Задания №6, №7, №13 и №15 из ЕГЭ по профильной математике

Тригонометрия, логарифмы и степени

Тригонометрия

- $\sin x = a \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = \arcsin a + 2\pi n \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi n \end{array}\right.$
- $\cos x = a \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\arccos a + 2\pi n$
- $\operatorname{tg} x = b \quad \Leftrightarrow \quad x = \operatorname{arctg} b + \pi n$
- $\operatorname{ctg} x = b \quad \Leftrightarrow \quad x = \operatorname{arcctg} b + \pi n$

$|a| \leqslant 1, n \in \mathbb{Z}$

Основные формулы

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$
- $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $\sin 2x = 2\sin x\cos x$
- $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$
- $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$
- $\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$
- $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$
- $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$
- $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$
- $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
- $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$
- $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$
- $\operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2\operatorname{ctg} x}$
- $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

Формулы сложения и умножения

- $\sin(x \pm y) = \sin x\cos y \pm \sin y\cos x$
- $\cos(x \pm y) = \cos x\cos y \mp \sin x\sin y$

- $\sin x\sin y = 0,5\,(\cos(x-y) - \cos(x+y))$
- $\cos x\cos y = 0,5\,(\cos(x-y) + \cos(x+y))$
- $\sin x\cos y = 0,5\,(\sin(x-y) + \sin(x+y))$

- $\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$
- $\sin x - \sin y = 2\sin\dfrac{x-y}{2}\cos\dfrac{x+y}{2}$
- $\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$
- $\cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x-y}{2}\sin\dfrac{x+y}{2}$

Формула вспомогательного угла

Выражение $a\sin x + b\cos x$, где $c = \sqrt{a^2+b^2}$, можно переписать в виде

1. $c \cdot \sin(x+\phi)$, где $\phi = \arccos\frac{a}{c} = \arcsin\frac{b}{c}$
2. $c \cdot \cos(x-\gamma)$, где $\gamma = \arccos\frac{b}{c} = \arcsin\frac{a}{c}$

Частные случаи

- $\cos x \pm \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x \mp \frac{\pi}{4}\right)$
- $\sin x \pm \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right)$
- $\sin x \pm \sqrt{3}\cos x = 2\sin x\left(x \pm \frac{\pi}{3}\right)$
- $\sqrt{3}\sin x \pm \cos x = 2\sin x\left(x \pm \frac{\pi}{6}\right)$

Логарифмы

$x = \log_a b \quad \Leftrightarrow \quad b = a^x, \quad a > 0, a \neq 1, b > 0$

Формулы

- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a b^m = m\log_a |b|$
- $\log_a bc = \log_a |b| + \log_a |c|$
- $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$
- $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$
- $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$
- $\log_a a = 1$
- $\log_{a^n} b = \frac{1}{n}\log_{|a|} b$
- $\log_a \frac{b}{c} = \log_a |b| - \log_a |c|$
- $\log_a b \cdot \log_b a = 1$
- $\log_b c = \frac{1}{\log_c b}$
- $a^{\log_a b} = b$

Решение простейших неравенств

Пусть дано неравенство $\log_a f(x) > b$. Тогда при

- $a > 1$ неравенство равносильно
$$\begin{cases} f(x) > a^b \\ f(x) > 0 \ ^* \end{cases}$$
- $0 < a < 1$ неравенство равносильно
$$\begin{cases} f(x) < a^b \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

* необязательно

Метод рационализации

- $\log_{g(x)} f(x) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow$
$$\begin{cases} (g(x)-1)\,(f(x)-1) \geqslant 0 \\ g(x) > 0 \\ g(x) \neq 1 \\ f(x) > 0 \end{cases}$$
- $\log_{g(x)} f(x) \geqslant \log_{g(x)} h(x) \quad \Leftrightarrow$
$$\begin{cases} (g(x)-1)\,(f(x)-h(x)) \geqslant 0 \\ g(x) > 0 \\ g(x) \neq 1 \\ f(x) > 0 \\ h(x) > 0 \end{cases}$$
- $(a(x))^{f(x)} \geqslant (a(x))^{g(x)} \quad \Leftrightarrow$
$$\begin{cases} (a(x)-1)\,(f(x)-g(x)) \geqslant 0 \\ a(x) > 0 \end{cases}$$

Показательная функция

$y(x) = a^x$

$a > 0, a \neq 1, a = \text{const}, \ y(x) > 0$

Формулы

- $a^0 = 1$
- $(a^x)^y = (a^y)^x = a^{x \cdot y}$
- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $a^{\log_a b} = b, (b > 0)$
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
- $(a \cdot b)^x = |a|^x \cdot |b|^x$
- $a^x : a^y = a^{x-y}$
- $\log_a a^x = x$

Решение простейших неравенств

Пусть дано неравенство $a^{f(x)} > b \ (b > 0)$. Тогда при

- $a > 1$ неравенство равносильно
$$f(x) > \log_a b$$
- $0 < a < 1$ неравенство равносильно
$$f(x) < \log_a b$$

Метод интервалов

1. Представить неравенство в виде $P(x) \vee 0$. Числитель и знаменатель многочлена $P(x)$ разложить на множители вплоть до линейных и квадратичных с отрицательным дискриминантом. Например, выйдет так:
$$\frac{(x-1)(x^2+1)}{(x-2)(x+3)^2} \geqslant 0$$
2. Квадратичный трехчлен с $D < 0$ либо всегда положителен, либо всегда отрицателен, это зависит от коэффициента перед x^2 (если он положителен или отрицателен соответственно). В нашем случае $x^2 + 1 > 0 \ \forall x$. Тогда обе части неравенства можно разделить на него, учитывая его знак (не менять или менять знак неравенства соответственно). Получим
$$\frac{x-1}{(x-2)(x+3)^2} \geqslant 0$$
3. Расставляем нули каждой скобки на вещественной прямой, то есть числа $x = -3; 1; 2$. Знаки расставляем справа налево. Первый знак можно определить подстановкой очень большого числа в неравенство. Далее если мы переходим через корень нечетной кратности (корни $x = 1; 2$), знак неравенства меняется. При переходе через корень четной краткости ($x = -3$) знак неравенства не меняется. Получаем

4. Выбираем знак $+$. Ответ
$$x \in (-\infty; -3) \cup (-3; 1] \cup (2; +\infty)$$

Обращаем внимание

- Если у $ax^2 + bx + c$ есть корни x_1, x_2, то это выражение равно $a(x-x_1)(x-x_2)$.
- Теорема Виета: если у $ax^2 + bx + c$ есть корни x_1, x_2, то
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$
- Если у $ax^2 + bx + c$ корни x_1, x_2, то у $x^2 + bx + ca$ корни cx_1, cx_2.
- Формулы сокращенного умножения:
  1. $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$
  2. $x^3 \pm y^3 = (x \pm y)(x^2 + y^2 \mp xy)$
  3. $(x \pm y)^2 = x^2 + y^2 \pm 2xy$
  4. $(x \pm y)^3 = x^3 \pm y^3 \pm 3xy(x \pm y)$
- У многочлена $ax^3 + bx^2 + cx + d$ всегда есть как минимум один вещественный корень.
Если $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ и у многочлена есть рациональный корень $\frac{p}{q}$, то p — делитель d, q — делитель a.
- Пример деления в столбик:
$$\begin{array}{r|l} x^4 + 2x^3 - 9x^2 - x + 6 & x - 2 \\ \cline{2-2} \underline{x^4 - 2x^3} \qquad\qquad\qquad & x^3 + 4x^2 - x - 3 \\ 4x^3 - 9x^2 \qquad\quad & \\ \underline{4x^3 - 8x^2} \qquad\quad & \\ -x^2 - x \quad & \\ \underline{-x^2 + 2x} \quad & \\ -3x + 6 & \\ \underline{-3x + 6} & \\ 0 & \end{array}$$
- Если вы выписываете ОДЗ (область допустимых значений) переменной, то в систему необходимо вписать все возможные ограничения на нее (знаменатель не равен нулю, аргумент логарифма положительный, подкоренное выражение неотрицательно и т.п.)
- Если уравнение выглядит как $f(x) \cdot g(x) = f(x) \cdot h(x)$, то делить на $f(x)$ нельзя, так как $f(x) = 0$ — часть решения.
- Умножать/делить в неравенстве на выражение с переменной можно только в том случае, если вы знаете знак этого выражения (строго положительное или строго отрицательное). Например, вместо умножения на знаменатель правильнее будет привести все слагаемые к общему знаменателю.