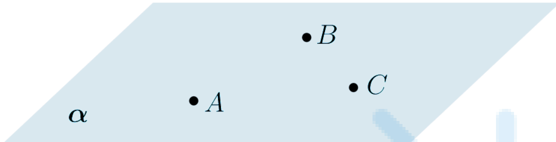
Справочник по стереометрии от «Школково»

Содержание

1 Аксиомы, способы задать плоскость

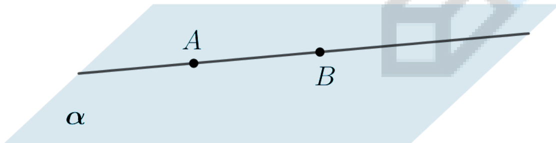
1.1 Аксиома I

Через любые три точки в пространстве, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, причем только одна.



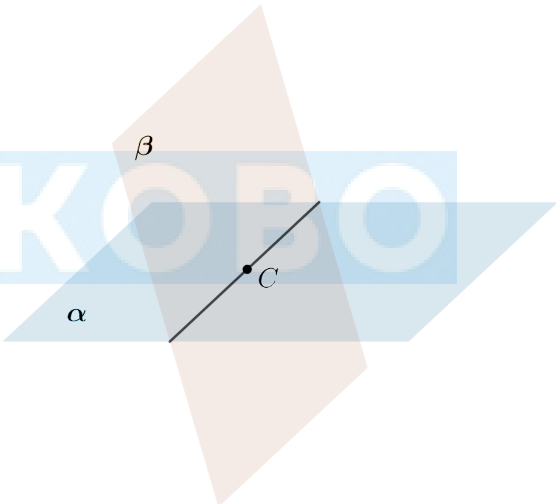
1.2 Аксиома II

Если две точки прямой лежат в некоторой плоскости, то вся прямая лежит в этой плоскости.



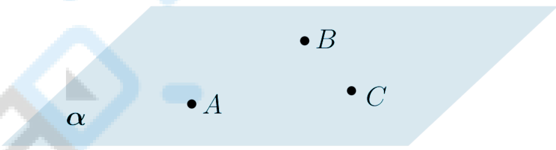
1.3 Аксиома III

Если две несовпадающие плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по некоторой прямой.

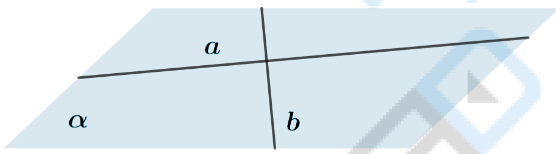


1.4 Способы задать плоскость

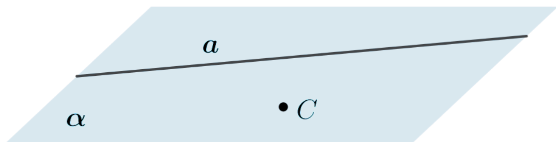
Три точки, не лежащие на одной прямой:



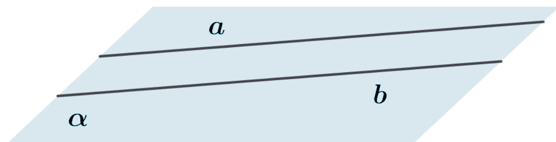
Пара пересекающихся прямых:



Прямая и точка вне этой прямой:



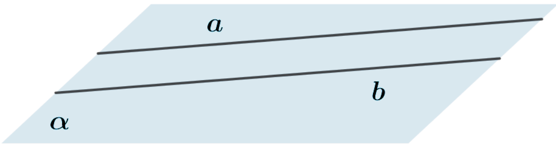
Пара параллельных прямых:



2 Взаимное расположение объектов

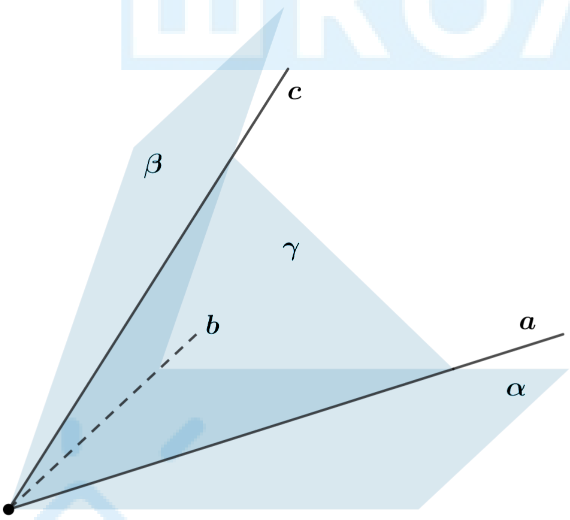
2.1 Параллельность прямых

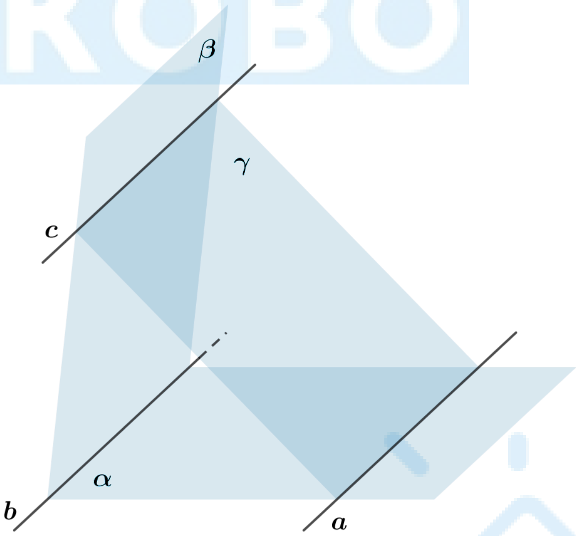
Определение Две прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.



Свойства

- Через две параллельные прямые проходит плоскость, и притом только одна.
- Если одна из двух параллельных прямых пересекает плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.
- Если $a \parallel b$ и $b \parallel c$, то $a \parallel c$.
- Пусть три плоскости попарно пересекаются по трем различным прямым. Тогда либо эти три прямые попарно параллельны, либо все три пересекаются в одной точке.





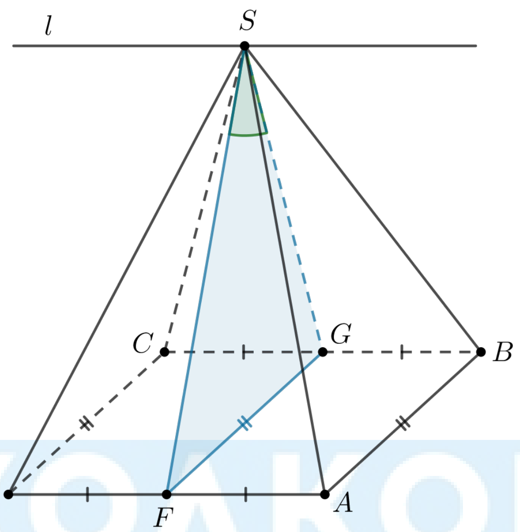
Сформулированный выше факт необходим для решения следующей очень простой на первый взгляд задачи.

Пример

Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$. Найдите линейный угол между плоскостями (SBC) и (SAD).

Решение

В правильной пирамиде $SA = SB = SC = SD$. Проведем высоты SG и SF в равнобедренных треугольниках SCB и SAD соответственно. Они также будут являться медианами, следовательно, G — середина CB, F — середина DA, и отрезок GF параллелен и равен AB как средняя линия квадрата. Тогда $FG \perp CB$ и $SG \perp CB$, следовательно, $CB \perp (FGS)$.



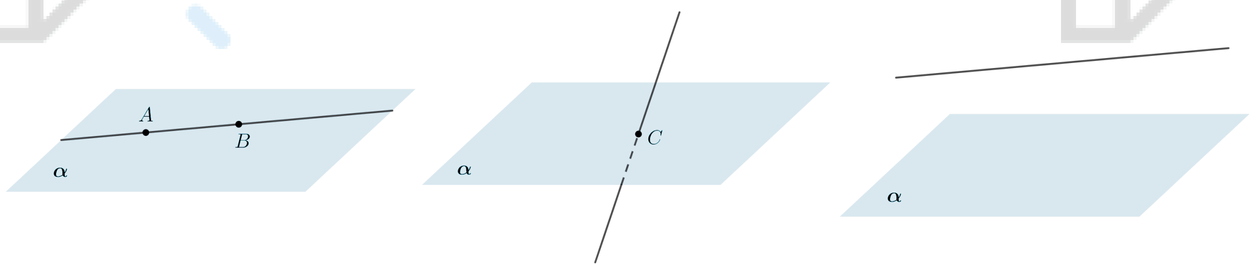
Рассмотрим три плоскости (SBC), (SAD) и $(ABCD)$. Прямые CB и AD пересечения двух пар из них параллельны, следовательно, прямая l пересечения (SAD) и (SBC) параллельна CB и AD. $(SGF) \perp CB$, $BC \parallel l$, следовательно, $(SGF) \perp l$ и $SG \perp l$, $SF \perp l$. Тогда искомый угол между плоскостями (SAD) и (SBC) равен углу FSG.

2.2 Взаимное расположение прямой и плоскости

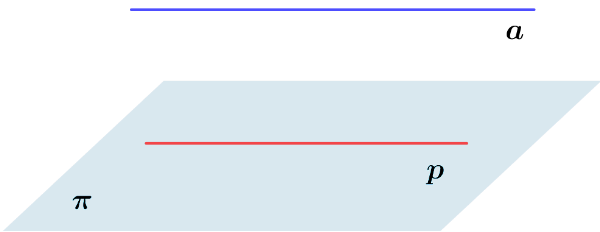
Определение Прямая параллельна плоскости, если она не имеет с этой плоскостью общих точек.

Всего существует три случая **взаимного расположения** прямой и плоскости:

- прямая имеет с плоскостью две общие точки (то есть **лежит в плоскости**);
- прямая имеет с плоскостью ровно одну общую точку (то есть **пересекает плоскость**);
- прямая не имеет с плоскостью общих точек (то есть **параллельна плоскости**).



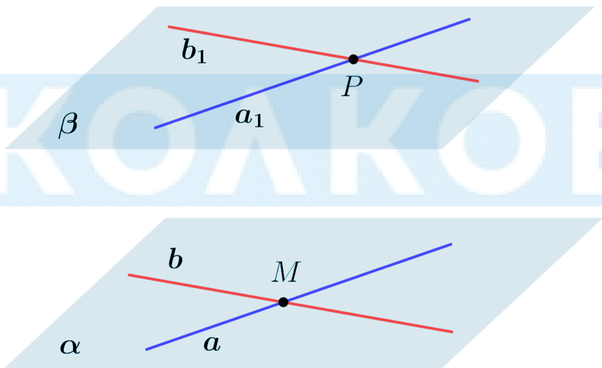
<ins>**Признак параллельности**</ins> Если прямая a, не лежащая в плоскости π, параллельна некоторой прямой p, лежащей в плоскости π, то она параллельна данной плоскости.



2.3 Параллельные плоскости

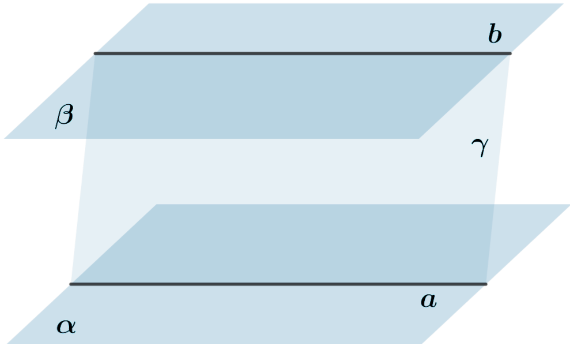
<ins>**Определение**</ins> Плоскости параллельны, если они не имеют общих точек.

<ins>**Признак параллельности плоскостей**</ins> Если две пересекающиеся прямые из одной плоскости соответственно параллельны двум другим пересекающимся прямым из другой плоскости, то такие плоскости параллельны.



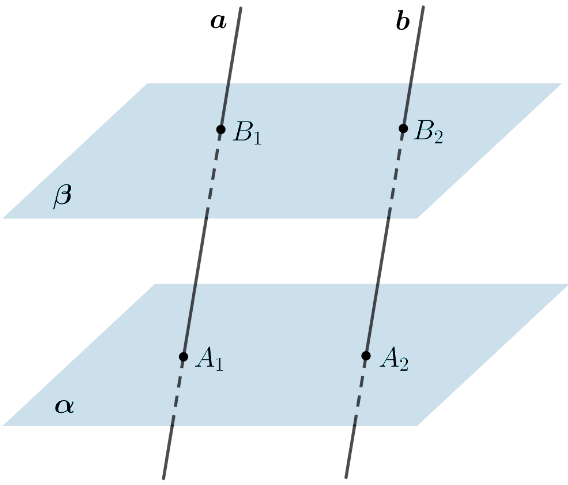
<ins>**Свойства параллельных плоскостей:**</ins>

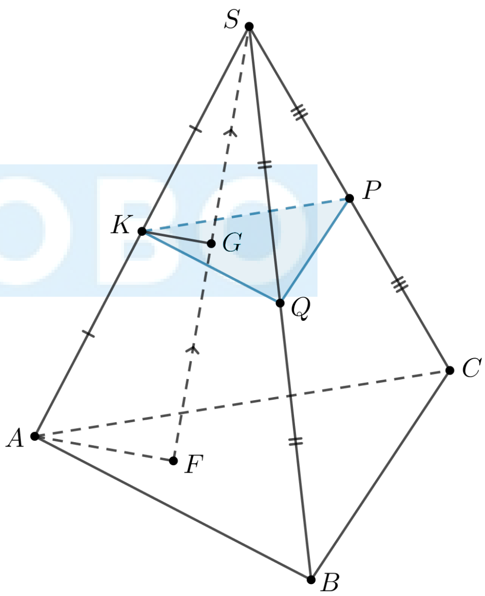
- Если две параллельные плоскости α и β пересечены третьей плоскостью γ, то линии пересечения плоскостей также параллельны:
$$\alpha \parallel \beta,\ \alpha \cap \gamma = a,\ \beta \cap \gamma = b \quad \Rightarrow \quad a \parallel b.$$



- Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны:

$$\alpha \parallel \beta,\ a \parallel b \quad \Rightarrow \quad A_1B_1 = A_2B_2$$

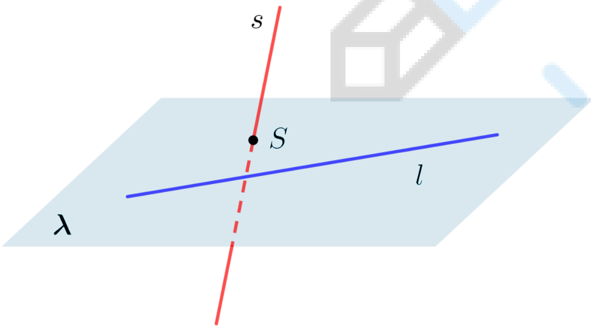




Распространенный сюжет
На практике часто встречается следующая конструкция. Дана треугольная пирамида $SABC$, через середину K ребра AS проведена плоскость α, параллельная основанию пирамиды. Пусть P и Q — точки пересечения α с ребрами SC и SB пирамиды соответственно.
Прямая KQ параллельна AB, так как $\alpha \parallel (ABC)$, кроме того она проходит через середину K отрезка SA, следовательно, KQ — средняя линия в треугольнике ASB, а точка Q — середина SB. Аналогично доказывается, что P — середина SC. Более того, какую бы точку F в плоскости основания мы ни взяли, плоскость α будет делить отрезок SF пополам. Действительно, KG снова будет средней линией в треугольнике ASF.

2.4 Скрещивающиеся прямые

Определение Две прямые в пространстве называются скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости.

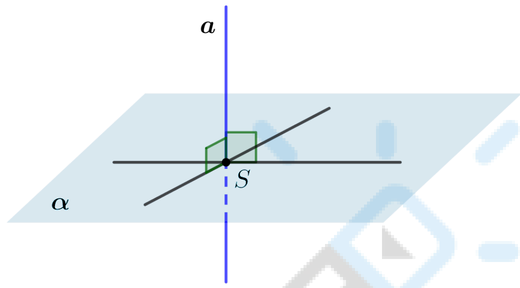


Признак скрещивающихся прямых: Если прямая l лежит в плоскости λ, а прямая s пересекает плоскость λ в точке S, не лежащей на прямой l, то прямые l и s скрещиваются.

3 Перпендикулярность

3.1 Перпендикулярность прямой и плоскости

Определение Прямая называется перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.



Признак перпендикулярности прямой и плоскости: если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в данной плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

Свойства:

- Если две прямые перпендикулярны одной плоскости, то они параллельны.
- Если прямая перпендикулярна плоскости, то она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости

3.2 Сюжет, встречающийся на ЕГЭ из года в год

В ЕГЭ достаточно часто встречаются задачи, сводящиеся к следующей конструкции. На отрезке как на основании построены два равнобедренных треугольника, не лежащие в одной плоскости. Тогда основание треугольников и прямая, проходящая через вершины треугольников, перпендикулярны.

№13, ЕГЭ 2022, досрочная волна

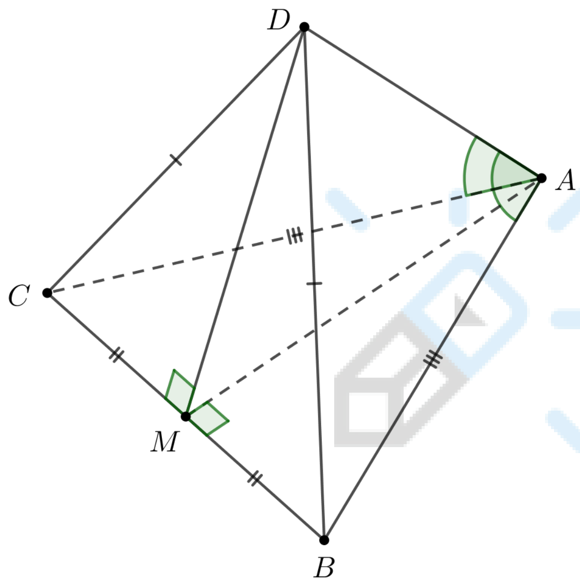
Дан правильный треугольник ABC и точка D, не лежащая в плоскости треугольника, построенная таким образом, что $\cos\angle DAC = \cos\angle DAB = 0{,}2$.

а) Докажите, что прямые DA и BC перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между DA и BC, если $AB = 2$.

Решение

а) Так как $\cos\angle DAC = \cos\angle DAB$, то углы DAC и DAB равны. Рассмотрим треугольники DAB и DAC. В них DA — общая сторона, $AB = AC$, так как $\triangle ABC$ равносторонний, и $\angle DAB = \angle DAC$. Значит, треугольники DAB и DAC равны по первому признаку. В равных треугольниках соответственные элементы равны, следовательно, $DB = DC$. Теперь мы получили конструкцию, описанную выше. Докажем, что $BC \perp DA$.

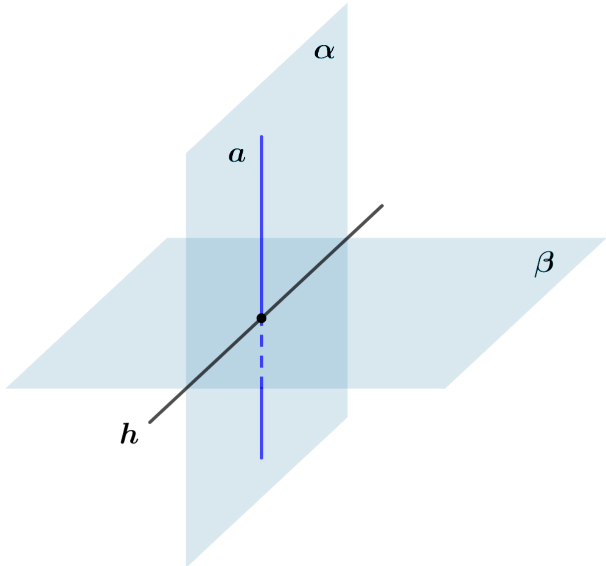


Пусть M — середина BC. Тогда AM — высота и медиана равностороннего треугольника ABC, а DM — высота и медиана равнобедренного треугольника DBC. Значит, $BC \perp AM$ и $BC \perp DM$. Следовательно, $BC \perp (AMD)$. Прямая, перпендикулярная плоскости, перпендикулярна каждой прямой, лежащей в этой плоскости, значит, $BC \perp DA$.

3.3 Перпендикулярность двух плоскостей

Признак перпендикулярности двух плоскостей: Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

$$a \perp \beta,\ a \subset \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha \perp \beta$$



Рассмотрим на примере, как можно применять признак перпендикулярности двух плоскостей. Докажем пункт а) задачи ЕГЭ.

№13, ЕГЭ 2020, основная волна

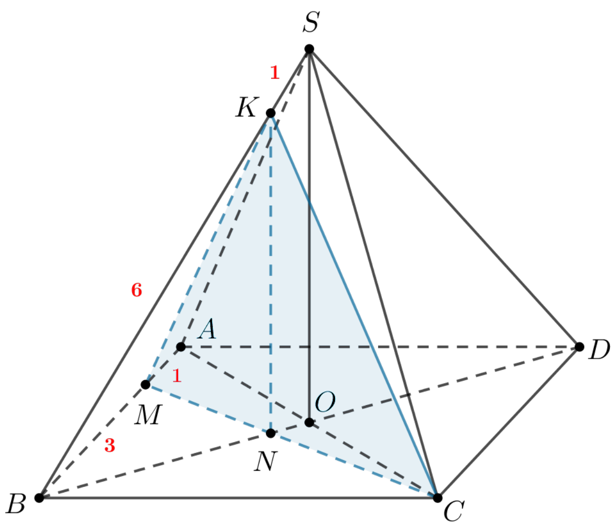
В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $AB = 4$, а боковое ребро $SA = 7$. На рёбрах AB и SB отмечены точки M и K соответственно, причём $AM = SK = 1$.

а) Докажите, что плоскость (CKM) перпендикулярна плоскости (ABC).

б) Найдите объём пирамиды $BCKM$.

Решение

а) Пусть BD и CM пересекаются в точке N, а точка O — основание высоты пирамиды, то есть точка пересечения AC и BD.



Рассмотрим плоскость (ABC). В ней по теореме Менелая для треугольника ABO и секущей MN имеем:

$$\frac{ON}{NB}\cdot\frac{BM}{MA}\cdot\frac{AC}{CO}=1 \quad\Rightarrow\quad \frac{ON}{NB}=\frac{AM}{BM}\cdot\frac{CO}{AC}=\frac{1}{4-1}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6} \quad\Rightarrow\quad \frac{ON}{NB}=\frac{1}{6}=\frac{SK}{KB}$$

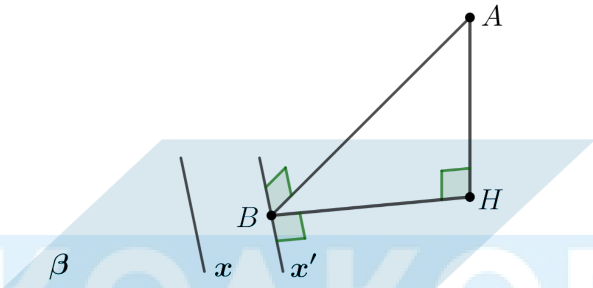
Рассмотрим плоскость (BSD). В ней из полученного отношения по теореме, обратной теореме о пропорциональных отрезках, получаем, что $KN \parallel SO$, значит, $KN \perp (ABC)$. Тогда плоскость (CKM) содержит прямую, перпендикулярную плоскости (ABC), то есть $(CKM) \perp (ABC)$.

3.4 Теорема о трех перпендикулярах (ТТП)

Пусть AH — перпендикуляр к плоскости β. Пусть AB, BH — наклонная и ее проекция на плоскость β. Прямая x в плоскости β перпендикулярна наклонной тогда и только тогда, когда она перпендикулярна проекции:

$$\text{Прямая ТТП: } AH\perp\beta,\ BH\perp x \quad\Rightarrow\quad AB\perp x$$

$$\text{Обратная ТТП: } AH\perp\beta,\ AB\perp x \quad\Rightarrow\quad BH\perp x$$



Заметим, что прямая x необязательно должна проходить через точку B. Если она не проходит через точку B, то строится прямая x', проходящая через точку B и параллельная x. Если, например, $x'\perp BH$, то и $x\perp BH$.

4 Расстояние между объектами

4.1 Расстояние между параллельными прямыми/плоскостями

Определение Расстояние между двумя объектами (прямой или плоскостью) — это длина отрезка, перпендикулярного обоим объектам.

Для параллельных объектов все совсем просто:

- Для того, чтобы найти расстояние между параллельными прямыми, нужно из любой точки одной прямой опустить перпендикуляр на другую прямую.
- Для того, чтобы найти расстояние между плоскостью и параллельной ей прямой, нужно из любой точки прямой опустить перпендикуляр на эту плоскость.
- Для того, чтобы найти расстояние между параллельными плоскостями, нужно из любой точки одной плоскости опустить перпендикуляр к другой плоскости.

4.2 Расстояние от точки до плоскости

Определение Расстояние от точки до плоскости равно длине перпендикуляра из точки на эту плоскость.

Рассмотрим два важнейших способа нахождения расстояния от точки до плоскости на примере задачи из ЕГЭ 2016 (см. пункт (б)). Первый способ — через объем пирамиды, второй — через построение перпендикуляра в явном виде.

№13, ЕГЭ 2016

На ребрах CD и BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 12 отмечены точки P и Q соответственно, причем $DP = 4$, $B_1Q = 3$. Плоскость (APQ) пересекает ребро CC_1 в точке M.

а) Докажите, что точка M является серединой ребра CC_1.

б) Найдите расстояние от точки B до плоскости (APQ).

Решение

Обозначим плоскость (APQ) через α.

а) Продлим прямую AP до пересечения с прямой BC в точке E. Точка E лежит в плоскости α, а также в плоскости (BCB_1). Тогда и QE лежит в плоскости (BCB_1), значит, точка пересечения QE и CC_1 и есть точка M.

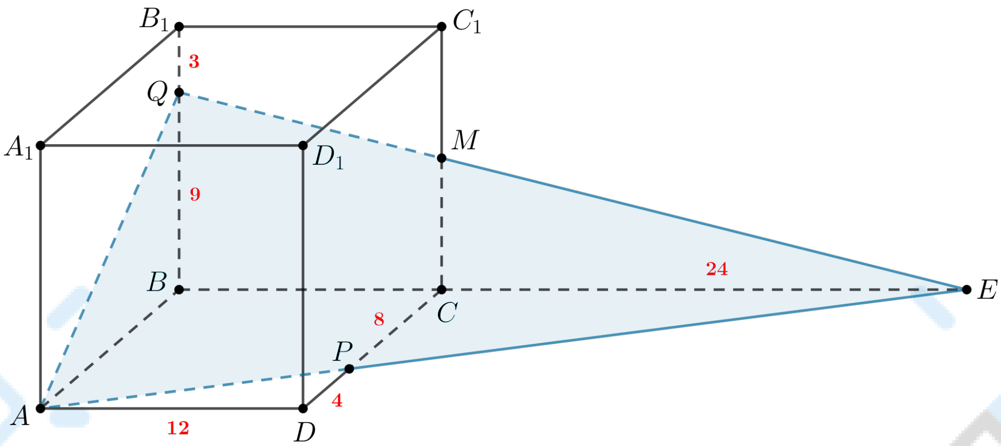
$AD \parallel CE \quad \Rightarrow \quad \triangle APD \sim \triangle EPC$ по углам с коэффициентом

$$\frac{DP}{PC} = \frac{4}{12-4} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad CE = 2AD = 24.$$

$MC \parallel QB \quad \Rightarrow \quad \triangle EMC \sim \triangle EQB$ по углам с коэффициентом

$$\frac{EC}{EB} = \frac{24}{24+12} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad MC = \frac{2}{3}QB = \frac{2}{3}(12-3) = 6 = \frac{1}{2}CC_1.$$

Получили, что M — середина CC_1, что и требовалось доказать.



б) **I способ**

Пусть V — объем пирамиды $ABEQ$, h — искомое расстояние от точки B до плоскости α. Заметим, что QB совпадает с высотой из точки Q на плоскость (ABE). Тогда можем записать V двумя способами.

$$\frac{1}{3}S_{ABE}\cdot QB = V = \frac{1}{3}S_{AQE}\cdot h;$$
$$h = \frac{S_{ABE}\cdot QB}{S_{AQE}}.$$

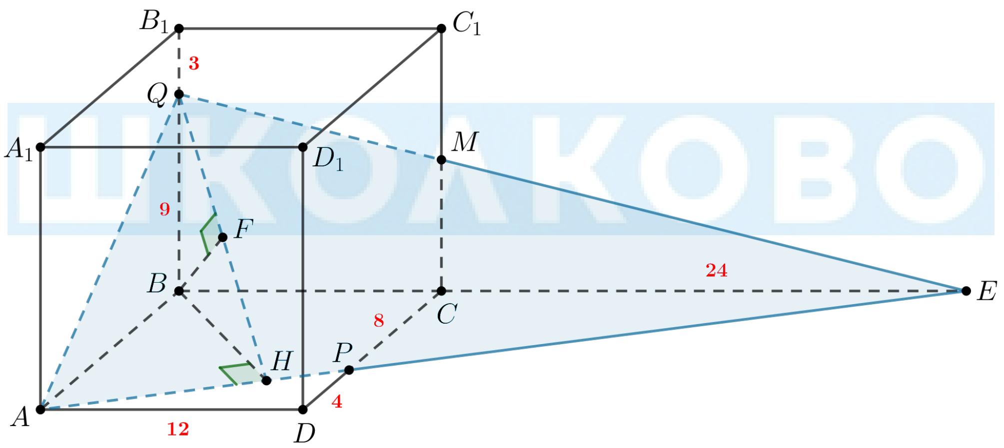
По теореме Пифагора для треугольников

$$\begin{aligned}
&\triangle\, AQB: \;\; AQ=\sqrt{AB^2+BQ^2}=15;\\
&\triangle\, BQE: \;\; QE=\sqrt{BQ^2+BE^2}=9\sqrt{17};\\
&\triangle\, ABE: \;\; AE=\sqrt{AB^2+BE^2}=12\sqrt{10}.
\end{aligned}$$

По теореме косинусов для угла Q треугольника AQE :

$$\begin{aligned}
&AE^2=QA^2+QE^2-2QA\cdot QE\cos\angle Q;\\
&\cos\angle Q=\frac{QA^2+QE^2-AE^2}{2QA\cdot QE}=\frac{225+1377-1440}{270\sqrt{17}}=\frac{162}{270\sqrt{17}};\\
&\sin\angle Q=\sqrt{1-\cos^2\angle Q}=\frac{\sqrt{1213056}}{270\sqrt{17}}=\frac{216\sqrt{26}}{270\sqrt{17}}\quad(\sin\angle Q>0);\\
&S_{AQE}=\frac{1}{2}AQ\cdot QE\sin\angle Q=\frac{15\cdot 9\sqrt{17}\cdot 108\sqrt{26}}{270\sqrt{17}}=54\sqrt{26};\\
&h=\frac{S_{ABE}\cdot QB}{S_{AQE}}=\frac{AB\cdot BE\cdot QB}{2S_{AQE}}=\frac{36}{\sqrt{26}}.
\end{aligned}$$

II способ



Произведем дополнительное построение. Пусть H — основание высоты из B в треугольнике ABE, а F — основание высоты из B в треугольнике BQH. Докажем, что BF перпендикулярна плоскости (AQE).

По теореме о трех перпендикулярах $QH\perp AE$, так как $BH\perp AE$. Тогда $AE\perp BH$ и $AE\perp QH \quad\Rightarrow\quad AE$ перпендикулярна плоскости (QBH). Тогда $BF\perp AE$, так как лежит в (QBH), при этом $BF\perp QH$ по построению. Получили, что BF перпендикулярна прямым QH и AE из плоскости (AQE), а значит перпендикулярна всей плоскости. Осталось найти длину BF, чтобы решить задачу.

$\triangle ABE$ — прямоугольный, тогда его высота

$$BH=\frac{AB\cdot BE}{AE}=\frac{AB\cdot BE}{\sqrt{AB^2+BE^2}}=\frac{432}{12\sqrt{10}}=\frac{36}{\sqrt{10}}.$$

Аналогично для $\triangle QBH$:

$$BF=\frac{BQ\cdot BH}{QH}=\frac{BQ\cdot BH}{\sqrt{BQ^2+BH^2}}=\frac{\frac{36\cdot 9}{\sqrt{10}}}{\frac{9\sqrt{26}}{\sqrt{10}}}=\frac{36}{\sqrt{26}}.$$

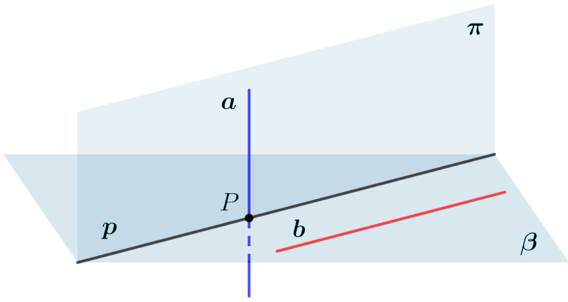
4.3 Расстояние между скрещивающимися прямыми

Расстояние между скрещивающимися прямыми — это длина отрезка, перпендикулярного обеим скрещивающимся прямым. Так как зачастую в таком виде искать расстояние между скрещивающимися прямыми неудобно, существует альтернативный алгоритм поиска расстояния между скрещивающимися прямыми.

Способ 1.

Шаг 1. Через одну из двух скрещивающихся прямых a провести плоскость π параллельно другой прямой b. Как это сделать: проведем плоскость β через прямую b так, чтобы она пересекала прямую a в точке P; через точку P проведем прямую $p \parallel b$; тогда плоскость, проходящая через a и p, и есть плоскость π.

Шаг 2. Найти расстояние от любой точки прямой b до плоскости π. Это расстояние и есть расстояние между скрещивающимися прямыми a и b.



Применим способ на практике. Рассмотрим следующую задачу.

№13, ЕГЭ 2020

В правильной четырёхугольной пирамиде $PABCD$ сторона основания $ABCD$ равна 12, а боковое ребро PA равно $12\sqrt{2}$. Через вершину A проведена плоскость α, перпендикулярная прямой PC и пересекающая ребро PC в точке K.

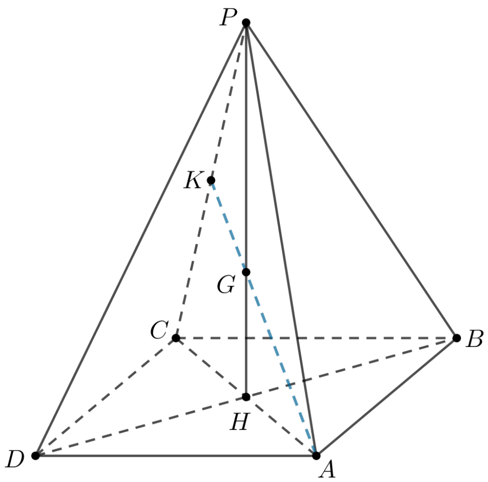
а) Докажите, что плоскость α делит высоту PH пирамиды $PABCD$ в отношении $2:1$, считая от вершины P.

б) Найдите расстояние между прямыми PH и BK.

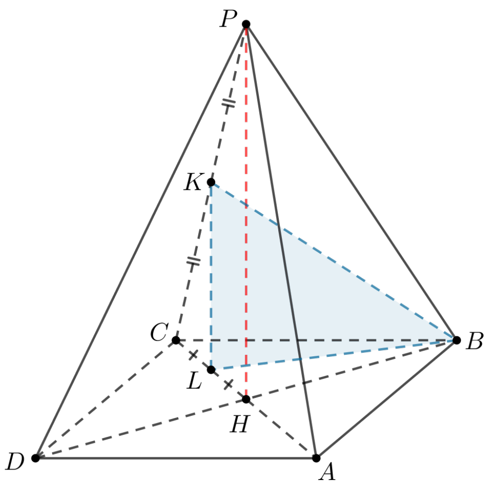
Решение

а) Прямая $AK \perp CP$, так как AK принадлежит плоскости α, перпендикулярной PC. Пусть AK пересекает PH в точке G, тогда нам нужно доказать, что $PG : GH = 2 : 1$.

Рассмотрим треугольник PAC. Его сторона AC равна $12\sqrt{2}$ как диагональ квадрата со стороной 12. Получили, что $PC = PA = 12\sqrt{2} = AC$, следовательно, треугольник PAC равносторонний. Поскольку AK и PH — его высоты, а значит и медианы, то ясно, что медиана AK делит медиану PH в отношении $2:1$, считая от точки P.



б) Отрезок CH является проекцией отрезка CP на плоскость основания. Пусть L — проекция середины K отрезка CP на основание, тогда L — середина CH и $KL \perp (ABC)$, откуда $KL \parallel PH$. Из этого следует, что прямая PH параллельна плоскости (KBL).



Таким образом, расстояние между прямыми PH и BK равно расстоянию между прямой PH и плоскостью (KBL).

Рассмотрим высоту h из вершины H треугольника LBH. Имеем $h \perp PH$, а также h перпендикулярна двум прямым LK (так как $LK \parallel PH$) и LB плоскости (KBL). Тогда длина h это и есть расстояние между прямой PH и плоскостью (KBL).

Так как $LH = \frac{1}{4}AC = 3\sqrt{2}$, то по теореме Пифагора для прямоугольного треугольника LBH :

$$BL = \sqrt{HL^2 + HB^2} = \sqrt{18+72} = 3\sqrt{10}.$$

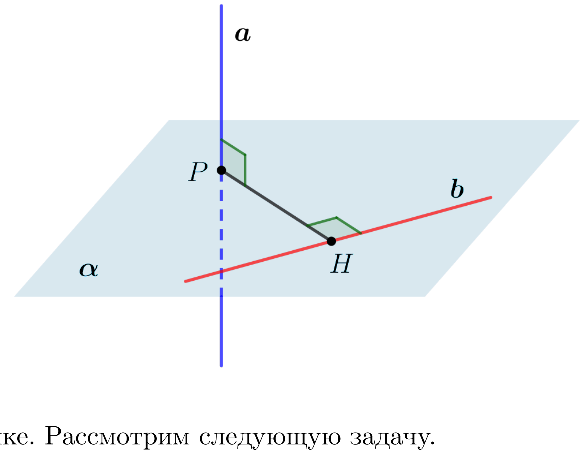
Снова из прямоугольного треугольника LBH :

$$h = \frac{HL \cdot HB}{LB} = \frac{36}{3\sqrt{10}} = \frac{12}{\sqrt{10}}.$$

Способ 2.

Шаг 1. Через одну из двух скрещивающихся прямых, например, чем прямую b, провести плоскость α, перпендикулярную прямой a. Тогда прямая a перпендикулярна любой прямой, лежащей в α. Пусть P — точка пересечения прямой a с плоскостью α.

Шаг 2. Провести перпендикуляр PH на прямую b. Тогда $PH \perp a$ и $PH \perp b$, следовательно, PH — искомое расстояние.



Применим способ на практике. Рассмотрим следующую задачу.

№13, ЕГЭ 2019

Дана пирамида $SABC$, в которой $SC = SB = AB = AC = \sqrt{17}$, $SA = BC = 2\sqrt{5}$.

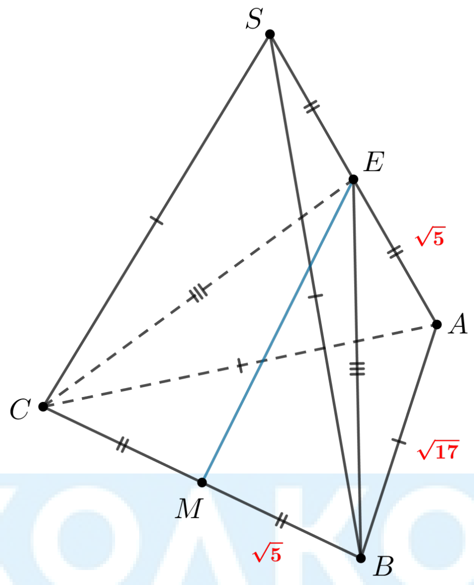
а) Докажите, что ребро SA перпендикулярно ребру BC.

б) Найдите расстояние между ребрами BC и SA.

Решение

Заметим, что пункт а) мы разбирали в одном из предыдущих сюжетов, так как треугольники SBC и ABC равнобедренные по условию $\left(SC = SB = AB = AC = \sqrt{17}\right)$. Тогда $BC \perp SA$.

б) Треугольники CSA и BSA равны по трем сторонам: SA — общая, $CS = CA = BS = BA$, следовательно, их медианы тоже равны: $CE = BE$.



Проведем медиану EM в равнобедренном треугольнике ECB. Отрезок EM перпендикулярен прямой SA, так как лежит в плоскости (CEB) (по пункту а) $SA \perp (CEB)$), а также перпендикулярен CB, так как медиана к основанию в равнобедренном треугольнике является высотой. Получили, что EM перпендикулярен и SA, и CB, следовательно, его длина равна расстоянию между SA и CB.

Осталось найти длину EM. По теореме Пифагора для треугольника EAB :

$$EB = \sqrt{AB^2 - EA^2} = \sqrt{AB^2 - \left(\frac{SA}{2}\right)^2} = \sqrt{17 - 5} = 2\sqrt{3}.$$

По теореме Пифагора для треугольника EMB :

$$EM = \sqrt{EB^2 - MB^2} = \sqrt{EB^2 - \left(\frac{CB}{2}\right)^2} = \sqrt{12 - 5} = \sqrt{7}.$$

5 Углы между объектами

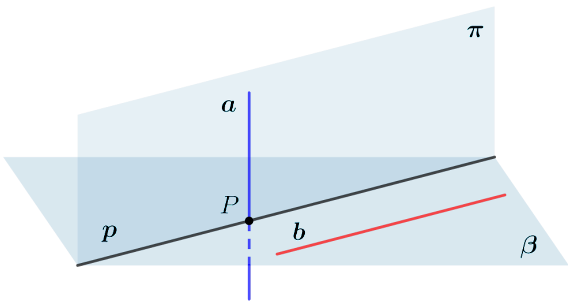
5.1 Угол между скрещивающимися прямыми

Определение Угол между скрещивающимися прямыми — это угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным прямым.

Алгоритм нахождения угла между скрещивающимися прямыми a и b :

Шаг 1. Через одну из двух скрещивающихся прямых a провести плоскость π параллельно другой прямой b. Как это сделать: проведем плоскость β через прямую b так, чтобы она пересекала прямую a в точке P; через точку P проведем прямую $p \parallel b$; тогда плоскость, проходящая через a и p, и есть плоскость π.

Шаг 2. В плоскости π найти угол между прямыми a и p ($p \parallel b$). Угол между ними — угол между скрещивающимися прямыми a и b.



Рассмотрим пример применения данного алгоритма. Решим пункт а) задачи ЕГЭ.

№13, ЕГЭ 2018

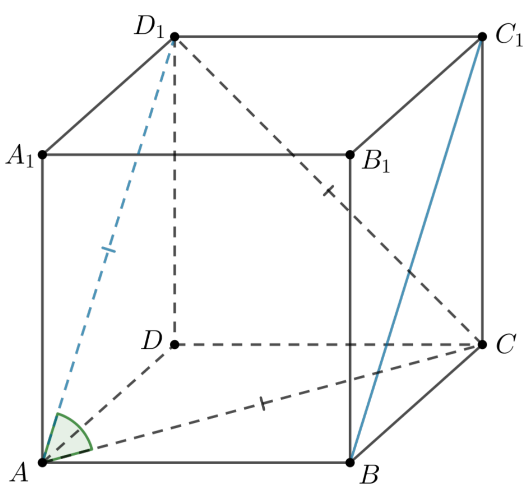
В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все ребра равны 6.

а) Докажите, что угол между прямыми AC и BC_1 равен 60°.

б) Найдите расстояние между прямыми AC и BC_1.

Решение

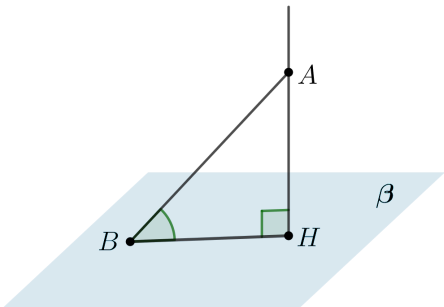
а) Отрезки AB и C_1D_1 равны и параллельны, следовательно, ABC_1D_1 — параллелограмм и $AD_1 \parallel BC_1$. Тогда угол CAD_1 между пересекающимися прямыми AC и AD_1 — это и есть угол между скрещивающимися прямыми AC и BC_1.



Рассмотрим треугольник AD_1C. Все его стороны являются диагоналями равных квадратов — граней куба, следовательно, треугольник AD_1C — равносторонний и искомый угол CAD_1 равен 60°.

5.2 Угол между прямой и плоскостью

Определение Угол между наклонной прямой и плоскостью — это угол между этой прямой и ее проекцией на данную плоскость.



Таким образом, данный угол принимает значения из промежутка $(0°; 90°)$. Если прямая лежит в плоскости, то угол между ними считается равным 0°. Если прямая перпендикулярна плоскости, то угол между ними равен 90°.

Алгоритм нахождения угла между прямой и плоскостью

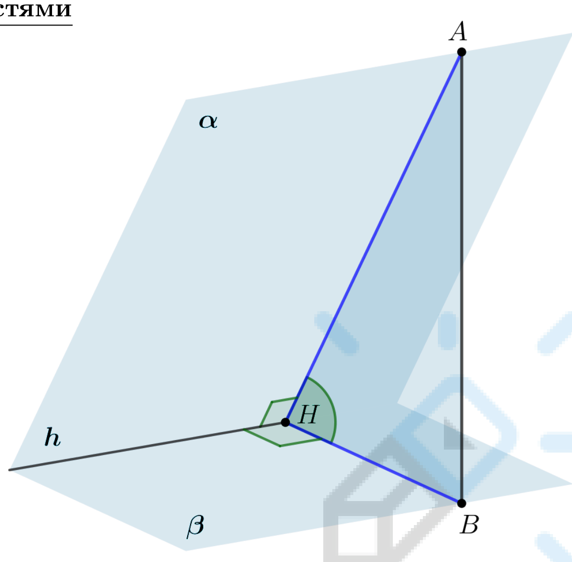
Угол между наклонной прямой и плоскостью можно найти, если отметить некоторую точку A на этой прямой и провести перпендикуляр AH к плоскости. Если B — точка пересечения прямой с плоскостью, то $\angle ABH$ и есть искомый угол.

5.3 Угол между плоскостями

Определение Угол между плоскостями — это угол между перпендикулярами к линии их пересечения, проведенными в этих плоскостях.

Формальный метод нахождения угла между плоскостями

Шаг 1. Отметить произвольную точку A в плоскости α.
Шаг 2. Провести $AH \perp h$, где h — линия пересечения плоскостей.
Шаг 3. Провести AB перпендикулярно плоскости β.



Тогда AB — перпендикуляр к плоскости β, AH — наклонная, следовательно, HB — проекция. Тогда по ТТП $HB \perp h$. Следовательно, $\angle AHB$ — линейный угол двугранного угла между плоскостями α и β. Градусная мера этого угла и есть градусная мера угла между плоскостями.
Заметим, что мы получили прямоугольный треугольник $\triangle AHB$ $(\angle B = 90°)$. Как правило, из него удобно находить $\angle AHB$.

Альтернативный метод, зачастую более применимый на практике

Суть метода заключается в том, чтобы найти некоторую «удобную» точку на прямой пересечения плоскостей, угол между которыми нас интересует, и восстановить в ней перпендикуляры к прямой пересечения плоскостей. Угол между этими перпендикулярами будет равен искомому углу между плоскостями. Чтобы лучше понять, что имеется в виду, рассмотрим следующую задачу.

№13, ЕГЭ 2021, основная волна

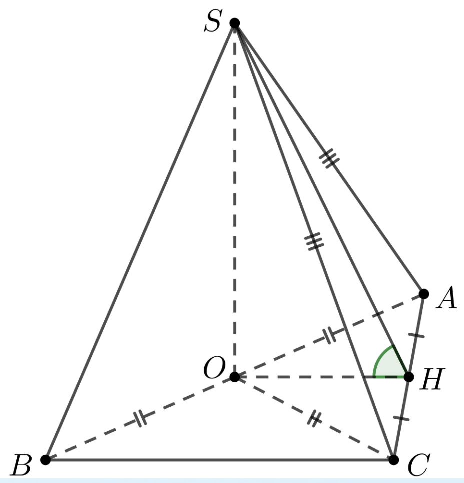
В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Основание высоты SO этой пирамиды является серединой ребра AB.

а) Докажите, что $SA = SC$.

б) Найдите угол между плоскостями (SAC) и (ABC), если $AC = 16$, $AB = 20$, $SA = 26$.

Решение

а) CO — медиана, проведенная к гипотенузе в прямоугольном треугольнике ABC, следовательно, равна ее половине и $OA = OB = OC$. Прямоугольные треугольники SOA и SOC равны по двум катетам: SO — общий, $OA = OC$, значит, их гипотенузы равны, то есть $SA = SC$.



б) Пусть H — середина AC, это и будет наша «удобная» точка. Тогда $OH \parallel BC$ как средняя линия в треугольнике ABC и $\angle AHO = \angle ACB = 90^\circ$. Проведем отрезок SH. $SO \perp (ABC)$, следовательно, OH — проекция наклонной SH на плоскость (ABC). Прямая AC перпендикулярна проекции OH, а значит по теореме о трех перпендикулярах и самой наклонной SH. Получили, что

$$SH \subset (SAC),\ SH \perp AC \text{ и } OH \subset (ABC),\ OH \perp AC.$$

Следовательно, угол SHO по определению является углом между плоскостями (SAC) и (ABC), так как он очевидно острый.

Дальнейшее нахождение угла SHO треугольника SHO — дело техники.

5.4 Связь между площадью фигуры и площадью ее проекции

Определение Площадь проекции фигуры на плоскость равна произведению площади фигуры и косинуса угла между плоскостью фигуры и плоскостью проекции.

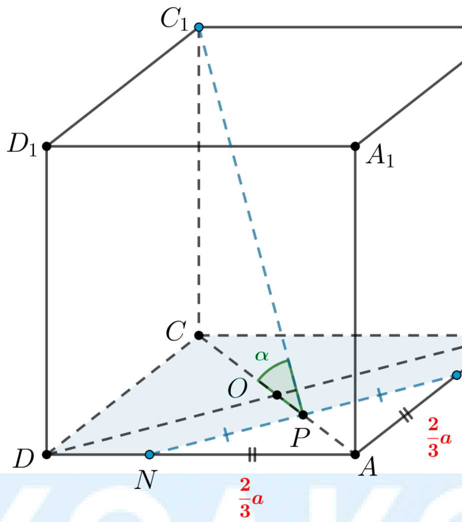
Зная этот факт, можно находить площадь фигуры или прощадь ее проекции, а также искать угол между плоскостями, зная площади фигуры и ее проекции.

Пример

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным a. На ребрах AB и AD основания $ABCD$ взяты точки M и N соответственно так, что $AM : MB = 2 : 1$ и $AN : ND = 2 : 1$. Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через точки M, N, C_1.

Решение

Обозначим γ — плоскость сечения. Независимо от того, в каких точках γ пересекает ребра BB_1 и DD_1 куба, проекцией сечения на плоскость (ABC) будет пятиугольник $DCBMN$. Найдем его площадь, а также угол между плоскостью сечения и плоскостью (ABC), чтобы найти площадь самого сечения. **Мы сможем найти площадь сечения, не строя само сечение.**



$$AM : MB = AN : ND = 2 : 1 \quad \Rightarrow \quad MN \parallel BD;$$
$$CA \perp DB \quad \Rightarrow \quad CP \perp MN.$$

По теореме от трех перпендикулярах C_1P также перпендикулярен MN, значит, угол α между PC_1 и PC равен углу между плоскостью сечения и плоскостью (ABC).

$$\left.\begin{aligned} &CO = OA = \tfrac{1}{2}CA = \frac{a}{\sqrt{2}} \\ &MP \parallel BO \quad \Rightarrow \quad \frac{OP}{PA} = \frac{BM}{MA} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad OP = \frac{1}{3}\cdot\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a}{3\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad CP = CO + OP = \frac{4a}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}a}{3}.$$

Тогда в прямоугольном треугольнике CPC_1 :

$$\cos\alpha = \frac{PC}{PC_1} = \frac{PC}{\sqrt{PC^2 + CC_1^2}} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}a}{\sqrt{\frac{8}{9}a^2 + a^2}} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}a}{\frac{\sqrt{17}}{3}a} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{17}}.$$

Пусть S — площадь сечения, S_p — площадь его проекции на (ABC), тогда

$$S = \frac{S_p}{\cos\alpha} = \frac{S_{ABCD} - S_{ANM}}{\cos\alpha} = \frac{a^2 - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}a\right)^2}{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{17}}} = \frac{\frac{7}{9}a^2}{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{17}}} = \frac{7\sqrt{17}}{18\sqrt{2}}a^2 = \frac{7\sqrt{34}}{36}a^2.$$

6 Построение сечений с примерами

Можно выделить три основных принципа, которыми мы пользуемся при построении сечений:

- Если две точки A и B принадлежат плоскости сечения, то и вся прямая AB принадлежит плоскости сечения. Пользуясь этим принципом, можно в любой непонятной ситуации перебирать пары точек, про которые мы уже знаем, что они принадлежат сечению, проводить через них прямые и таким образом искать новые точки сечения.

- Плоскость сечения пересекает параллельные плоскости по параллельным прямым. На практике это означает, что, например, плоскости, содержащие противоположные грани параллелепипеда, будут пересекаться с плоскостью сечения по параллельным прямым.

- Если плоскость сечения содержит прямую a, параллельную некоторой плоскости α, то она пересекает α по прямой, параллельной a.

Далее приведем несколько примеров, оформленных специально таким образом, что на каждом шаге используется один из трех принципов. Это позволит нам легко обосновывать полученные сечения.

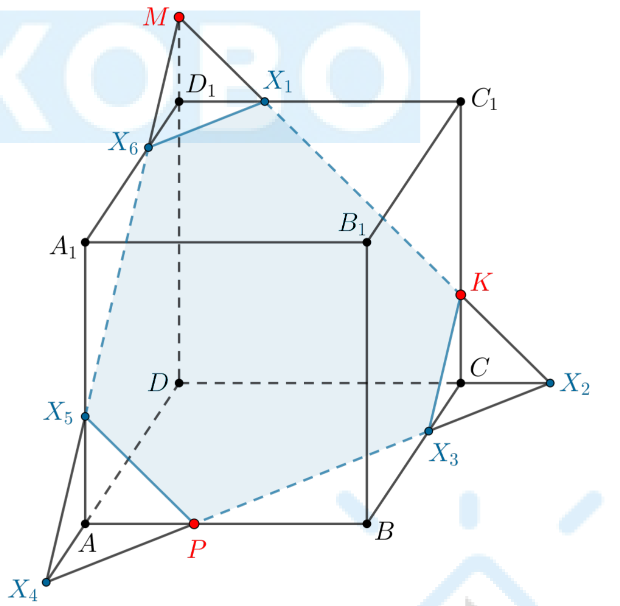
Точки сечения, которые мы строим, всюду ниже обозначены голубым и пронумерованы в том порядке, в котором мы их строим!

Пример 1

Постройте сечения куба, проходящее через точки M, K и P.

Решение

Обозначим через α плоскость сечения.



1. Все точки прямой MK принадлежат α, при этом $MK \subset (D_1C_1C)$. Тогда $X_1 = MK \cap D_1C_1$ и $X_2 = MK \cap DC$ принадлежат α.

2. Все точки прямой X_2P принадлежат α, при этом $X_2P \subset (ABC)$. Тогда $X_3 = X_2P \cap CB$ и $X_4 = X_2P \cap AD$ принадлежат α.

3. Все точки прямой X_4M принадлежат α, при этом $X_4M \subset (AA_1D_1)$. Тогда $X_5 = X_4M \cap AA_1$ и $X_6 = X_4M \cap A_1D_1$ принадлежат α.

4. Искомое сечение $X_1KX_3PX_5X_6$.

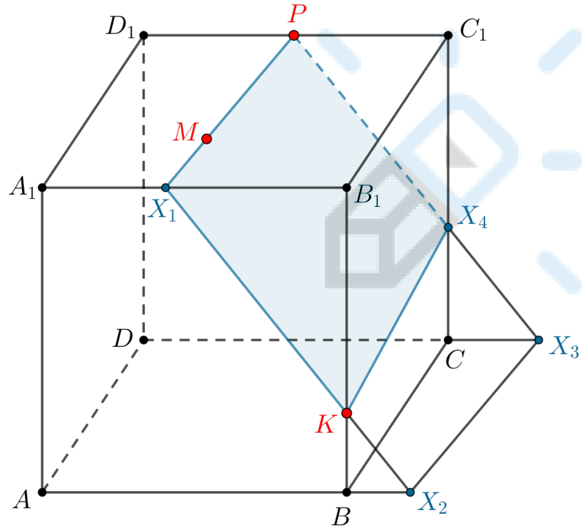
Пример 2

Постройте сечения куба, проходящее через точки M, K и P. Известно, что $M \in (A_1B_1C_1)$.

Решение

Обозначим через α плоскость сечения.

1. Все точки прямой MP принадлежат α, при этом $MP \subset (A_1B_1C_1)$. Тогда $X_1 = MP \cap A_1B_1$ принадлежит α.
2. Все точки прямой X_1K принадлежат α, при этом $X_1K \subset (AA_1B_1)$. Тогда $X_2 = X_1K \cap AB$ принадлежит α.
3. В кубе плоскости (ABC) и $(A_1B_1C_1)$ параллельны. Тогда прямые их пересечения с плоскостью α должны быть параллельны между собой. Таким образом, прямая пересечения плоскостей (ABC) и α должна быть параллельна прямой $X_1P = (A_1B_1C_1) \cap \alpha$, а также должна проходить через точку X_2, так как $X_2 \in (ABC)$ и $X_2 \in \alpha$. Тогда точка $X_3 \in DC$ такая, что $X_2X_3 \parallel X_1P$, принадлежит α.
4. Все точки прямой X_3P принадлежат α, при этом $X_3P \subset (DD_1C_1)$. Тогда $X_4 = X_3P \cap CC_1$ принадлежит α.
5. Искомое сечение X_1PX_4K.



$X_2X_3 \parallel X_1P$

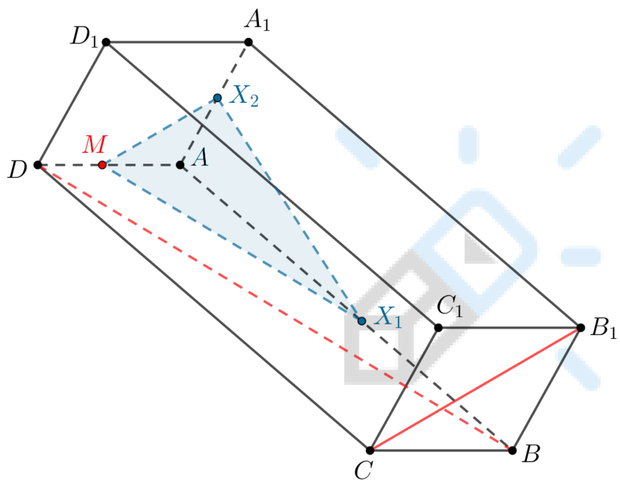
Пример 3

Точка M — середина ребра AD параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку M параллельно прямым BD и CB_1.

Решение

Обозначим плоскость сечения через α.

1. $\alpha \parallel BD$, а значит, пересекает (ABC) по прямой, параллельной BD и проходящей через точку M, так как $M \in (ABC)$ и $M \in \alpha$. Тогда точка $X_1 \in AB$ такая, что $BD \parallel MX_1$, принадлежит α.
2. В параллелепипеде плоскости (ADD_1) и (BCC_1) параллельны. Тогда прямые их пересечения с плоскостью α должны быть параллельны между собой и параллельны прямой CB_1, так как $\alpha \parallel CB_1$. Таким образом, прямая пересечения плоскостей (ADD_1) и α должна быть параллельна прямой CB_1, а также должна проходить через точку M, так как $M \in (ADD_1)$ и $M \in \alpha$. Тогда точка $X_2 \in AA_1$ такая, что $MX_2 \parallel CB_1$, принадлежит α.
3. Искомое сечение MX_1X_2.



$MX_1 \parallel DB$
$MX_2 \parallel CB_1$, так как $CB_1 \parallel (ADD_1)$

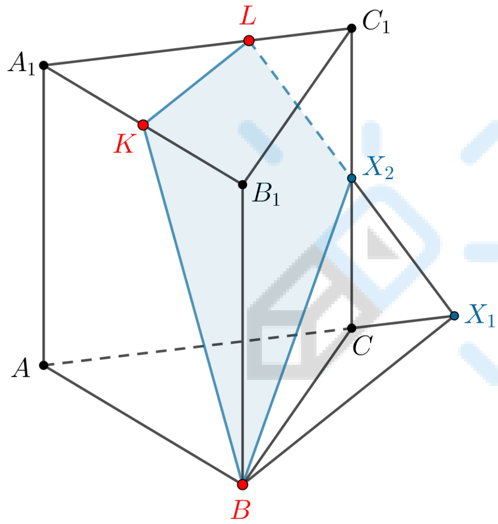
Пример 4

Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Точка K — середина ребра A_1B_1, точка L делит ребро A_1C_1 в отношении $A_1L : LC_1 = 2 : 1$. Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки B, K и L.

Решение

Обозначим через α плоскость сечения.

1. Плоскости (ABC) и $(A_1B_1C_1)$ параллельны, следовательно, плоскость α пересекает их по параллельным прямым. Построим через точку B прямую l, параллельную KL. Все точки этой прямой принадлежат α, значит, и $X_1 = l \cap AC$ принадлежит α.
2. Все точки прямой X_1L принадлежат α, при этом $X_1L \subset (ACC_1)$. Тогда $X_2 = CC_1 \cap X_1L$ принадлежит α.
3. Искомое сечение $BKLX_2$.



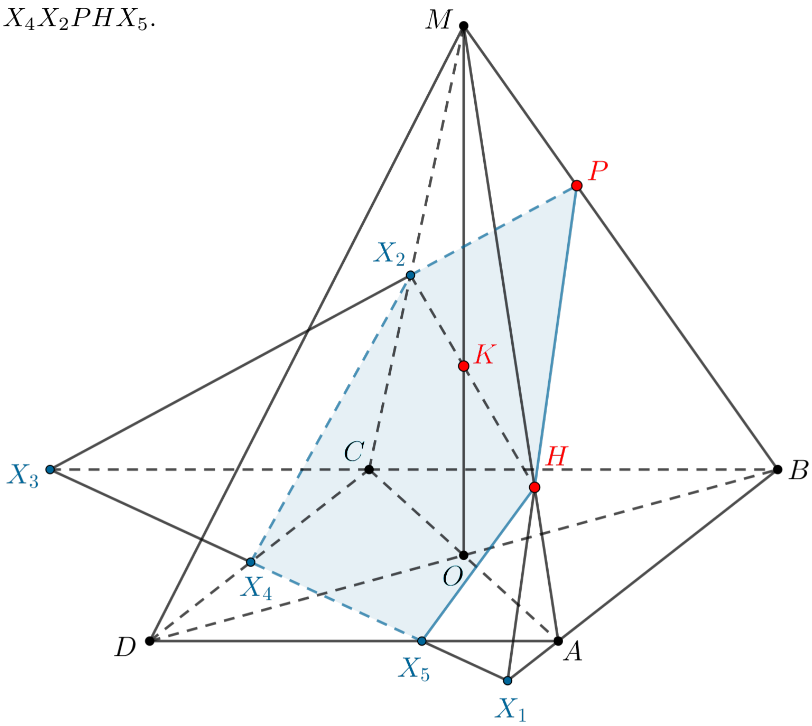
Пример 5

Точка O — центр основания правильной четырехугольной пирамиды $MABCD$. Точки K и P на отрезках MO и MB соответственно делят их в равных отношениях $MK : KO = BP : PM = 2 : 1$, точка H на ребре MA такова, что $MH : HA = 3 : 1$. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки K, P и H.

Решение

Обозначим через α плоскость сечения.

1. Все точки прямой HP принадлежат α, при этом $HP \subset (MBA)$. Тогда $X_1 = AB \cap HP$ принадлежит α.
2. Все точки прямой HK принадлежат α, при этом $HK \subset (MCA)$. Тогда $X_2 = MC \cap HK$ принадлежит α.
3. Все точки прямой PX_2 принадлежат α, при этом $PX_2 \subset (MBC)$. Тогда $X_3 = BC \cap PX_2$ принадлежит α.
4. Все точки прямой X_1X_3 принадлежат α, при этом $X_1X_3 \subset (ABC)$. Тогда $X_4 = X_1X_3 \cap DC$ и $X_5 = X_1X_3 \cap DA$ принадлежат α.
5. Искомое сечение $X_4X_2PHX_5$.



Пример 6

В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ точки K, M и N — середины ребер SC, SE и AB соответственно. Постройте сечение пирамиды плоскостью (MKN).

Решение

Обозначим через α плоскость сечения.

$MK \parallel EC$ как средняя линия в треугольнике SEC, следовательно, плоскость α параллельна прямой EC, лежащей в плоскости (ABC) основания пирамиды. Тогда α пересекает плоскость (ABC) по прямой, параллельной EC и проходящей через точку N. Пусть X_1 — точка пересечения этой прямой с FA. Несложно видеть, что X_1 — середина FA, так как $EC \parallel FB \parallel X_1N$ и N — середина AB по условию.

1. Все точки прямой X_1N принадлежат α, при этом $X_1N \subset (ABC)$. Тогда $X_2 = FE \cap X_1N$, $X_3 = BC \cap X_1N$ и $X_4 = DC \cap X_1N$ принадлежат α.
2. Все точки прямой X_2M принадлежат α, при этом $X_2M \subset (SFE)$. Тогда $X_5 = X_2M \cap SF$ принадлежит α.
3. Все точки прямой X_3K принадлежат α, при этом $X_3K \subset (SBC)$. Тогда $X_6 = X_3K \cap SB$ принадлежит α.
4. Все точки прямой X_4K принадлежат α, при этом $X_4K \subset (SDC)$. Тогда $X_7 = X_4K \cap SD$ принадлежит α.
5. Искомое сечение $X_1X_5MX_7KX_6N$.