

Таблица $\sin, \cos, \operatorname{tg}, \operatorname{ctg}$ углов из I четверти

	$0^\circ = 0$	$30^\circ = \frac{\pi}{6}$	$45^\circ = \frac{\pi}{4}$	$60^\circ = \frac{\pi}{3}$	$90^\circ = \frac{\pi}{2}$
$\sin$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не сущ.
ctg	не сущ.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Знаки $\sin, \cos, \operatorname{tg}, \operatorname{ctg}$ в четвертях I, II, III, IV

$\sin \alpha > 0$		$\sin \alpha > 0$
$\cos \alpha < 0$		$\cos \alpha > 0$
$\operatorname{tg} \alpha < 0$		$\operatorname{tg} \alpha > 0$
$\operatorname{ctg} \alpha < 0$	II	I
$\operatorname{ctg} \alpha > 0$	III	IV
$\operatorname{tg} \alpha > 0$		$\operatorname{tg} \alpha < 0$
$\cos \alpha < 0$		$\cos \alpha > 0$
$\sin \alpha < 0$		$\sin \alpha < 0$

Формулы приведения

Всегда предполагаем, что $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$.

1. Если угол можно представить в виде $n \cdot \pi \pm \alpha$, где n – натуральное, то

$$\sin(n \cdot \pi \pm \alpha) = \odot \sin \alpha,$$

где на месте $\odot$ стоит знак синуса угла $n \cdot \pi \pm \alpha$. Для определения этого знака нужно найти, в какой четверти находится угол $n \cdot \pi \pm \alpha$.

2. Если угол можно представить в виде $\frac{k \cdot \pi}{2} \pm \alpha$, где k – нечетное, то

$$\sin\left(\frac{k \cdot \pi}{2} \pm \alpha\right) = \odot \cos \alpha,$$

где на месте $\odot$ стоит знак синуса угла $\frac{k \cdot \pi}{2} \pm \alpha$. Знак определяется таким же образом, как и в случае 1.

Замечание: в первом случае функция остается неизменной, а во втором случае — меняется: синус меняется с косинусом, тангенс меняется с котангенсом (говорят, что функция меняется на кофункцию).

Таким образом, применение формул приведения состоит из трех шагов:

- 1) Записать угол в нужном нам виде (если он так еще не записан).
- 2) Определить, меняется или не меняется функция на кофункцию: если первый угол в скобках имеет вид $\pi, 2\pi, 3\pi$ и т.д., то не меняется; если вид $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ и т.д. — то меняется.
- 3) Определить знак ПО ПЕРВОНАЧАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ.

Примеры использования формул приведения

1. Преобразовать по формулам приведения $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$.

ШАГ 1: угол уже записан в нужном нам виде.

ШАГ 2: так как первое слагаемое — это $\frac{3\pi}{2}$, то функция будет меняться:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \odot \cos x$$

ШАГ 3: нужно определить знак, который будет стоять на месте

$\odot$. В какой четверти находится угол $\frac{3\pi}{2} - x$, если $0 < x < \frac{\pi}{2}$? В III четверти. Мы знаем, что синус в III четверти отрицательный, следовательно, на месте $\odot$ должен стоять «—».

$$\text{Значит, } \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\cos x$$

2. Преобразовать по формулам приведения $\operatorname{tg}(6\pi + x)$.

ШАГ 1: угол уже записан в нужном нам виде.

ШАГ 2: так как первое слагаемое — это 6π , то функция не будет меняться:

$$\operatorname{tg}(6\pi + x) = \odot \operatorname{tg} x$$

ШАГ 3: нужно определить знак, который будет стоять на месте

$\odot$. В какой четверти находится угол $6\pi + x$, если $0 < x < \frac{\pi}{2}$? В I четверти. Мы знаем, что тангенс в I четверти положительный, следовательно, на месте $\odot$ должен стоять «+».

$$\text{Значит, } \operatorname{tg}(6\pi + x) = \operatorname{tg} x$$

3. Найти $\cos \frac{13\pi}{3}$.

ШАГ 1: преобразуем угол: $\frac{13\pi}{3} = \frac{12\pi + \pi}{3} = 4\pi + \frac{\pi}{3}$.

ШАГ 2: так как мы получили 4π , функция меняться не будет, значит:

$$\cos \frac{13\pi}{3} = \cos\left(4\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \odot \cos \frac{\pi}{3}$$

ШАГ 3: перед $\cos \frac{\pi}{3}$ будет стоять знак «+», так как угол $4\pi + \frac{\pi}{3}$ находится в I четверти, в которой изначальная функция косинус положительна.

$$\text{Следовательно, } \cos \frac{13\pi}{3} = \cos\left(4\pi + \frac{\pi}{3}\right) = +\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

4. Найти $\operatorname{ctg} \frac{15\pi}{4}$.

ШАГ 1: преобразуем угол: $\frac{15\pi}{4} = \frac{16\pi - \pi}{4} = 4\pi - \frac{\pi}{4}$.

ШАГ 2: так как мы получили 4π , функция меняться не будет, значит:

$$\operatorname{ctg} \frac{15\pi}{4} = \operatorname{ctg}\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \odot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}$$

ШАГ 3: перед $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}$ будет стоять «—», так как угол $4\pi - \frac{\pi}{4}$ находится в IV четверти, в которой изначальная функция котангенс отрицательна.

$$\text{Следовательно, } \operatorname{ctg} \frac{15\pi}{4} = \operatorname{ctg}\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = -1$$

Четность $\cos$ и нечетность $\sin, \operatorname{tg}, \operatorname{ctg}$

Четность косинуса:

$$\cos(-x) = \cos x$$

Нечетность синуса, тангенса и котангенса:

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$$

Примеры использования четности/нечетности

$$\text{1. } \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{2. } \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$

Область значений $\sin, \cos, \operatorname{tg}, \operatorname{ctg}$

Для любого угла $x \in \mathbb{R}$ верно

$$\sin x \in [-1; 1]$$

$$\cos x \in [-1; 1]$$

$$\operatorname{tg} x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{ctg} x \in \mathbb{R}$$

Связи между тригонометрическими функциями одного угла

Формула	Ограничение
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$	$x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$	$x \neq \frac{\pi}{2} n, n \in \mathbb{Z}$
$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
$1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Примеры использования формул

- ❶ Найдите $\sin \alpha$, если $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ и $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Так как $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, то $\sin \alpha > 0$. Следовательно,

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{8}{9}} = \frac{1}{3}.$$

- ❷ Найдите значение выражения $\frac{14 \cos \alpha - 4 \sin \alpha - 7}{-21 \cos \alpha + 6 \sin \alpha + 4}$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{2}$.

Так как $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{7}{2}$, то $2 \sin \alpha = 7 \cos \alpha$. Следовательно,

$$\frac{14 \cos \alpha - 4 \sin \alpha - 7}{-21 \cos \alpha + 6 \sin \alpha + 4} = \frac{14 \cos \alpha - 2 \cdot 7 \cos \alpha - 7}{-21 \cos \alpha + 3 \cdot 7 \cos \alpha + 4} = \frac{-7}{4} = -1,75.$$

- ❸ Найдите $\operatorname{tg}^2 \alpha$, если $\cos \alpha = \frac{1}{4}$.

Имеем:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 = \frac{1}{\frac{1}{16}} - 1 = 16 - 1 = 15.$$

- ❹ Найдите $\operatorname{ctg}^2 \alpha$, если $-41 \sin^2 \alpha + 17 \cos^2 \alpha = 16$.

Так как $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, то $16 = 16 \cdot 1 = 16 \cdot (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$.

Следовательно, имеем:

$$-41 \sin^2 \alpha + 17 \cos^2 \alpha = 16 \sin^2 \alpha + 16 \cos^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = 57 \sin^2 \alpha \quad | : \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha = 57.$$

Тригонометрические функции суммы и разности двух углов

$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$
$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$
$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$
$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$
$\operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$
$\operatorname{ctg}(x + y) = \frac{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y - 1}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y}$
$\operatorname{ctg}(x - y) = \frac{-\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y - 1}{\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y}$

Тригонометрические функции двойного и тройного углов

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$	$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$	$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$
$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$	$\operatorname{tg} 3x = \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x}$
$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$	$\operatorname{ctg} 3x = \frac{\operatorname{ctg}^3 x - 3 \operatorname{ctg} x}{3 \operatorname{ctg}^2 x - 1}$
$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$	
$\operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{ctg} x}$	

Примеры использования формул

- ❶ Найдите значение выражения $\sqrt{48} - \sqrt{192} \sin^2 \frac{19\pi}{12}$.

По формуле $1 - 2 \sin^2 x = \cos 2x$ имеем

$$\sqrt{48} \left(1 - 2 \sin^2 \frac{19\pi}{12}\right) = \sqrt{48} \cos \frac{19\pi}{6} = 4\sqrt{3} \cos \left(3\pi + \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$4\sqrt{3} \cdot \left(-\cos \frac{\pi}{6}\right) = 4\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -6.$$

- ❷ Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{3} \sin 75^\circ \cos 75^\circ}{\sin^2 75^\circ - \cos^2 75^\circ}$.

Воспользуемся формулой $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ в числителе и формулой $\sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x$ в знаменателе. Получим:

$$\frac{\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \sin 150^\circ}{-\cos 150^\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \operatorname{tg} 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0,5.$$

Формулы понижения степени для sin, cos, tg, ctg

$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$	$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$
$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$	$\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x}$

Примеры использования формул

- ❶ Найдите значение выражения $\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$, если $\operatorname{tg} x = 5$.

По формуле понижения степени для тангенса имеем

$$\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} = \operatorname{tg}^2 x = 5^2 = 25.$$

- ❷ Найдите значение выражения $1 + \cos 4x + 2 \sin^2 2x$.

По формуле понижения степени для косинуса

$1 + \cos 4x = 2 \cos^2 2x$. Следовательно,

$$1 + \cos 4x + 2 \sin^2 2x = 2 \cos^2 2x + 2 \sin^2 2x = 2.$$

Сумма и разность тригонометрических функций

$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$
$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$
$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$
$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$
$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y}$
$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cdot \cos y}$
$\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(x+y)}{\sin x \cdot \sin y}$
$\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y = \frac{-\sin(x-y)}{\sin x \cdot \sin y}$

Произведение тригонометрических функций

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x - y) - \cos(x + y))$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x - y) + \cos(x + y))$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x - y) + \sin(x + y))$$

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y}$$

$$\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y = \frac{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}$$

Пример использования формул

Решить уравнение $\sin x + \sin 3x + \sin 2x \cdot \cos x = 3$.

Решение: По формуле $2 \sin x \cdot \cos y = \sin(x - y) + \sin(x + y)$ имеем $\sin x + \sin 3x = \sin(2x - x) + \sin(2x + x) = 2 \sin 2x \cdot \cos x$.

Следовательно, уравнение примет вид

$$\sin 2x \cdot \cos x = 1$$

Так как $\sin 2x \in [-1; 1]$ и $\cos x \in [-1; 1]$, то по методу оценки получаем

$$\begin{cases} \sin 2x = 1 \\ \cos x = 1 \\ \sin 2x = -1 \\ \cos x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \pi + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Выражение синуса и косинуса через тангенс половинного угла

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

Пример использования формул

Решить уравнение $\sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = -1$.

Решение:

Сделаем подстановку $\sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$, $\cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ и замену $\operatorname{tg} x = t$:

$$\frac{(\sqrt{3} + 1)t^2 + 2t + 1 - \sqrt{3}}{1 + t^2} = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{3} + 1)t^2 + 2t + 1 - \sqrt{3} = 0$$

(так как $1 + t^2 \geq 1$ при всех t , то есть $1 + t^2 \neq 0$)

Корнями этого уравнения являются $t_1 = -1$, $t_2 = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = 2 - \sqrt{3}$.

Сделаем обратную замену:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = -1 \\ \operatorname{tg} x = 2 - \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \operatorname{arctg}(2 - \sqrt{3}) + \pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Формулы вспомогательного угла

$$\textcircled{1} a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \phi),$$

$$\text{где } \phi = \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\textcircled{2} a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \phi),$$

$$\text{где } \phi = \arccos \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \arcsin \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Частные случаи формул вспомогательного аргумента

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -2 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\sqrt{3} \sin x + \cos x = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\sqrt{3} \sin x - \cos x = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -2 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

Пример использования формул

Решить уравнение $\sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = -1$.

Решение:

Так как мы решаем уравнение, то можно не преобразовывать левую часть, а просто разделить обе части уравнения на $\sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$:

$$\frac{1}{2} \sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x = -\frac{1}{2}$$

Заметим, что числа $\frac{1}{2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}$ получились табличные. Можно, например, взять $\frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3}$. Тогда уравнение примет вид

$$\sin 2x \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} \cos 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

Решениями данного уравнения являются

$$\begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ 2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Простейшие тригонометрические уравнения

Уравнение	Ограничения	Решение
$\sin x = a$	$-1 \leq a \leq 1$	$\begin{cases} x = \arcsin a + 2\pi n \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi n \end{cases}, n \in \mathbb{Z}$
$\cos x = a$	$-1 \leq a \leq 1$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x = b$	$b \in \mathbb{R}$	$x = \operatorname{arctg} b + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ctg} x = b$	$b \in \mathbb{R}$	$x = \operatorname{arcctg} b + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Замечание: иногда для более короткой записи решение для $\sin x = a$ записывают как $x = (-1)^k \cdot \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.