

Определение степени

Выражение a^n называется степенью, число a — основанием степени, n — показателем степени. На самом деле запись a^n означает, что мы умножаем число a само на себя n раз, то есть

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ раз}}$$

Примеры

$$5^2 = 5 \cdot 5 = 25$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

Свойство 1

При перемножении степеней с одинаковым основанием, показатели складываются, то есть

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

Пример на свойство 1

$$2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 32$$

Так происходит, потому что $2^2 = 2 \cdot 2$, а $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$. Таким образом,

$$2^2 \cdot 2^3 = (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^5 = 32$$

Свойство 2

При делении степеней с одинаковым основанием, показатели вычитаются, то есть

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

Пример на свойство 2

$$\frac{3^6}{3^4} = 3^{6-4} = 3^2 = 9$$

Так происходит, потому что

$$\frac{3^6}{3^4} = \frac{3 \cdot 3 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}} = 3 \cdot 3 = 9$$

Свойство 3

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

Пример на свойство 3

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

На самом деле третье свойство — следствие второго:

$$3^{-2} = 3^{4-6} = \frac{3^4}{3^6} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}}{3 \cdot 3 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}} = \frac{1}{3 \cdot 3} = \frac{1}{9}$$

Свойство 4

При возведении степени в степень показатели перемножаются, то есть

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

Пример на свойство 4

$$(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64$$

$$(2^3)^5 = 2^{3 \cdot 5} = 2^{15}$$

Свойство 5

$$a^1 = a, \quad a^0 = 1$$

Об этом свойстве просто договорились, чтобы не было противоречий в предыдущих.

Пример на свойство 5

$$\frac{a^2}{a^2} = \frac{a \cdot a}{a \cdot a} = 1, \quad \text{но и} \quad 1 = \frac{a^2}{a^2} = a^{2-2} = a^0$$

Свойство 6

Степень произведения равна произведению степеней, то есть

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$$

Пример на свойство 6

$$6^3 = (2 \cdot 3)^3 = 2^3 \cdot 3^3 = 8 \cdot 27 = 216$$

Свойство 7

Степень частного равна частному степеней, то есть

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

Пример на свойство 7

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$$