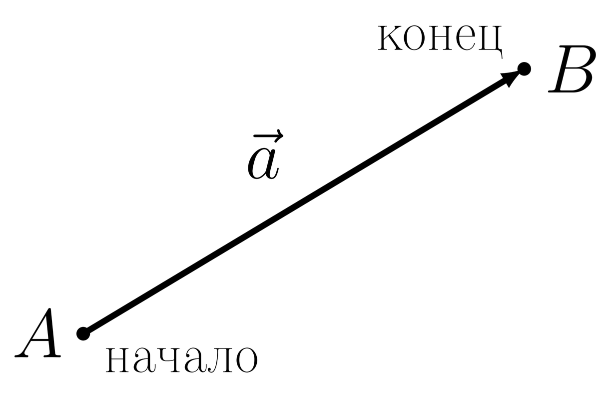
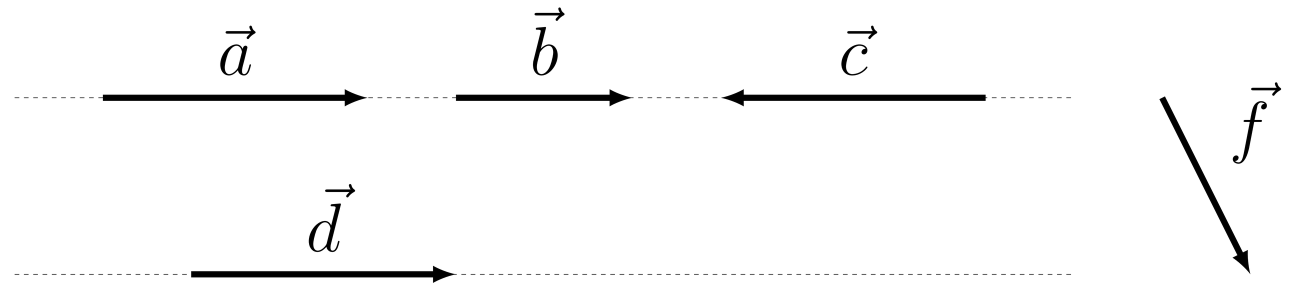
Понятие вектора

Отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек считается началом, а какая — концом, называется направленным отрезком, или вектором.



Два ненулевых вектора называются коллинеарными, если они лежат на параллельных прямых или на одной прямой.



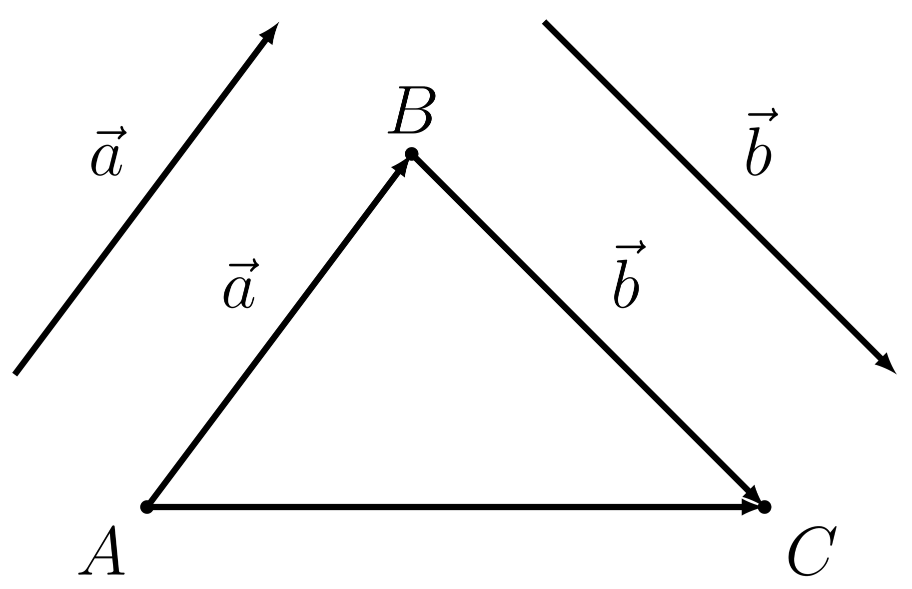
Пусть две пунктирные прямые параллельны. Тогда $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ коллинеарны, а вот $\vec{f}$ не коллинеарен ни одному из них, так как он не находится ни на одной из пунктирных прямых, ни на прямой, параллельной им.

Коллинеарные векторы можно разбить на две группы: сонаправленные и противоположно направленные векторы.

Векторы называются равными, если они сонаправлены и их длины равны.

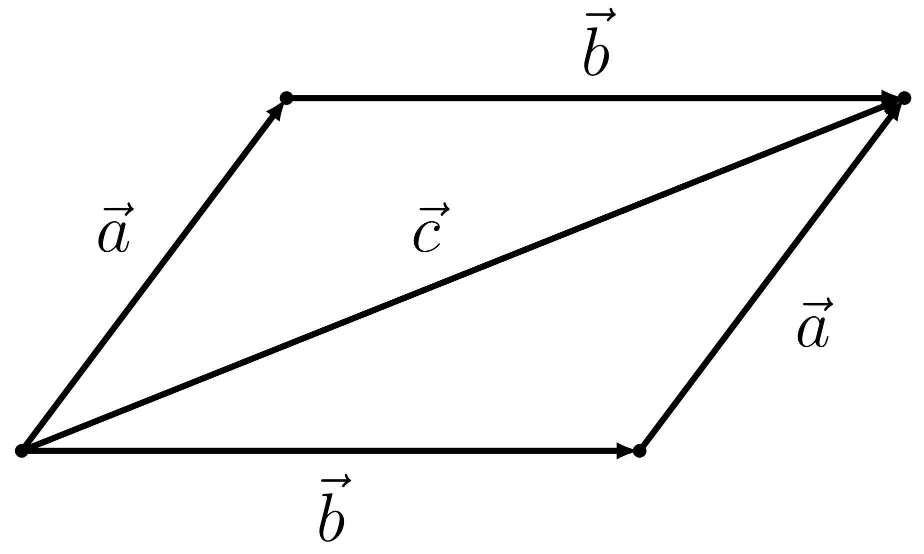
Правило треугольника

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$



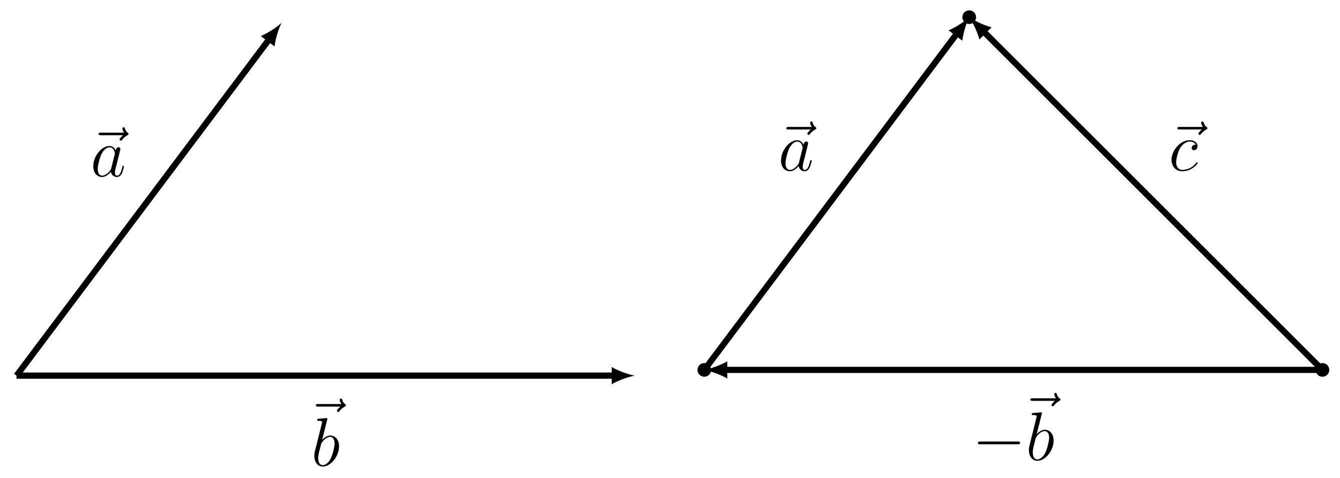
Правило параллелограмма

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}=\vec{b}+\vec{a}$$



Вычитание векторов

$$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$$



Правила умножения вектора на число

Пусть α и β — числа, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — векторы. Тогда

1. $(\alpha+\beta)\cdot\vec{a}=\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{a}$;
2. $\alpha\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\alpha\cdot\vec{a}+\alpha\cdot\vec{b}$;
3. $(\alpha\cdot\beta)\cdot\vec{a}=\alpha\cdot(\beta\cdot\vec{a})$.

Длина вектора по его координатам

Для вектора $\vec{b}$ с координатами $(x;y)$:

$$|\vec{b}|=\sqrt{x^2+y^2}$$

Сложение, вычитание, умножение на число

- $\vec{a}\,(x_1;y_1)+\vec{b}\,(x_2;y_2)=\vec{c}\,(x_1+x_2;y_1+y_2)$.
- $\vec{a}\,(x_1;y_1)-\vec{b}\,(x_2;y_2)=\vec{c}\,(x_1-x_2;y_1-y_2)$.
- $k\cdot\vec{a}\,(x_1;y_1)=\vec{\alpha}\,(kx_1;ky_1)$.

Скалярное произведение через угол

Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (обозначается $\vec{a}\cdot\vec{b}$ или $(\vec{a},\vec{b})$) с углом φ между ними называют следующее выражение:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\varphi,$$

где $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$ — длины соответствующих векторов.

Скалярное произведение через координаты

Если $\vec{a}\,(x_a;y_a)$ и $\vec{b}\,(x_b;y_b)$, то

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_a\cdot x_b+y_a\cdot y_b.$$

Нахождение угла через координаты векторов

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{x_a\cdot x_b+y_a\cdot y_b}{\sqrt{x_a^2+y_a^2}\cdot\sqrt{x_b^2+y_b^2}}.$$

Свойства скалярного произведения

1. $\vec{a}\cdot\vec{a}>0$, $\vec{0}\cdot\vec{0}=0$;
2. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;
3. $k\vec{a}\cdot\vec{b}=k\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$;
4. $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$;
5. $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$;
6. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$;
7. $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \vec{a}\perp\vec{b}$.