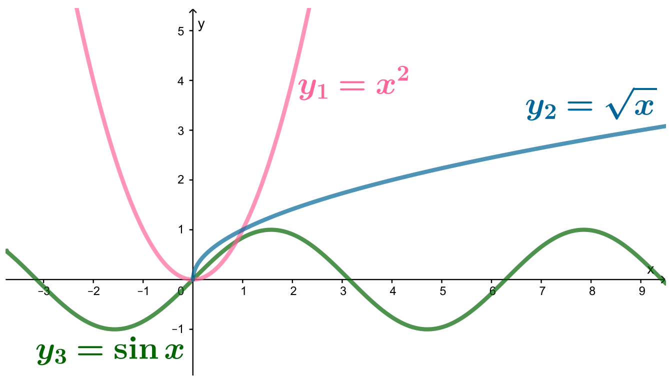
Возьмем две неизвестные: x и y. Функция – это некоторая зависимость $y = y(x)$ переменной y от переменной x, при которой каждому значению x соответствует не более одного значения y.
Уже известные вам функции: $y = x$; $y = x^2$; $y = \sin x$; $y = \sqrt{x}$; $y = \ln x$ и т.д.
Переменная x тогда называется **независимой переменной**, или **аргументом** функции. Переменная y называется **зависимой переменной**, или **значением** функции.
Часто функции обозначают буквами f, g, h и т.п.
Например, $y = f(x)$ – функция, где $f(x) = \operatorname{tg}(x + 2)$.

1.2 Что такое график функции?

Каждая функция имеет свой график. В школьной программе графики изображают в прямоугольной декартовой системе координат, состоящей из двух взаимно перпендикулярных прямых, имеющих направление:

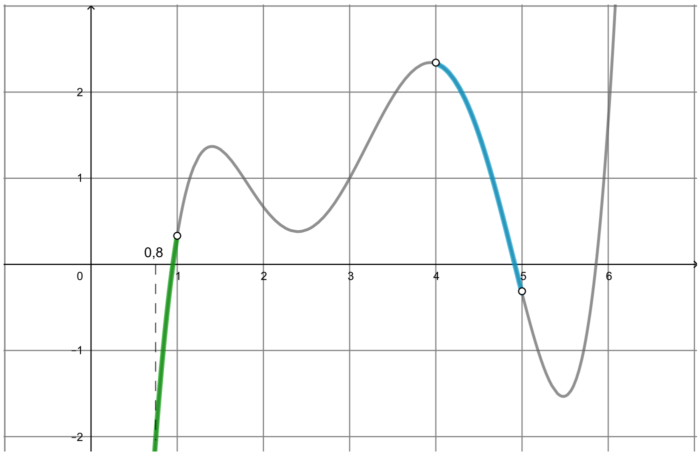


Горизонтальную ось, ось x, называют **осью абсцисс** и обозначают Ox.
Вертикальную ось, ось y, называют **осью ординат** и обозначают Oy.
Вот графики уже изученных вами функций, например, $y_1 = x^2$, $y_2 = \sqrt{x}$, $y_3 = \sin x$:



1.3 Возрастающие и убывающие функции

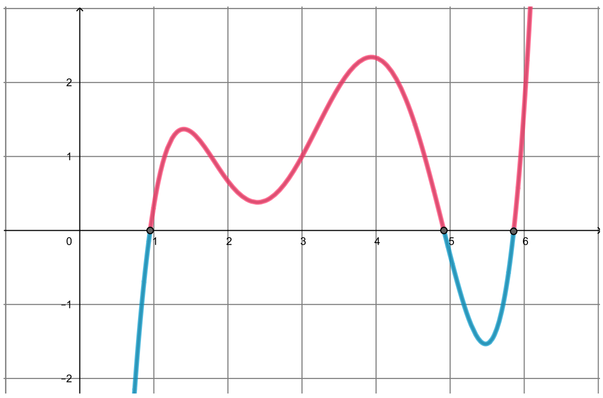
Функция на промежутке (a, b) является возрастающей, если при увеличении x из этого промежутка $f(x)$ также увеличивается.
Функция на промежутке (a, b) является убывающей, если при увеличении x из этого промежутка $f(x)$ наоборот уменьшается.
Рассмотрим график некоторой функции:



Например, на промежутке $(0,8; 1)$ функция возрастает (зеленый кусок графика), а на промежутке $(4; 5)$ функция убывает (синий кусок графика).
Если на некотором промежутке функция только возрастает или только убывает, то говорят, что функция **монотонна** на этом промежутке.

1.4 Как по графику определить, где функция положительна/отрицательна?

Часть графика, находящаяся выше оси абсцисс, соответствует положительным значениям функции (отмечено красным цветом); часть графика, находящая ниже оси абсцисс, соответствует отрицательным значениям функции (отмечено голубым цветом):



Это значит, что если взять любую точку на красной части графика, и она будет иметь координаты $(x; y)$, то координата $y > 0$ (иначе говоря, $f(x) > 0$). Например, при $x = 3$ значение $f(3) = 1 > 0$.
А вот для любой точки на голубой части графика $y < 0$. Например, при $x = 5$ значение $f(5) \approx -0,3 < 0$.
(*Координаты обычно не вычисляются приблизительно, сейчас это было сделано лишь для того, чтобы наглядно показать вам, что при* $x = 5$ *значение функции отрицательное.*)

Определение Точки, в которых график функции $y = f(x)$ пересекает ось абсцисс, называются **нулями функции** (то есть это значения переменной x). Также нули функции можно найти, решив уравнение $f(x) = 0$. На предыдущем рисунке нули функции — это черные точки.

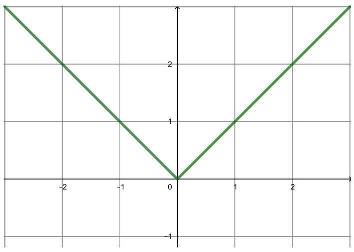
2 Аналитический смысл производной

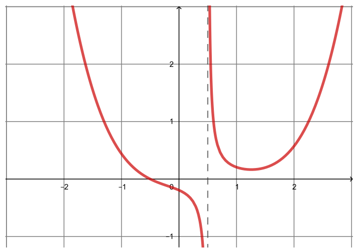
2.1 Определения и свойства

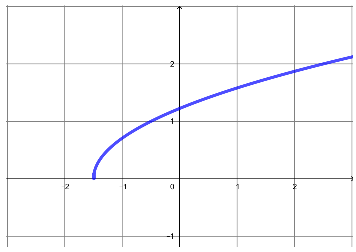
Производная функции $f(x)$ – это тоже некоторая функция, обозначаемая как $f'(x)$, которая определенным образом характеризует функцию $f(x)$. Как именно производная характеризует функцию и как ее находить, мы разберем дальше.

Если взять любое x_0 из области, на которой определена функция $f(x)$, и подставить в производную $f'(x)$, то мы получим некоторое конкретное число $f'(x_0)$, равное значению производной в точке x_0.

Следует также сказать, что не у любой функции есть производная, и не в любой точке x_0 производная существует. Давайте посмотрим на эти три графика.







Первая функция не имеет производную в точке $x = 0$, так как в этой точке ее график не "гладкий", а "острый". Такие точки называются точками излома графика.

Вторая функция не имеет производную в точке $x = 0,5$, потому что в этой точке функция имеет разрыв. Такие точки можно назвать точками разрыва функции.

Третья функция не имеет производную в точке $x = -1,5$, так как эта точка – граничная точка области, на которой функция определена. Такие точки можно назвать "концами" графика функции.

Во всех остальных точках, в которых определены данные функции, существуют производные этих функций. Таким образом, если график функции не имеет таких точек, про которые мы сказали вам выше, то функция имеет производную в любой точке. Функции, имеющие производную, называются **дифференцируемыми**. Далее мы будем рассматривать только функции, имеющие "хорошие" графики.

Что мы можем понять о функции $f(x)$, зная ее производную или зная, как выглядит график ее производной?

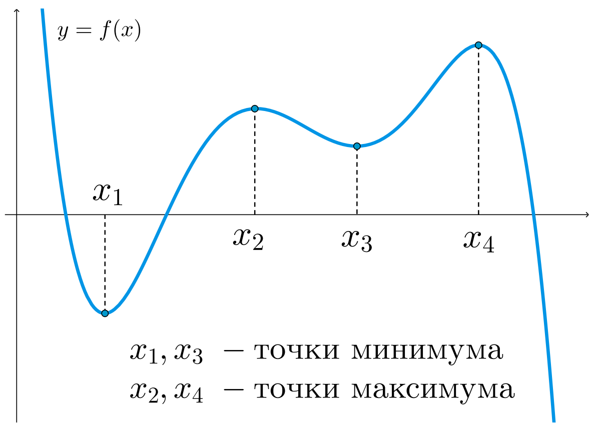
1) Если производная $f'(x)$ функции $f(x)$ положительна на промежутке $(a;b)$, то функция $f(x)$ на этом промежутке будет возрастать.

2) Если производная $f'(x)$ функции $f(x)$ отрицательна на промежутке $(a;b)$, то функция $f(x)$ на этом промежутке будет убывать.

Для остальных свойств нам понадобится ввести еще несколько определений.

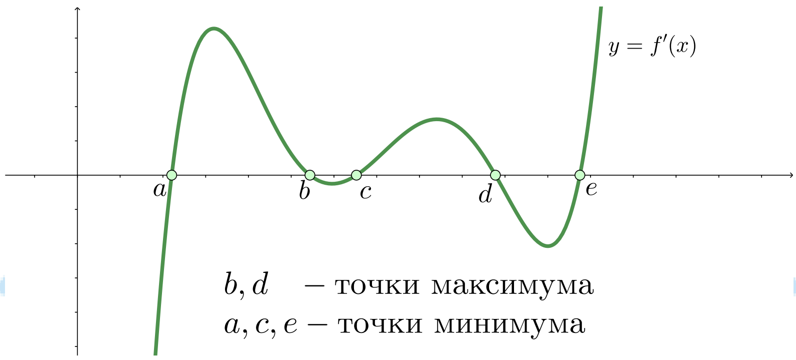
Точкой экстремума функции $f(x)$ называется точка x_0, в которой функция меняется с возрастающей на убывающую или наоборот. Причем точки, в которых функция меняет свой характер монотонности с возрастания на убывание, называются **точками максимума** (x_{max}), а точки, в которых – с убывания на возрастание, называются **точками минимума** (x_{min}).

На чертеже показано, как **на графике функции** $f(x)$ выглядят эти точки:



Теперь давайте подумаем. Если в точке максимума функция меняется с возрастающей на убывающую, то, учитывая свойства 1) и 2), производная, проходя через эту точку, меняется с положительной на отрицательную. Значит, в точке максимума x_{max} равна нулю.
Аналогично в точке минимума x_{min} производная равна нулю, но меняет свои значения уже с отрицательных на положительные (если смотреть слева направо).

Вот как **на графике производной** $f'(x)$ выглядят эти точки:



Таким образом, получаем еще два свойства:

3) Если производная $f'(x)$ в точке x_0 равна нулю и меняет свой знак с "+" на "–" (то есть график пересекает ось абсцисс "сверху вниз"), если смотреть слева направо, то точка x_0 – точка максимума функции $f(x)$.

4) Если производная $f'(x)$ в точке x_0 равна нулю и меняет свой знак с "–" на "+" (то есть график пересекает ось абсцисс "снизу вверх"), если смотреть слева направо, то точка x_0 – точка минимума функции $f(x)$.

Точки максимума и точки минимума являются точками экстремума функции.

Обобщая все вышесказанное, отметим важные пункты, на которые стоит обратить внимание:

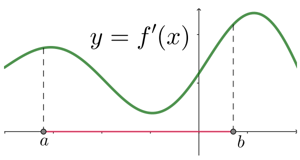
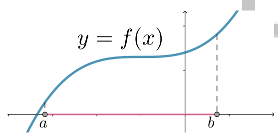
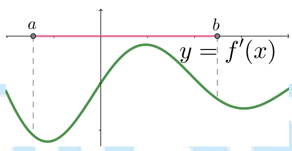
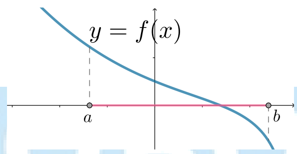
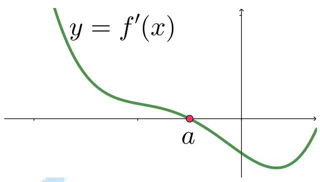
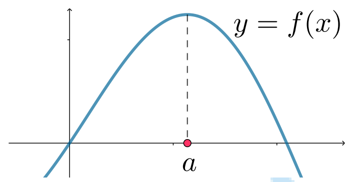
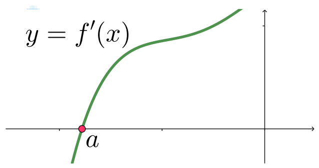
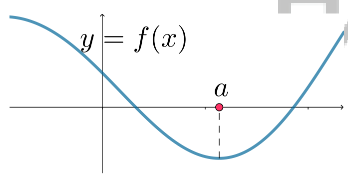
- Если при решении задач вам дан график, **обязательно обратите внимание на то, график чего вам дан: функции $f(x)$ или ее производной $f'(x)$**!

- При работе с производной мы обращаем внимание только на то, **где производная $f'(x)$ положительна, отрицательна или равна нулю.**

- При работе с самой функцией мы обращаем внимание на то, **где функция $f(x)$ возрастает, убывает или где она имеет экстремум.**

- Заметьте, что во фразе “производная функции $f(x)$” речь идет о производной.

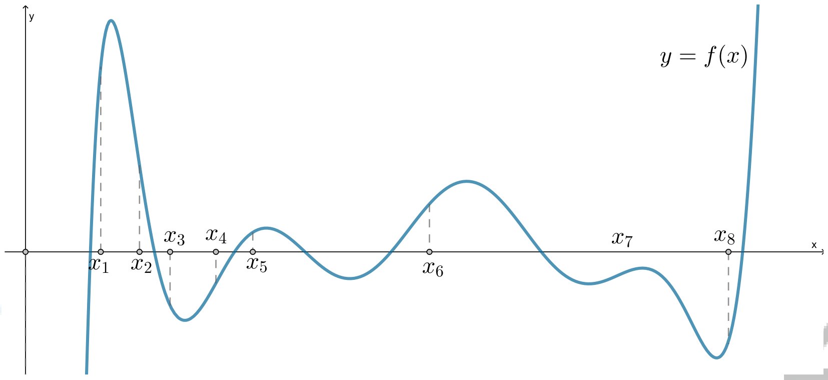
2.2 Краткий справочник

<table>
<tr>
<td>Если производная положительна
на промежутке $(a; b)$,
</td>
<td>то функция возрастает
на промежутке $(a; b)$
</td>
</tr>
<tr>
<td>Если производная отрицательна
на промежутке $(a; b)$,
</td>
<td>то функция убывает
на промежутке $(a; b)$
</td>
</tr>
<tr>
<td>Если производная равна нулю
в точке $x = a$, причем меняет
знак с “плюса” на “минус”,
если смотреть слева направо,
</td>
<td>то точка $x = a$ является
точкой максимума функции
</td>
</tr>
<tr>
<td>Если производная равна нулю
в точке $x = a$, причем меняет
знак с “минуса” на “плюс”,
если смотреть слева направо,
</td>
<td>то точка $x = a$ является
точкой минимума функции
</td>
</tr>
</table>

2.3 №6 формата ЕГЭ

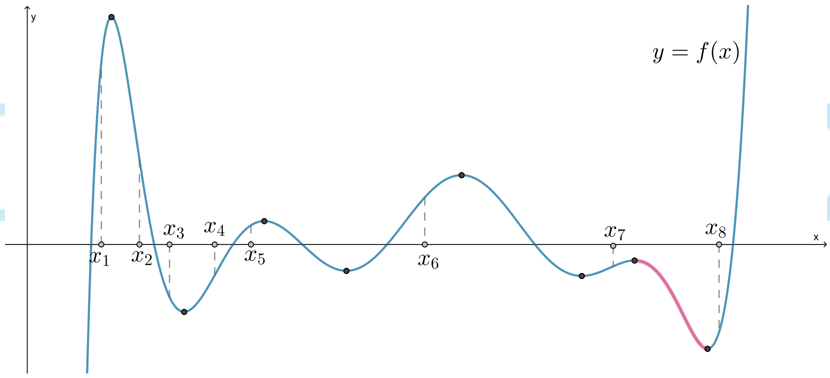
Пример 1

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены восемь точек x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



Решение

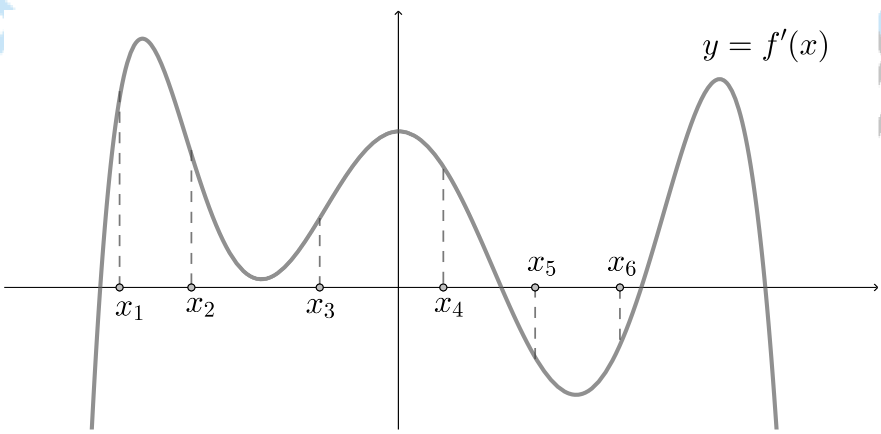
Так как на рисунке изображен график самой функции, то из рисунка мы можем извлечь следующую информацию: где функция возрастает, убывает или имеет экстремум. Нам нужно найти точки, в которых производная отрицательна, то есть функция убывает. Отметим на рисунке промежутки, на которых функция убывает:



Таким образом, мы видим, что в эти промежутки попадает только две точки. Следовательно, ответ: 2.

Пример 2

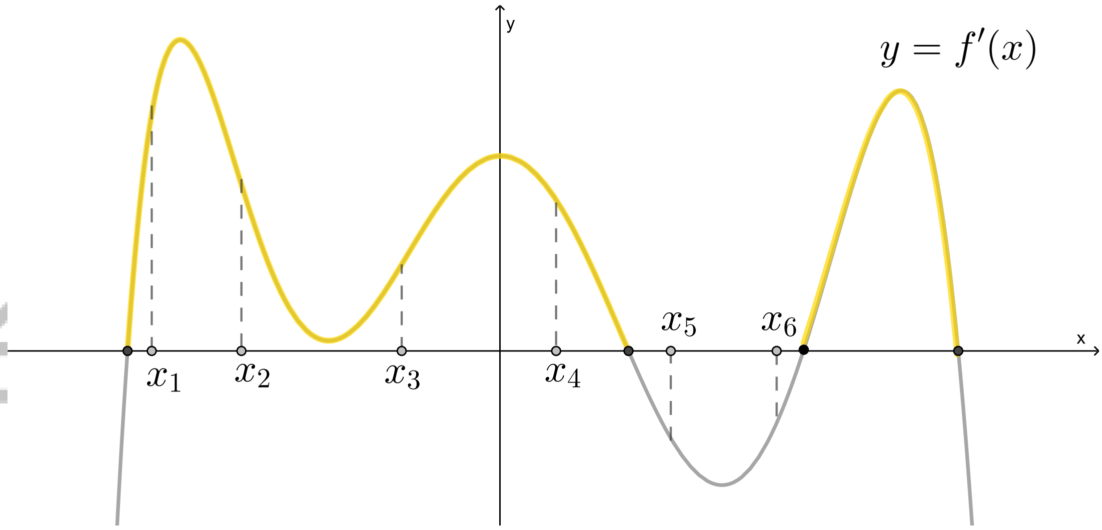
На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечены шесть точек x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6. Сколько из этих точек лежит на промежутках возрастания функции $f(x)$?



Решение

Так как на рисунке изображен график производной, то из рисунка мы можем определить, где производная положительна, отрицательна или равна нулю.

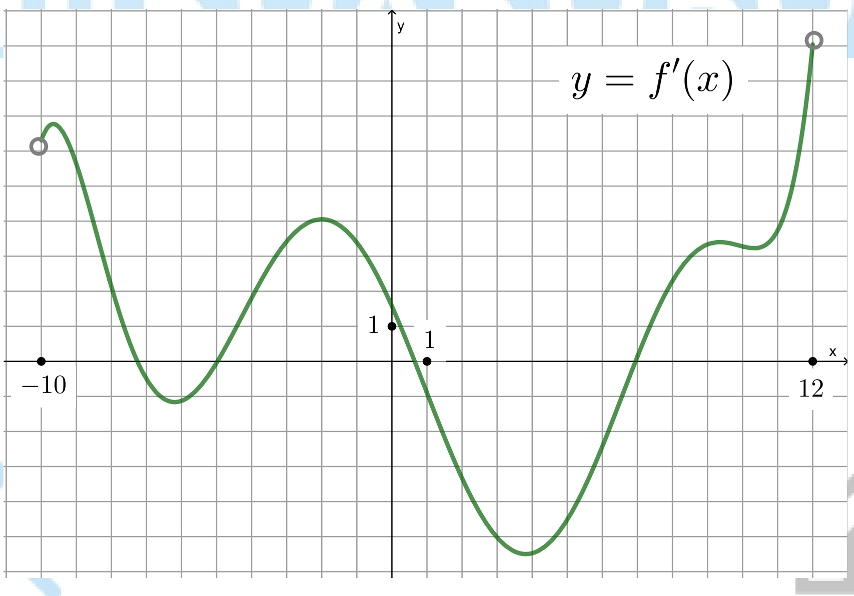
Если производная положительна на промежутке, то функция на этом промежутке возрастает. Следовательно, отметим те части графика, где производная положительна (это части графика, находящиеся выше оси абсцисс):



На отмеченные куски графика попадает четыре точки. Следовательно, ответ: 4.

Пример 3

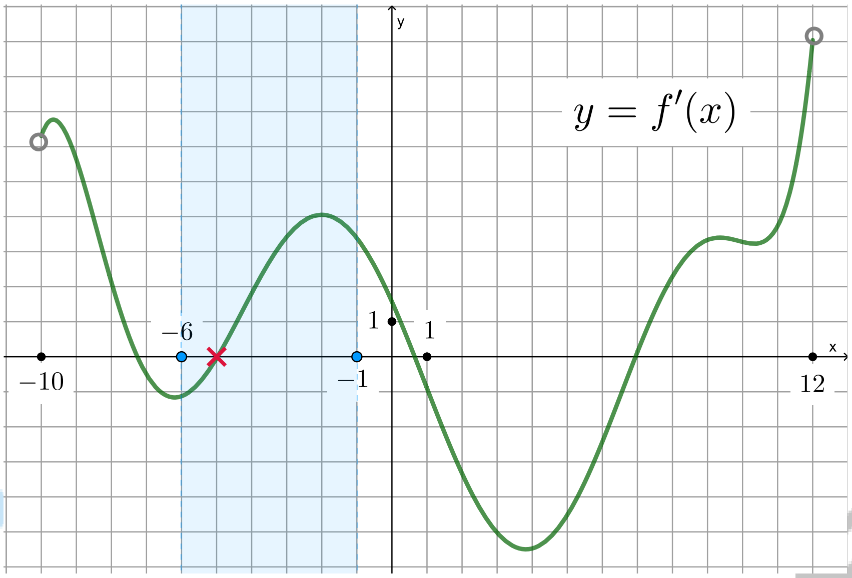
На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-10; 12)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-6; -1]$.



Решение

Так как на рисунке изображена производная, то мы можем определить, где производная положительна, отрицательна или равна нулю.

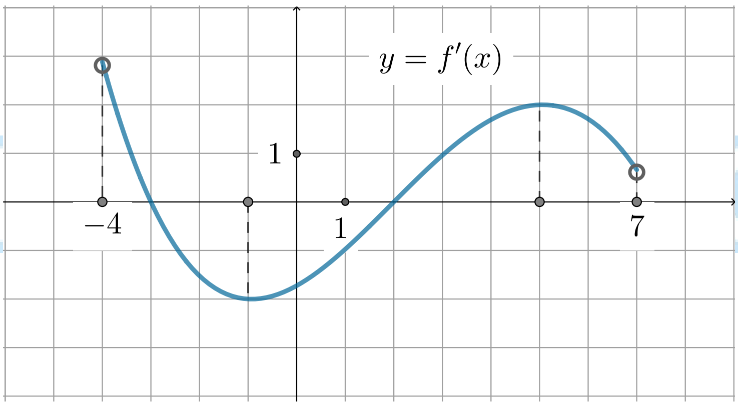
Нам нужно найти точку экстремума функции, следовательно, по графику производной нам нужно найти, где производная равна нулю. Отметим границы отрезка $[-6; -1]$, на котором нам нужно найти ноль производной (то есть точку пересечения графика с осью абсцисс):



Таким образом, мы видим, что в этой области один ноль – это $x = -5$.

Пример 4

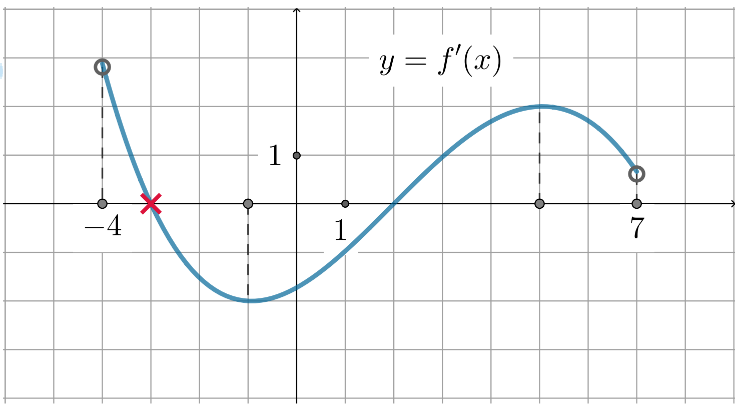
На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-4; 7)$. Найдите точку максимума функции $f(x)$.



Решение

Так как на рисунке изображена производная, то мы можем определить, где производная положительна, отрицательна или равна нулю.

Нам нужно найти точку максимума функции, следовательно, по графику производной нам нужно найти, где производная равна нулю, причем меняет свой знак с "плюса" на "минуса", если смотреть слева направо. Такая точка на графике одна – $x = -3$. Следовательно, ответ: -3.

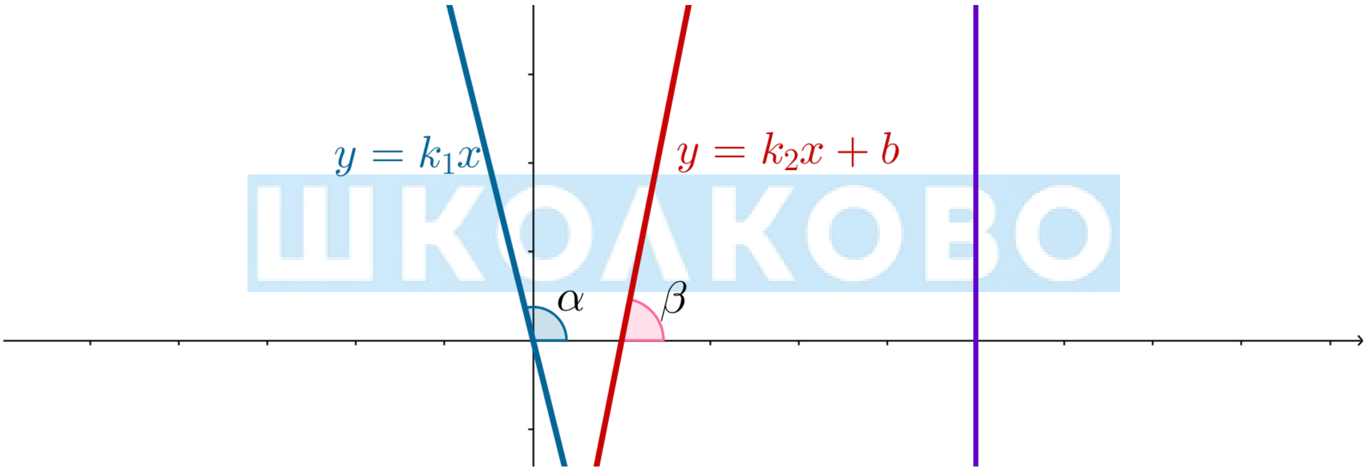


3 Геометрический смысл производной

3.1 Определения и свойства

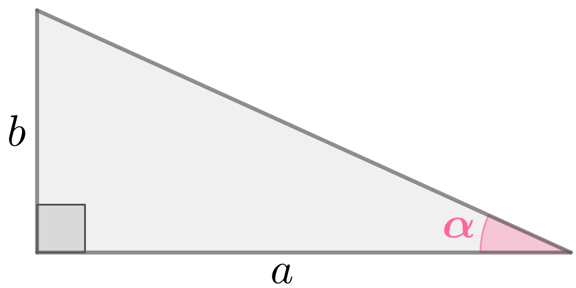
Перейдем к геометрическому смыслу производной. Для начала вспомним некоторые факты об уравнениях прямых.

- Линейная функция – функция вида $f(x) = kx + b$, где k, b – некоторые числа.
- Графиком линейной функции является прямая.
- Если $b = 0$, то прямая проходит через начало координат.
- Графиком $x = a$ является прямая, параллельная оси Oy.
- Графиком $y = c$ является прямая, параллельная оси Ox.
- Для $f(x) = kx + b$ угловой коэффициент k равен тангенсу угла наклона прямой к положительному направлению оси Ox (сокращенно будем говорить "угол наклона").
- Если две прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ параллельны, то $k_1 = k_2$.
- Если эти прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ взаимно перпендикулярны, то $k_1 \cdot k_2 = -1$.



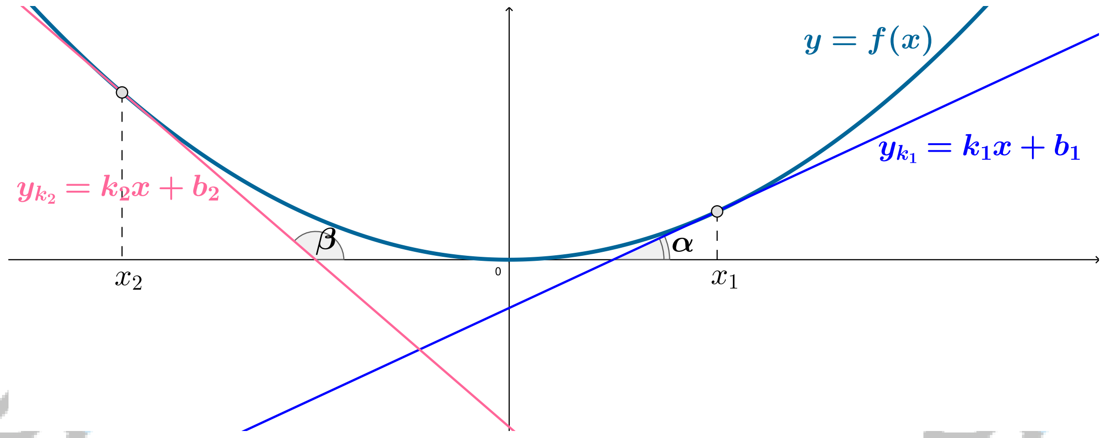
Так на картинке выше $k_1 = \mathrm{tg}\alpha$, $k_2 = \mathrm{tg}\beta$.

Напомним, что тангенс острого угла в прямоугольном треугольнике – это отношение противолежащего катета к прилежащему:



$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{b}{a}$$

Итак, каков геометрический смысл производной? Если функция в точке x_0 имеет производную, то это значит, что в этой точке можно провести касательную к графику данной функции. Касательная – это некоторая прямая, которая графически выглядит так:



На чертеже изображены две различные касательные y_{k_1} и y_{k_2}, проведенные к графику функции $f(x)$. Угол наклона первой касательной равен α, угол наклона второй равен β.

Если нам известно уравнение $y = f(x)$ функции, то, выбрав точку x_0, в которой мы хотим провести касательную к графику этой функции, можно записать уравнение этой касательной:

$$\boldsymbol{y_k = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)}$$

Если переписать уравнение касательной так, чтобы первое слагаемое было kx, второе слагаемое было b, то есть записать в виде $y_k = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$, то видно, что

$$\begin{cases} k = f'(x_0) \\ b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 \end{cases}$$

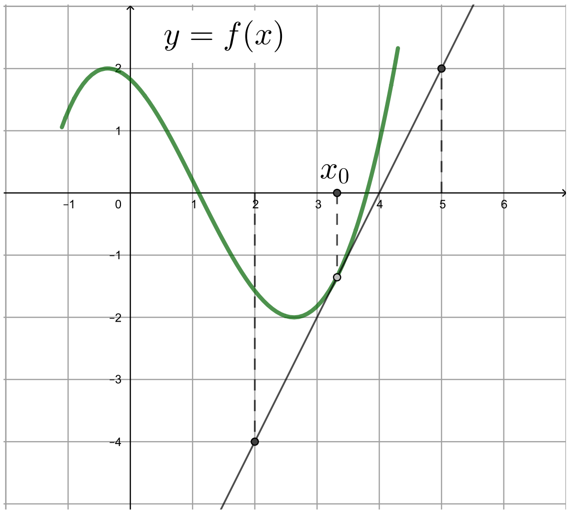
Таким образом, мы видим, что, с одной стороны, угловой коэффициент k касательной, как и любой прямой, равен тангенсу угла наклона α, а с другой стороны, если эта прямая касается графика функции $f(x)$ в точке x_0, то угловой коэффициент k также равен числу $f'(x_0)$:

$$\boldsymbol{k = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)}$$

3.2 №6 формата ЕГЭ

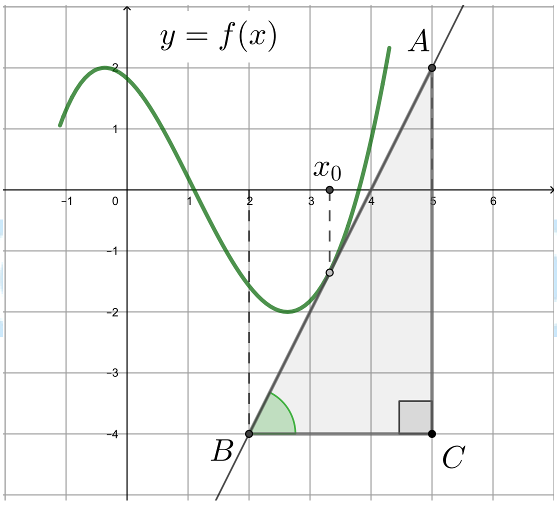
Пример 5

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Решение

Необходимо найти $f'(x_0)$.



Мы знаем, что если в точке x_0 к графику функции $f(x)$ проведена касательная, то $f'(x_0)$ равно тангенсу угла наклона касательной. Построим прямоугольный треугольник ABC, как показано на рисунке.

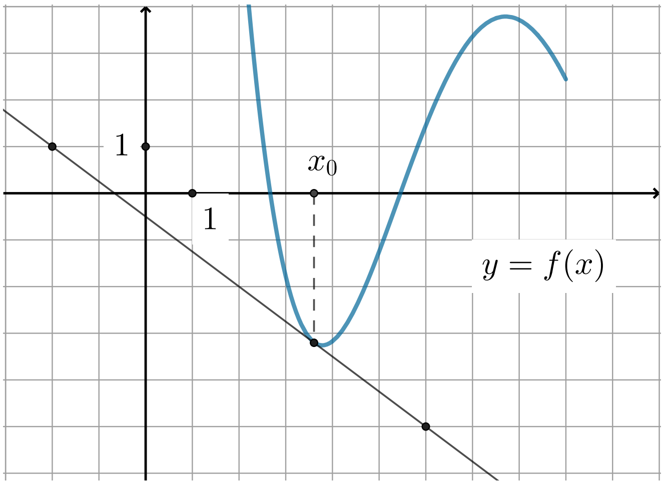
Тогда $BC \parallel Ox$ и угол наклона между касательной и положительным направлением оси Ox равен углу ABC. Тогда по определению тангенса

$$\operatorname{tg} \angle ABC = \frac{AC}{BC} = \frac{6}{3} = 2$$

Значит, $f'(x_0) = \operatorname{tg} \angle ABC = 2$.

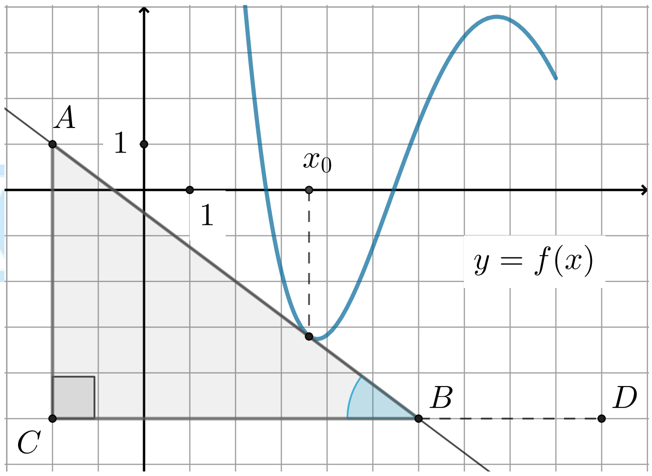
Пример 6

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Решение

Необходимо найти $f'(x_0)$.



Мы знаем, что если в точке x_0 к графику функции $f(x)$ проведена касательная, то $f'(x_0)$ равно тангенсу угла наклона касательной. Построим прямоугольный треугольник ABC, как показано на рисунке. Отрезок BC продлим за точку B и отметим на продолжении точку D. Тогда $\angle ABD$ равен углу наклона касательной к положительному направлению оси Ox.

Следовательно, нам нужно найти $\operatorname{tg} \angle ABD$.

Здесь нам понадобится воспользоваться следующей формулой:

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$

Эта формула значит, что если у нас есть два угла, сумма которых равна 180°, то тангенсы этих углов противоположны.

Таким образом, мы можем найти $\operatorname{tg} \angle ABC$ и тогда $\operatorname{tg} \angle ABD = -\operatorname{tg} \angle ABC$.

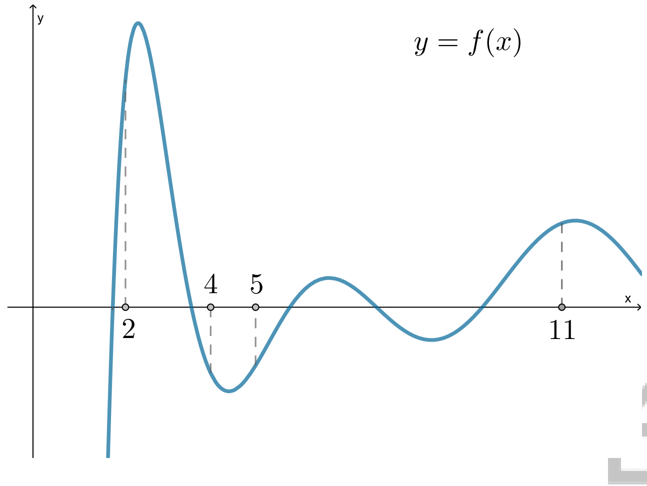
По определению тангенса

$$\operatorname{tg} \angle ABC = \frac{AC}{BC} = \frac{6}{8} = 0,75$$

Значит, $f'(x_0) = \operatorname{tg} \angle ABD = -\operatorname{tg} \angle ABC = -0,75$.

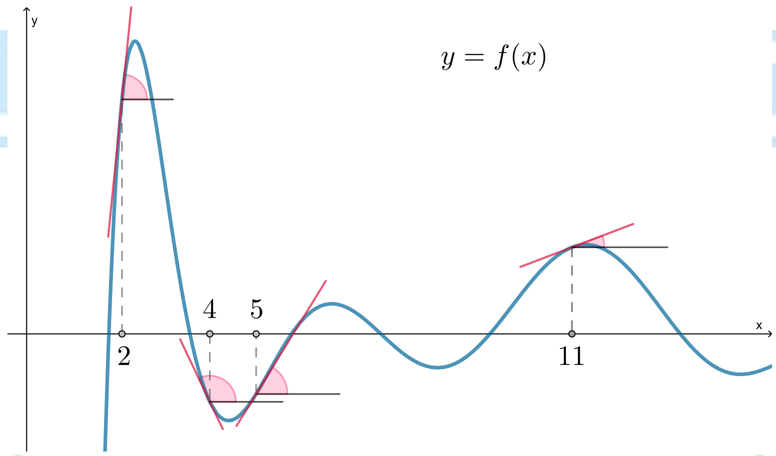
Пример 7

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки 2, 4, 5, 11. В какой из этих точек значение производной наибольшее?



Решение

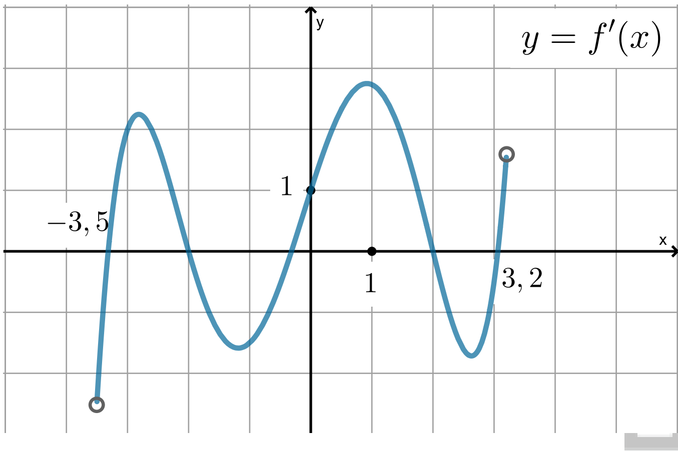
Так как значение производной функции в точке x_0 равно тангенсу угла наклона касательной, проведенной к графику этой функции в точке x_0, то нарисуем касательные к графику функции, проведенные в точках $x_0 = 2; 4; 5; 11$ и отметим углы, равные углам наклона этих касательных к положительному направлению оси Ox:



Так как $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$, и нам нужно найти наибольшее $f'(x_0)$, то нам нужно найти наибольшее $\operatorname{tg}\alpha$.
Мы знаем, что у острых углов тангенс положительный, у тупых – отрицательный. Следовательно, так как мы ищем наибольшее значение тангенса, нам нужно исследовать только острые углы. Это углы в точках 2, 5 и 11. Так как **для углов от** $0°$ **до** $90°$ **верно: чем больше угол, тем больше его тангенс**, то наибольший тангенс будет у угла в точке 2.
Для углов от $90°$ *до* $180°$ *также верно, что чем больше угол, тем больше его тангенс.*

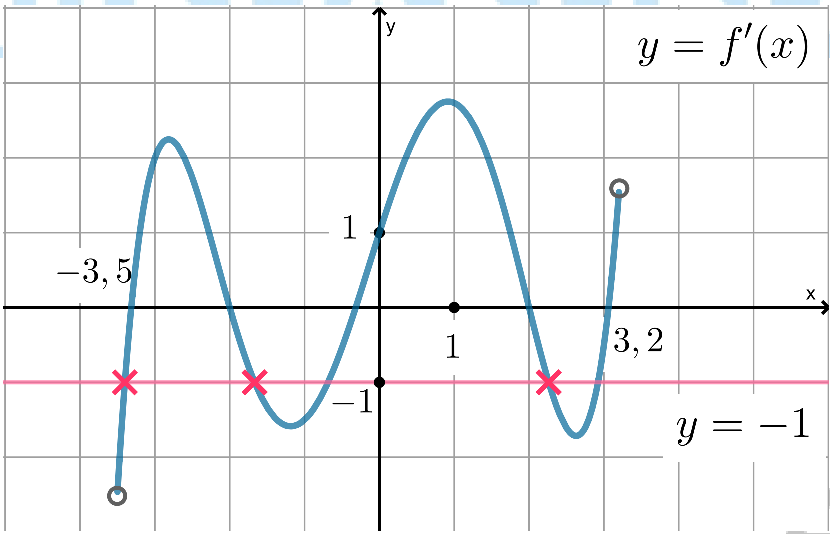
Пример 8

На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-3,5; 3,2)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = -x - 9$ или совпадает с ней.



Решение

Пусть x_0 – точка, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна $y = -x - 9$ или совпадает с ней. Тогда, с одной стороны, уравнение этой касательной выглядит так: $y_k = f'(x_0)x + b$. С другой стороны, так как y_k параллельна или совпадает с $y = -x - 9$, то их угловые коэффициенты равны, то есть $f'(x_0) = -1$. Следовательно, нам нужно найти количество x_0, в которых $f'(x_0) = -1$.
На рисунке как раз изображен график производной, поэтому найдем количество точек на графике, у которых "игрековая" координата равна -1. Для этого проведем прямую $y = -1$:



Отсюда мы видим, что график имеет пять точек, у которых $y = -1$.
Ответ: 5.