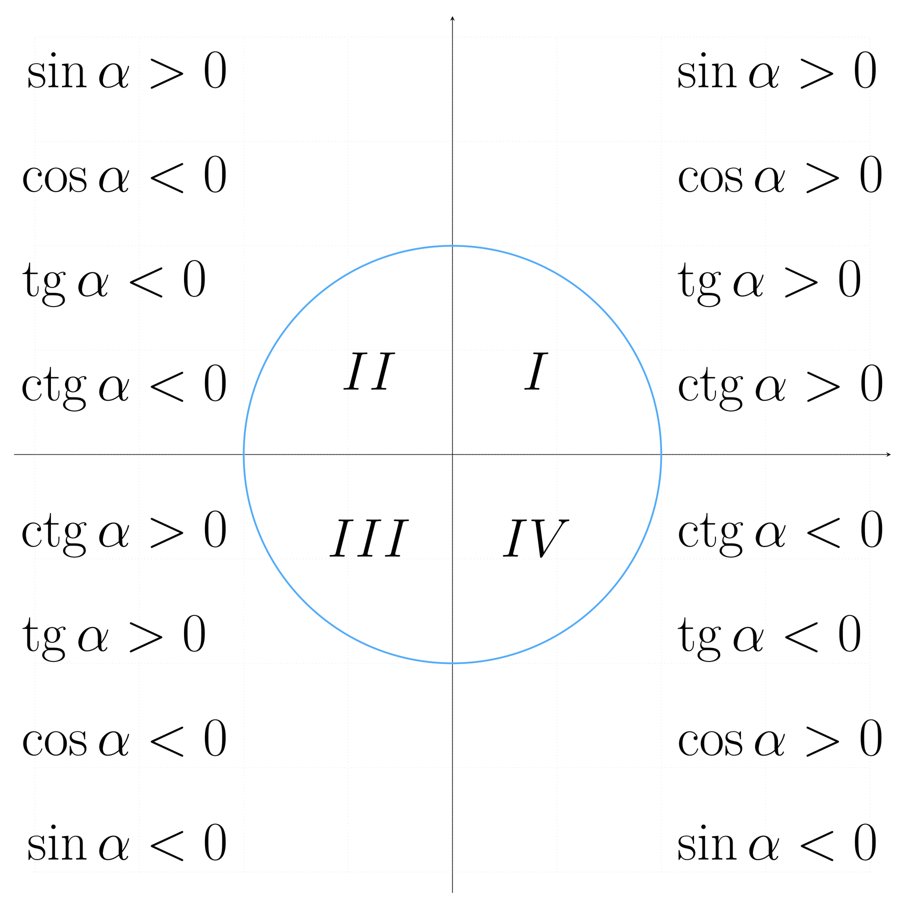
Таблица $\sin, \cos, \mathrm{tg}, \mathrm{ctg}$ углов из I четверти

	$0^\circ = 0$	$30^\circ = \frac{\pi}{6}$	$45^\circ = \frac{\pi}{4}$	$60^\circ = \frac{\pi}{3}$	$90^\circ = \frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не сущ.
ctg	не сущ.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Знаки $\sin, \cos, \mathrm{tg}, \mathrm{ctg}$ в четвертях I, II, III, IV



Формулы приведения

Всегда предполагаем, что $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

1. Если угол можно представить в виде $n \cdot \pi \pm \alpha$, где n – натуральное, то

$$\sin(n \cdot \pi \pm \alpha) = \odot \sin\alpha,$$

где на месте $\odot$ стоит знак синуса угла $n \cdot \pi \pm \alpha$. Для определения этого знака нужно найти, в какой четверти находится угол $n \cdot \pi \pm \alpha$.

2. Если угол можно представить в виде $\frac{k \cdot \pi}{2} \pm \alpha$, где k – нечетное, то

$$\sin\left(\frac{k \cdot \pi}{2} \pm \alpha\right) = \odot \cos\alpha,$$

где на месте $\odot$ стоит знак синуса угла $\frac{k \cdot \pi}{2} \pm \alpha$. Знак определяется таким же образом, как и в случае 1.

Замечание: в первом случае функция остается неизменной, а во втором случае — меняется: синус меняется с косинусом, тангенс меняется с котангенсом (говорят, что функция меняется на кофункцию).

Таким образом, применение формул приведения состоит из трех шагов:
1) Записать угол в нужном нам виде (если он так еще не записан).
2) Определить, меняется или не меняется функция на кофункцию: если первый угол в скобках имеет вид $\pi, 2\pi, 3\pi$ и т.д., то не меняется; если вид $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ и т.д. — то меняется.
3) Определить знак ПО ПЕРВОНАЧАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ.

Примеры использования формул приведения

1. Преобразовать по формулам приведения $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$.
ШАГ 1: угол уже записан в нужном нам виде.
ШАГ 2: так как первое слагаемое — это $\frac{3\pi}{2}$, то функция будет меняться:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \odot \cos x$$

ШАГ 3: нужно определить знак, который будет стоять на месте $\odot$. В какой четверти находится угол $\frac{3\pi}{2} - x$, если $0 < x < \frac{\pi}{2}$? В III четверти. Мы знаем, что синус в III четверти отрицательный, следовательно, на месте $\odot$ должен стоять «−».
Значит, $\boxed{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\cos x}$

2. Преобразовать по формулам приведения $\mathrm{tg}\,(6\pi + x)$.
ШАГ 1: угол уже записан в нужном нам виде.
ШАГ 2: так как первое слагаемое — это 6π, то функция не будет меняться:

$$\mathrm{tg}\,(6\pi + x) = \odot\, \mathrm{tg}\, x$$

ШАГ 3: нужно определить знак, который будет стоять на месте $\odot$. В какой четверти находится угол $6\pi + x$, если $0 < x < \frac{\pi}{2}$? В I четверти. Мы знаем, что тангенс в I четверти положительный, следовательно, на месте $\odot$ должен стоять «+».
Значит, $\boxed{\mathrm{tg}\,(6\pi + x) = \mathrm{tg}\, x}$

3. Найти $\cos\frac{13\pi}{3}$.
ШАГ 1: преобразуем угол: $\frac{13\pi}{3} = \frac{12\pi + \pi}{3} = 4\pi + \frac{\pi}{3}$.
ШАГ 2: так как мы получили 4π, функция меняться не будет, значит:

$$\cos\frac{13\pi}{3} = \cos\left(4\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \odot \cos\frac{\pi}{3}$$

ШАГ 3: перед $\cos\frac{\pi}{3}$ будет стоять знак «+», так как угол $4\pi + \frac{\pi}{3}$ находится в I четверти, в которой изначальная функция косинус положительна.
Следовательно, $\boxed{\cos\frac{13\pi}{3} = \cos\left(4\pi + \frac{\pi}{3}\right) = +\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}}$

4. Найти $\mathrm{ctg}\,\frac{15\pi}{4}$.
ШАГ 1: преобразуем угол: $\frac{15\pi}{4} = \frac{16\pi - \pi}{4} = 4\pi - \frac{\pi}{4}$.
ШАГ 2: так как мы получили 4π, функция меняться не будет, значит:

$$\mathrm{ctg}\,\frac{15\pi}{4} = \mathrm{ctg}\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \odot\, \mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{4}$$

ШАГ 3: перед $\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4}$ будет стоять «−», так как угол $4\pi - \frac{\pi}{4}$ находится в IV четверти, в которой изначальная функция котангенс отрицательна.
Следовательно, $\boxed{\mathrm{ctg}\,\frac{15\pi}{4} = \mathrm{ctg}\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{4} = -1}$

Четность cos и нечетность sin, tg, ctg

Четность косинуса:

$$\cos(-x) = \cos x$$

Нечетность синуса, тангенса и котангенса:

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\mathrm{tg}(-x) = -\,\mathrm{tg}\, x$$

$$\mathrm{ctg}(-x) = -\,\mathrm{ctg}\, x$$

Примеры использования четности/нечетности

1. $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
2. $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

Область значений $\sin, \cos, \mathrm{tg}, \mathrm{ctg}$

Для любого угла $x \in \mathbb{R}$ верно

$$\sin x \in [-1; 1]$$

$$\cos x \in [-1; 1]$$

Для любого угла $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$, верно

$$\mathrm{tg}\, x \in \mathbb{R}$$

Для любого угла $x \neq \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$, верно

$$\mathrm{ctg}\, x \in \mathbb{R}$$

Связи между тригонометрическими функциями одного угла

Формула	Ограничение
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$	$x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$	$x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$	$x \neq \dfrac{\pi}{2} n, n \in \mathbb{Z}$
$1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
$1 + \operatorname{ctg}^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Примеры использования формул

1. Найдите $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ и $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$.
Так как $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$, то $\sin\alpha > 0$. Следовательно,
$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{8}{9}} = \frac{1}{3}.$$

2. Найдите значение выражения $\dfrac{14\cos\alpha - 4\sin\alpha - 7}{-21\cos\alpha + 6\sin\alpha + 4}$, если $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{7}{2}$.
Так как $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{7}{2}$, то $2\sin\alpha = 7\cos\alpha$. Следовательно,
$$\frac{14\cos\alpha - 4\sin\alpha - 7}{-21\cos\alpha + 6\sin\alpha + 4} = \frac{14\cos\alpha - 2\cdot 7\cos\alpha - 7}{-21\cos\alpha + 3\cdot 7\cos\alpha + 4} = \frac{-7}{4} = -1,75.$$

3. Найдите $\operatorname{tg}^2\alpha$, если $\cos\alpha = \dfrac{1}{4}$.
Имеем:
$$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = \frac{1}{\frac{1}{16}} - 1 = 16 - 1 = 15.$$

4. Найдите $\operatorname{ctg}^2\alpha$, если $-41\sin^2\alpha + 17\cos^2\alpha = 16$.
Так как $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, то $16 = 16\cdot 1 = 16\cdot(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$.
Следовательно, имеем:
$$-41\sin^2\alpha + 17\cos^2\alpha = 16\sin^2\alpha + 16\cos^2\alpha$$
$$\cos^2\alpha = 57\sin^2\alpha \;\Big|\; : \sin^2\alpha$$
$$\operatorname{ctg}^2\alpha = 57.$$

Тригонометрические функции суммы и разности двух углов

$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \sin y\cos x$
$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \sin y\cos x$
$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$
$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$
$\operatorname{tg}(x+y) = \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y}$
$\operatorname{tg}(x-y) = \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y}$
$\operatorname{ctg}(x+y) = \dfrac{\operatorname{ctg} x\cdot\operatorname{ctg} y - 1}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y}$
$\operatorname{ctg}(x-y) = \dfrac{-\operatorname{ctg} x\cdot\operatorname{ctg} y - 1}{\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y}$

Тригонометрические функции двойного и тройного углов

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$
$\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$
$\operatorname{ctg} 2x = \dfrac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2\operatorname{ctg} x}$

$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$
$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$
$\operatorname{tg} 3x = \dfrac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x}$
$\operatorname{ctg} 3x = \dfrac{\operatorname{ctg}^3 x - 3\operatorname{ctg} x}{3\operatorname{ctg}^2 x - 1}$

Примеры использования формул

1. Найти значение выражения $\sqrt{48} - \sqrt{192}\sin^2\dfrac{19\pi}{12}$.
По формуле $1 - 2\sin^2 x = \cos 2x$ имеем
$$\sqrt{48}\left(1 - 2\sin^2\frac{19\pi}{12}\right) = \sqrt{48}\cos\frac{19\pi}{6} = 4\sqrt{3}\cos\left(3\pi + \frac{\pi}{6}\right) =$$
$$4\sqrt{3}\cdot\left(-\cos\frac{\pi}{6}\right) = 4\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -6.$$

2. Найти значение выражения $\dfrac{\sqrt{3}\sin 75^\circ\cos 75^\circ}{\sin^2 75^\circ - \cos^2 75^\circ}$.
Воспользуемся формулой $\sin x\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$ в числителе и формулой $\sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x$ в знаменателе. Получим:
$$\frac{\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\sin 150^\circ}{-\cos 150^\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\operatorname{tg} 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0,5.$$

Формулы понижения степени для sin, cos, tg, ctg

$\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$
$\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$

$\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$
$\operatorname{ctg}^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x}$

Примеры использования формул

1. Найти значение выражения $\dfrac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$, если $\operatorname{tg} x = 5$.
По формуле понижения степени для тангенса имеем
$$\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} = \operatorname{tg}^2 x = 5^2 = 25.$$

2. Найти значение выражения $1 + \cos 4x + 2\sin^2 2x$.
По формуле понижения степени для косинуса
$1 + \cos 4x = 2\cos^2 2x$. Следовательно,
$1 + \cos 4x + 2\sin^2 2x = 2\cos^2 2x + 2\sin^2 2x = 2$.

Сумма и разность тригонометрических функций

$\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$
$\sin x - \sin y = 2\sin\dfrac{x-y}{2}\cos\dfrac{x+y}{2}$
$\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$
$\cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$
$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \dfrac{\sin(x+y)}{\cos x\cdot\cos y}$
$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \dfrac{\sin(x-y)}{\cos x\cdot\cos y}$
$\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = \dfrac{\sin(x+y)}{\sin x\cdot\sin y}$
$\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y = \dfrac{-\sin(x-y)}{\sin x\cdot\sin y}$

Произведение тригонометрических функций

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y}$$

$$\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y = \frac{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}$$

Пример использования формул

Решить уравнение $\sin x + \sin 3x + \sin 2x \cdot \cos x = 3$.

Решение: По формуле $2\sin x \cdot \cos y = \sin(x-y) + \sin(x+y)$ имеем $\sin x + \sin 3x = \sin(2x - x) + \sin(2x + x) = 2\sin 2x \cdot \cos x$. Следовательно, уравнение примет вид

$$\sin 2x \cdot \cos x = 1$$

Так как $\sin 2x \in [-1; 1]$ и $\cos x \in [-1; 1]$, то по методу оценки получаем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin 2x = 1 \\ \cos x = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin 2x = -1 \\ \cos x = -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \pi + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \varnothing$$

Выражение синуса и косинуса через тангенс половинного угла

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

Пример использования формул

Решить уравнение $\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = -1$.

Решение:

Сделаем подстановку $\sin 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$, $\cos 2x = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ и замену $\operatorname{tg} x = t$:

$$\frac{(\sqrt{3}+1)t^2 + 2t + 1 - \sqrt{3}}{1 + t^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\sqrt{3}+1)t^2 + 2t + 1 - \sqrt{3} = 0$$

(так как $1 + t^2 \geqslant 1$ при всех t, то есть $1 + t^2 \neq 0$)

Корнями этого уравнения являются $t_1 = -1$, $t_2 = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2 - \sqrt{3}$.

Сделаем обратную замену:

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = -1 \\ \operatorname{tg} x = 2 - \sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \operatorname{arctg}(2 - \sqrt{3}) + \pi m, m \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Формулы вспомогательного угла

1. $a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(x + \phi)$,

   где $\phi = \arcsin\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \arccos\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

2. $a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\cos(x - \phi)$,

   где $\phi = \arccos\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \arcsin\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Частные случаи формул вспомогательного аргумента

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

Пример использования формул

Решить уравнение $\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = -1$.

Решение:

Так как мы решаем уравнение, то можно не преобразовывать левую часть, а просто разделить обе части уравнения на $\sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$:

$$\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x = -\frac{1}{2}$$

Заметим, что числа $\frac{1}{2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}$ получились табличные. Можно, например, взять $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$. Тогда уравнение примет вид

$$\sin 2x \cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\cos 2x = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

Решениями данного уравнения являются

$$\left[\begin{array}{l} 2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ 2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi m, m \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Простейшие тригонометрические уравнения

Уравнение	Ограничения	Решение
$\sin x = a$	$-1 \leqslant a \leqslant 1$	$\left[\begin{array}{l} x = \arcsin a + 2\pi n \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi n \end{array}\right., \ n \in \mathbb{Z}$
$\cos x = a$	$-1 \leqslant a \leqslant 1$	$x = \pm\arccos a + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x = b$	$b \in \mathbb{R}$	$x = \operatorname{arctg} b + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ctg} x = b$	$b \in \mathbb{R}$	$x = \operatorname{arcctg} b + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}$

Замечание: иногда для более короткой записи решение для $\sin x = a$ записывают как $x = (-1)^k \cdot \arcsin a + \pi k, \ k \in \mathbb{Z}$.