

Правильная пирамида

Пирамида называется правильной, если в основании пирамиды лежит правильный многоугольник, а вершина пирамиды проецируется в центр этого многоугольника, то есть в центр его вписанной/описанной окружностей.

Пирамида $PA_1A_2\dots A_n$ является правильной, если в ее основании лежит правильный многоугольник $A_1A_2\dots A_n$ (PH — высота пирамиды) и выполнено одно из эквивалентных условий:

- боковые ребра пирамиды равны:

$$PA_1 = PA_2 = \dots = PA_n;$$

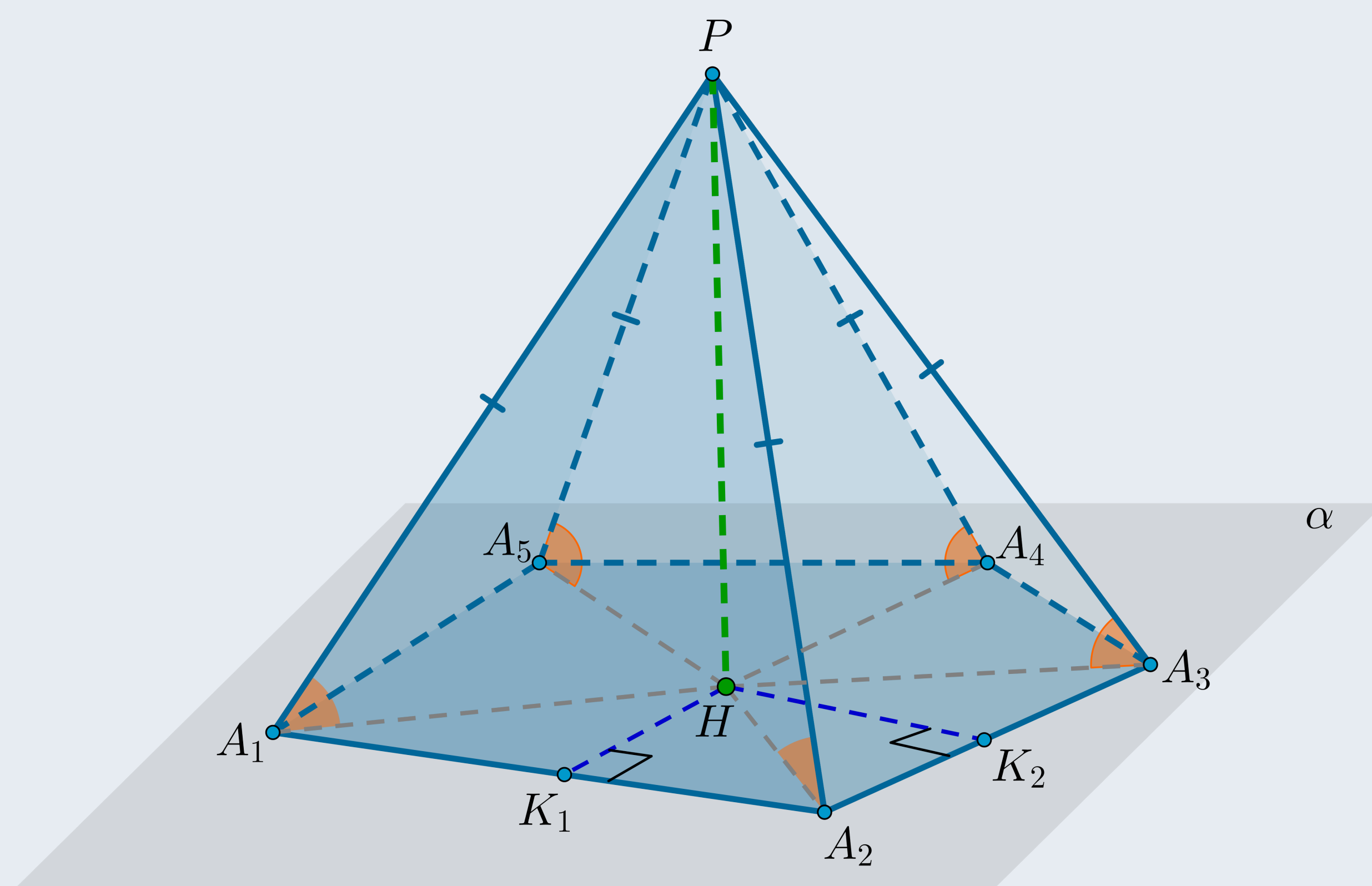
- боковые ребра наклонены к плоскости основания под одинаковым углом:

$$\angle PA_1H = \angle PA_2H = \dots = \angle PA_nH;$$

- боковые грани наклонены к плоскости основания под одинаковым углом:

$$\angle PK_1H = \angle PK_2H = \dots = \angle PK_nH,$$

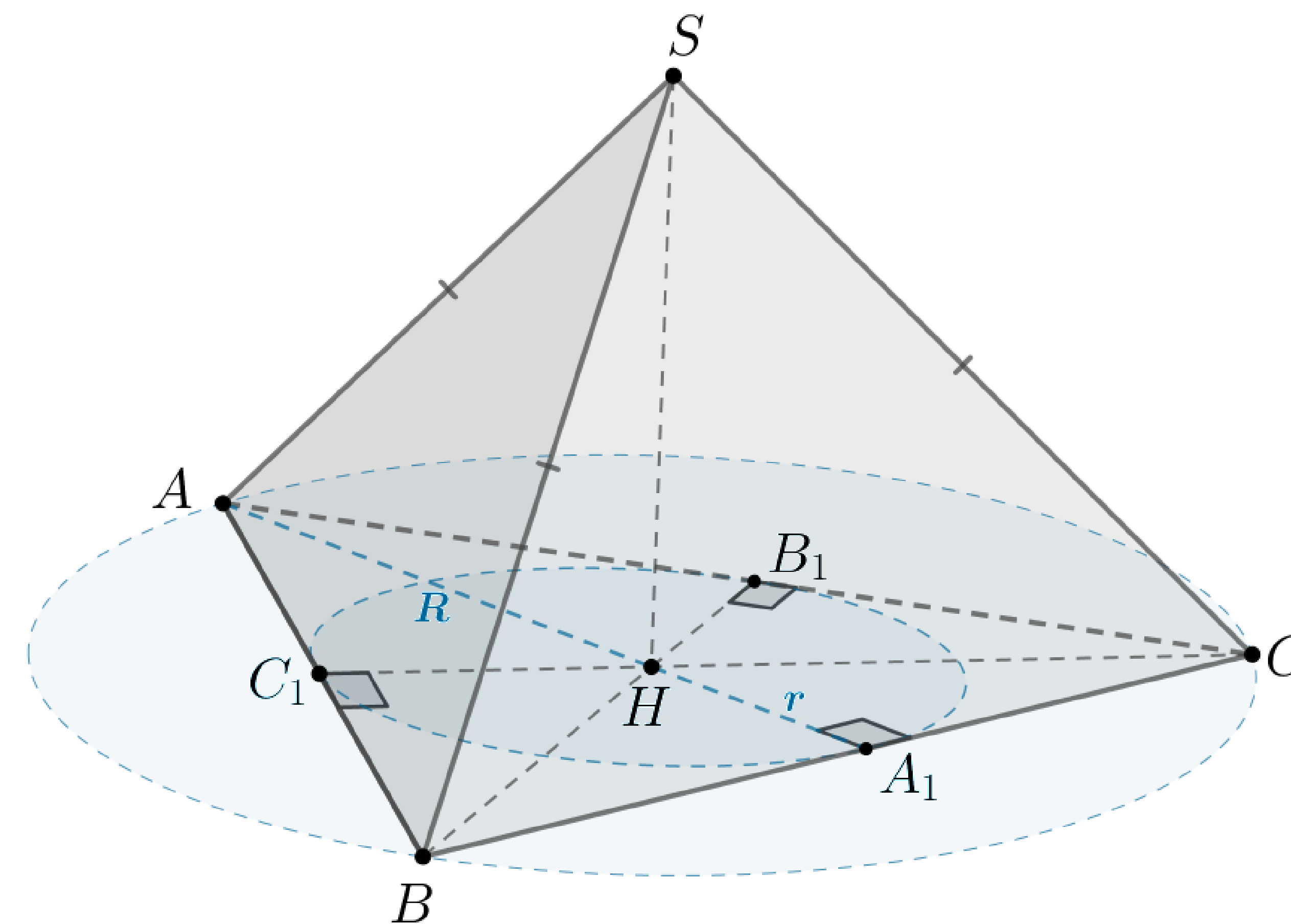
где $HK_1, HK_2, \dots, HK_n$ — перпендикуляры к сторонам основания.



Например, на рисунке изображена правильная пирамида $PA_1A_2A_3A_4A_5$.

Правильная треугольная пирамида

$SABC$ — правильная треугольная пирамида, боковые ребра $SA = SB = SC$, основание $\triangle ABC$ — правильный треугольник.



Отличительные свойства:

- Скрещивающиеся ребра взаимно перпендикулярны:
 $SA \perp BC, SB \perp AC, SC \perp AB$.
- Если SH — высота пирамиды, то H — точка пересечения медиан (высот, биссектрис) AA_1, BB_1, CC_1 основания.
- Центры вписанной и описанной сфер лежат на высоте SH пирамиды.
- Если a — сторона основания, то высота основания быстро ищется по формуле
$$h_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$
- $\angle SAH = \angle SBH = \angle SCH$ — углы между боковыми ребрами и основанием.
- $\angle SA_1H = \angle SB_1H = \angle SC_1H$ — линейные углы двугранных углов между боковыми гранями и основанием.

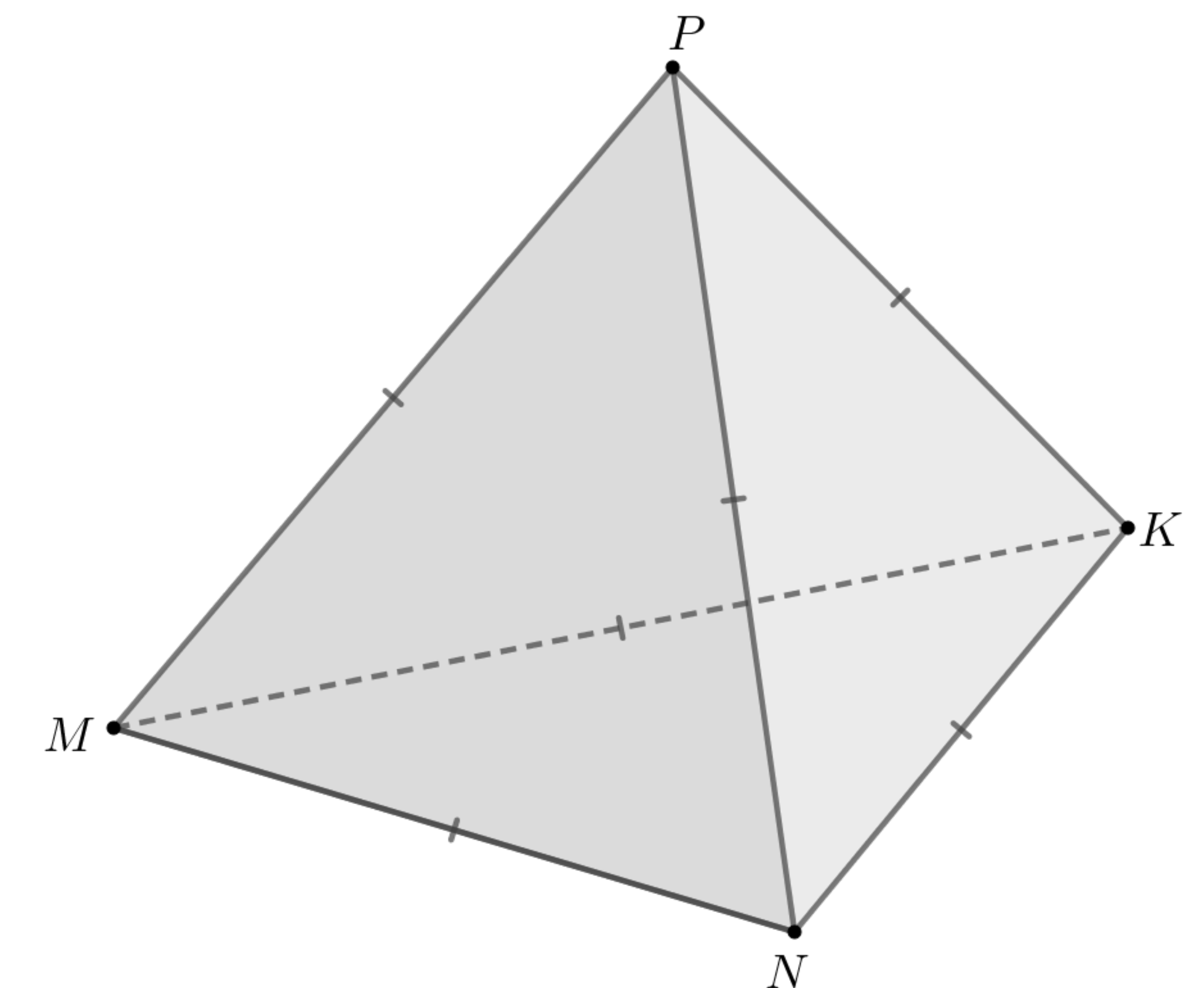
Правильный тетраэдр

Тетраэдр — это треугольная пирамида.

Правильный тетраэдр — треугольная пирамида, в которой все ребра равны.

Обратите внимание, что правильный тетраэдр не есть правильная треугольная пирамида: в правильной пирамиде боковые ребра равны друг другу, а в правильном тетраэдре все ребра равны друг другу.

$PMNK$ — правильный тетраэдр, ребра тетраэдра $MN = NK = KM = PM = PN = PK$.

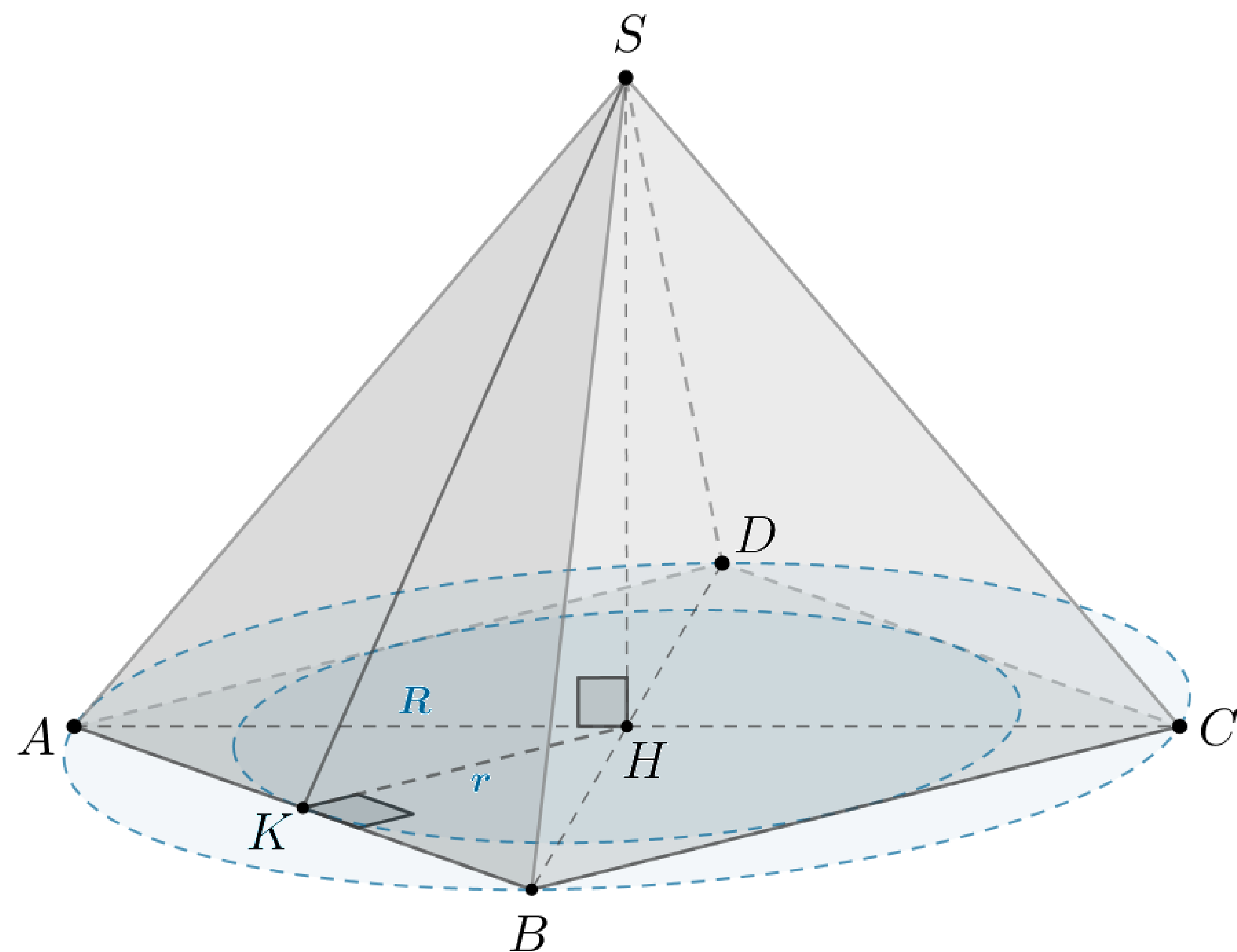


Отличительные свойства:

- Для правильного тетраэдра выполнено все, что выполнено для правильной треугольной пирамиды, причем за основание пирамиды можно взять любую грань тетраэдра, а за вершину пирамиды — противоположающую этой грани вершину тетраэдра.
- Центры вписанной и описанной сфер совпадают.
- Вписанная сфера касается граней в центрах вписанных в эти грани окружностей.
- Все высоты правильного тетраэдра пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся в отношении $3 : 1$, считая от вершины.

Правильная четырехугольная пирамида

$SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, боковые ребра $SA = SB = SC = SD$, основание $ABCD$ — квадрат.

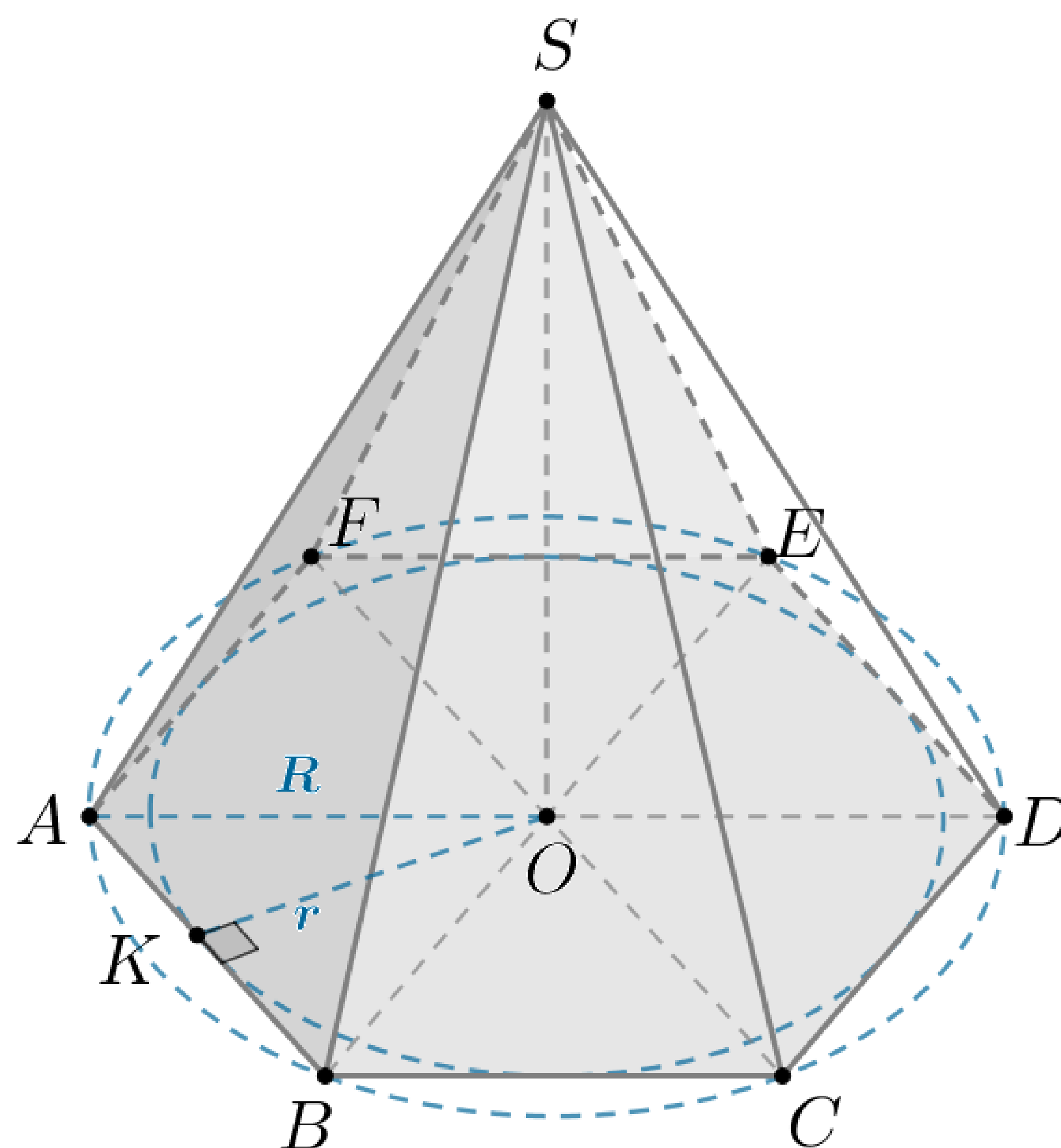


Отличительные свойства:

- 1 Если SH — высота пирамиды, то H — точка пересечения диагоналей основания.
- 2 Боковое ребро перпендикулярно скрещивающейся с ним диагонали основания:
 $SA \perp BD, SB \perp AC, SC \perp BD, SD \perp AC$.
- 3 Если $HK \perp AB$, то есть $HK \parallel AD$, то $\angle SKH$ — линейный угол двугранного угла между боковой гранью и основанием.
- 4 $\angle SAH = \angle SBH = \angle SCH = \angle SDH$ — углы между боковыми ребрами и основанием.
- 5 Центры вписанной и описанной сфер лежат на высоте SH пирамиды.

Правильная шестиугольная пирамида

$SABCDEF$ — правильная шестиугольная пирамида, боковые ребра $SA = SB = SC = SD = SE = SF$, основание $ABCDEF$ — правильный шестиугольник.



Отличительные свойства:

- 1 Если SO — высота пирамиды, то O — точка пересечения больших диагоналей основания.
- 2 $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \angle SDO = \angle SEO = \angle SFO$ — углы между боковыми ребрами и основанием.
- 3 Если $OK \perp AB$, то $\angle SKO$ — линейный угол двугранного угла между боковой гранью и основанием.
- 4 Центры вписанной и описанной сфер лежат на высоте SO пирамиды.
- 5 Если a — сторона основания пирамиды, то радиус описанной около основания окружности равен

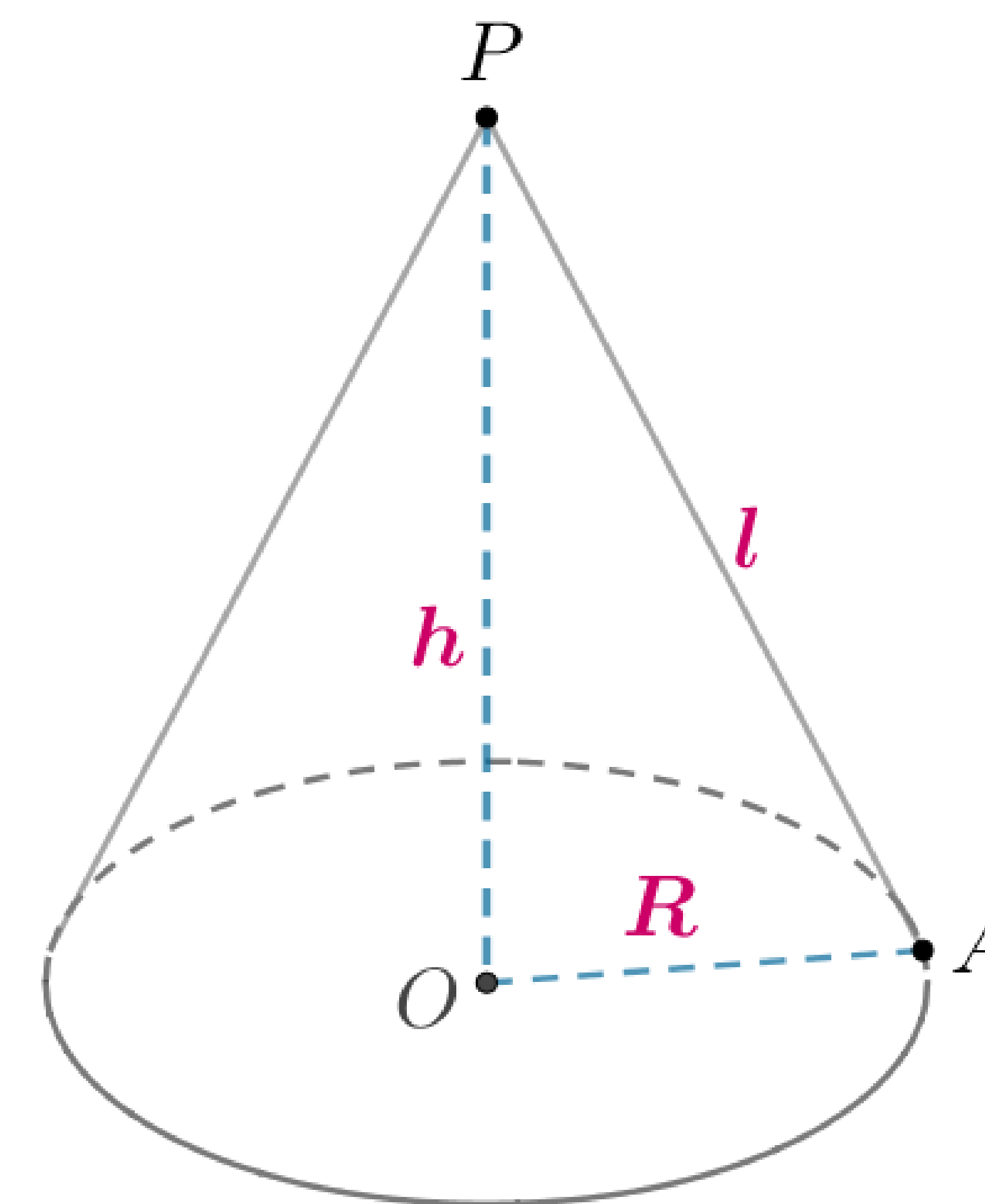
$$R = a,$$

а радиус вписанной в основание окружности равен

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Конус

На рисунке представлен (прямой) конус с вершиной в точке P .



Отличительные свойства:

- 1 Если $R = OA$ — радиус основания конуса, $h = PO$ — высота конуса, $l = PA$ — образующая конуса, то эти величины связаны соотношением

$$l^2 = h^2 + R^2,$$

объем конуса ищется по формуле

$$V = \frac{1}{3}h \cdot \pi R^2,$$

площадь боковой поверхности ищется по формуле

$$S_{\text{бок}} = \pi Rl,$$

а площадь полной поверхности ищется по формуле

$$S = \pi Rl + \pi R^2.$$

- 2 Угол φ сектора в развертке боковой поверхности конуса ищется по формуле

$$\varphi = 2\pi \cdot \frac{R}{l}.$$