

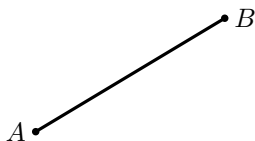
Конспект вебинара по №2

Содержание

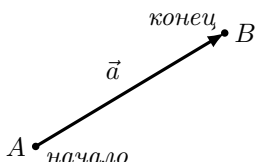
1	Понятие вектора	2
2	Коллинеарные векторы	2
3	Равенство векторов	2
4	Сложение векторов	3
4.1	Правило треугольника	3
4.2	Правило параллелограмма	3
5	Вычитание векторов	4
6	Умножение вектора на число	4
7	Разложение по базису	5
7.1	Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам	5
7.2	Решаем задачи	5
7.3	Разложение по единичным векторам	7
7.4	Длина вектора по его координатам	7
8	Координаты вектора	8
8.1	Сложение, вычитание, умножение на число	8
8.2	Связь координат вектора с координатами его начала и конца	8
8.3	Задача про медиану треугольника	8

1 Понятие вектора

Рассмотрим произвольный отрезок AB . На нём можно указать два направления: от A к B и наоборот.



Чтобы выбрать одно из этих направлений, одну из точек A и B назовём началом отрезка, а вторую — концом отрезка и будем считать, что отрезок направлен от начала к концу.



Определение Отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек считается началом, а какая — концом, называется **направленным отрезком**, или **вектором**.

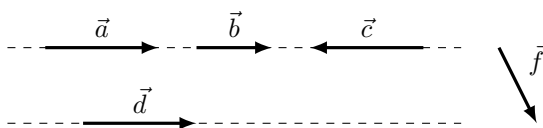
На рисунках вектор изображается отрезком со стрелкой, показывающей направление вектора. Векторы обозначают двумя заглавными латинскими буквами со стрелкой над ними, например $\overrightarrow{AB}$. Первая буква обозначает начало вектора, вторая — его конец. Векторы часто обозначают и одной строчной латинской буквой со стрелкой над ней, например $\vec{a}$.

Любая точка плоскости также является вектором. В этом случае вектор называется **нулевым**. Начало нулевого вектора совпадает с его концом. Нулевой вектор обозначается символом $\vec{0}$.

Длиной, или **модулем** ненулевого вектора $\overrightarrow{AB}$, называется длина отрезка AB . Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ обозначается так: $|\overrightarrow{AB}| = AB$. Длина нулевого вектора считается равной нулю: $|\vec{0}| = 0$.

2 Коллинеарные векторы

Два ненулевых вектора называются **коллинеарными**, если они лежат на параллельных прямых или на одной прямой.



Пусть две пунктирные прямые параллельны. Тогда $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ коллинеарны, а вот $\vec{f}$ не коллинеарен ни одному из них, так как он не находится ни на одной из пунктирных прямых, ни на прямой, параллельной им.

Коллинеарные векторы можно разбить на две группы: **сонаправленные** и **противоположно направленные** векторы. В нашем примере сонаправленными являются векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{d}$; векторы $\vec{c}$ и $\vec{a}$ являются противоположно направленными; векторы $\vec{c}$ и $\vec{b}$ являются противоположно направленными; векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ являются противоположно направленными.

3 Равенство векторов

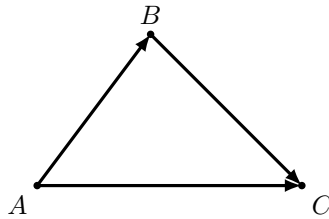
Определение Векторы называются **равными**, если они сонаправлены и их длины равны.

На самом деле вектор $\overrightarrow{AB}$ — это сдвиг точки A в точку B . Тогда этот вектор двигает не только точку A , но и всю плоскость.

Векторы равны, если они сонаправлены и их длины равны, поэтому не важно, где находится наш вектор. Мы можем нарисовать где угодно направленный отрезок $\vec{a}$, но с точки зрения векторов это будет один и тот же вектор. Получается, что вектор это не только конкретный направленный отрезок, на самом деле это целый класс всех равных направленных отрезков, которые одинаково двигают плоскость. Таким образом, в задачах любой вектор мы можем рисовать где угодно в удобном для нас месте.

4 Сложение векторов

Пусть точка переместилась из точки A в точку B , а затем из точки B в точку C . В результате этих двух перемещений, которые можно представить векторами $\vec{AB}$ и $\vec{BC}$, точка переместилась из точки A в точку C . Поэтому результат перемещения можно представить как вектор $\vec{AC}$.

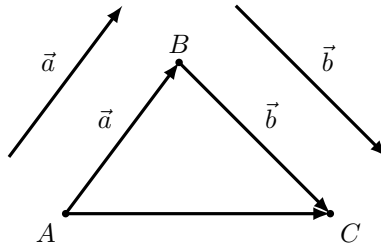


Поскольку перемещение из A в C складывается из перемещения из A в B и перемещения из B в C , то

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

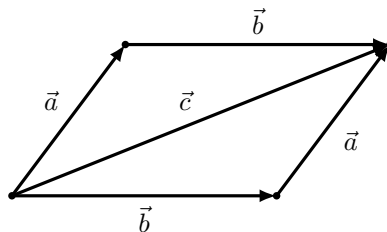
4.1 Правило треугольника

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два вектора. Обозначим начало вектора $\vec{a}$ за точку A , его конец за точку B и параллельно перенесем начало вектора $\vec{b}$ в точку B . Пусть получился вектор $\vec{BC}$, равный $\vec{b}$. Тогда вектор $\vec{AC}$ называется суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Такое правило сложения векторов называется **правилом треугольника**.



4.2 Правило параллелограмма

Рассмотрим случай, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выходят из одной точки. В таком случае мы можем достроить эту конструкцию до параллелограмма и получить из каждой пары противоположных сторон пары равных векторов.

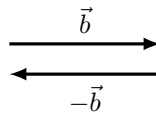


Тогда по правилу треугольника

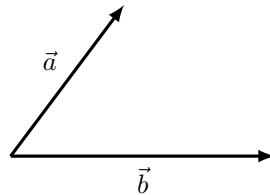
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} = \vec{b} + \vec{a}$$

5 Вычитание векторов

Для начала поймем, что « $-$ » перед вектором просто меняет его направление. Таким образом, векторы $\vec{b}$ и $-\vec{b}$ равны по длине, коллинеарны и противоположно направлены.



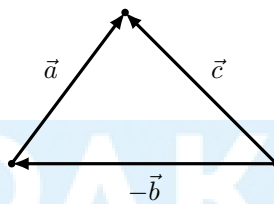
Пусть есть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, при этом пусть вектор $\vec{c}$ такой, что $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$.



Тогда

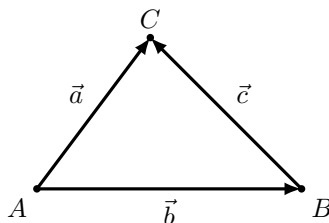
$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

Таким образом, можем изобразить вектор $\vec{c}$:



На это можно смотреть с другой стороны. Выразив вектор $\vec{a}$, получим, что $\vec{a} = \vec{c} + \vec{b}$.

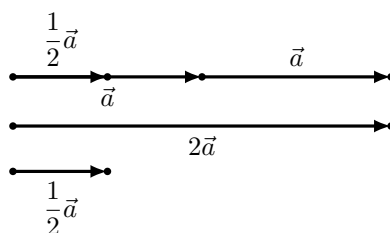
Таким образом, $\vec{a}$ — результат сложения вектора $\vec{b}$ с каким-то вектором $\vec{c}$.



Значит, нам нужен такой вектор, который перенесет точку B в точку C . Очевидно, это и есть вектор $\vec{c}$.

6 Умножение вектора на число

Возьмем вектор $\vec{a}$. Попробуем найти вектор $2\vec{a}$. Переместить точку на вектор $2\vec{a}$ — это тоже самое, что и дважды переместить её на вектор $\vec{a}$. Также можем разделить вектор $\vec{a}$ на два равных вектора и получить вектор $\frac{1}{2}\vec{a}$:



Правила умножения вектора на число

Пусть α и β — некоторые числа, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — некоторые векторы. Тогда

1. $(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}$;
2. $\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$;
3. $(\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a})$.

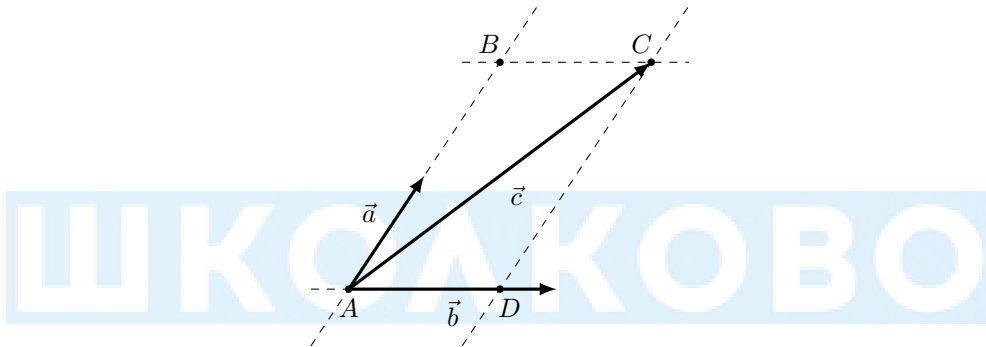
7 Разложение по базису

7.1 Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам

Пусть даны два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Тогда любой вектор $\vec{c}$ можно представить в виде

$$\vec{c} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}, \quad \text{где } x, y \text{ — числа.}$$

Нарисуем векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ с общим началом и проведем через начало и конец вектора $\vec{c}$ прямые, параллельные векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



Пусть A , B , C и D — вершины получившегося параллелограмма. Тогда

$$\vec{c} = \vec{AB} + \vec{AD}$$

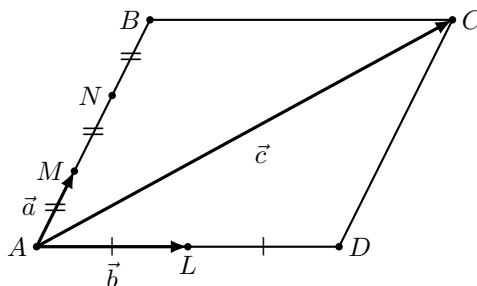
Векторы $\vec{a}$ и $\vec{AB}$ коллинеарны, поэтому найдется такое число x , что $\vec{AB} = x \cdot \vec{a}$.
Векторы $\vec{b}$ и $\vec{AD}$ коллинеарны, поэтому найдется такое число y , что $\vec{AD} = y \cdot \vec{b}$.

Таким образом,

$$\vec{c} = \vec{AB} + \vec{AD} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}$$

7.2 Решаем задачи

0. Дан параллелограмм $ABCD$. Точки M и N лежат на стороне AB и делят её на три равных отрезка (точка M лежит между точками A и N). Точка L лежит на стороне AD и делит её пополам. Пусть $\vec{AM} = \vec{a}$, $\vec{AL} = \vec{b}$, $\vec{AC} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}$, где x, y — некоторые числа. Найдите x и y .



Ответ

$$x = 3, y = 2$$

Решение

Мы уже знаем, что по правилу параллелограмма

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.$$

Заметим, что $\overrightarrow{AB} = 3\vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = 2\vec{b}$. Тогда

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 3\vec{a} + 2\vec{b}.$$

Значит, $x = 3, y = 2$.

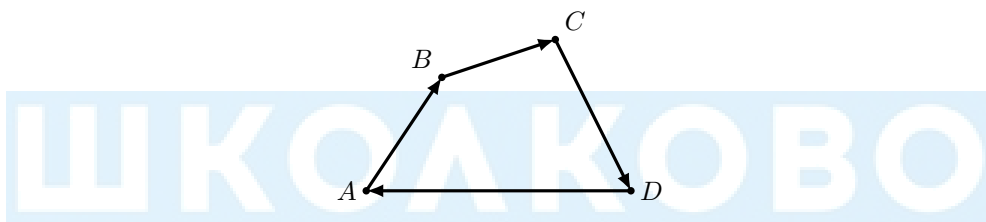
3. $ABCD$ — четырёхугольник, на сторонах которого отложены векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$.

Ответ

0

Решение

Вектор можно воспринимать как перемещение, тогда $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ — перемещение из A в B , затем из B в C , затем из C в D — в итоге это перемещение из A в D .



При такой трактовке имеем:

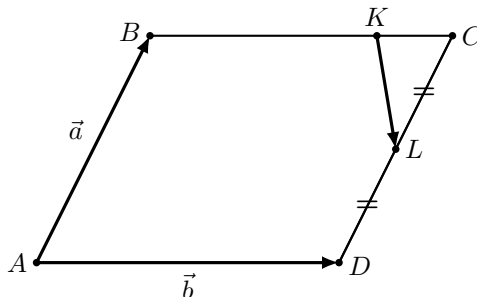
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA}.$$

Векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{DA}$ противоположно направлены и имеют одинаковую длину, поэтому

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}.$$

Нулевой вектор $\vec{0}$ имеет длину, равную 0.

4. Дан параллелограмм $ABCD$. Точки K и L лежат на сторонах BC и CD соответственно, причем $BK : KC = 3 : 1$, а L — середина CD . Пусть $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, тогда $\overrightarrow{KL} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}$, где x и y — некоторые числа. Найдите число, равное $x + y$.

**Ответ**

-0,25

Решение

По правилу треугольника имеем:

$$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{CL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{4}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}.$$

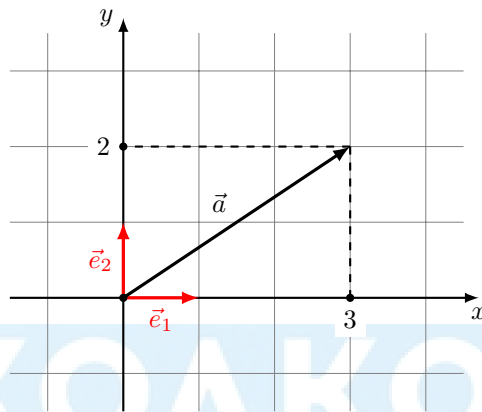
Таким образом, $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{4}$, то есть

$$x + y = -0,25.$$

7.3 Разложение по единичным векторам

Рассмотрим декартову систему координат. Обозначим единичные векторы как $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. Тогда $|\vec{e}_1| = 1 = |\vec{e}_2|$.

Вектор, выходящий из начала координат, называется **радиус-вектором**. Возьмем радиус-вектор $\vec{a}$, конец которого находится в точке $(3; 2)$.



Мы знаем, что любой вектор можно разложить по двум неколлинеарным векторам. Тогда мы можем разложить $\vec{a}$ по векторам $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$:

$$\vec{a} = 3 \cdot \vec{e}_1 + 2 \cdot \vec{e}_2.$$

Значит, радиус-вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(3; 2)$, то есть координаты точки его конца.

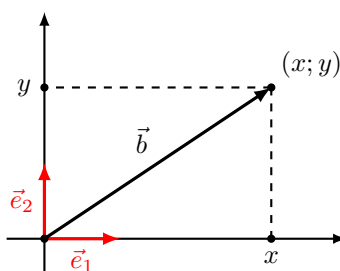
Таким образом, любой вектор мы можем воспринимать как движение по горизонтали + движение по вертикали, при этом перемещение по горизонтали и вертикали будет соответственно равно координатам вектора по осям абсцисс и ординат.

7.4 Длина вектора по его координатам

Так как система координат прямоугольная, то, разложив вектор по базису, мы получаем прямоугольный треугольник, поэтому длина вектора по теореме Пифагора равна $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$.

Обобщая, получаем следующую формулу длины вектора $\vec{b}$ с координатами $(x; y)$:

$$|\vec{b}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



8 Координаты вектора

8.1 Сложение, вычитание, умножение на число

- При сложении векторов $\vec{a}(x_1; y_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2)$ их координаты складываются, то есть

$$\vec{a}(x_1; y_1) + \vec{b}(x_2; y_2) = \vec{c}(x_1 + x_2; y_1 + y_2).$$

- При вычитании из вектора $\vec{a}(x_1; y_1)$ вектора $\vec{b}(x_2; y_2)$ их координаты вычитаются, то есть

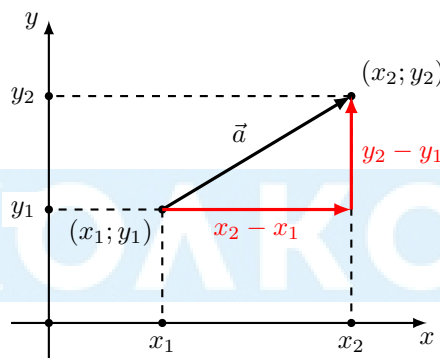
$$\vec{a}(x_1; y_1) - \vec{b}(x_2; y_2) = \vec{c}(x_1 - x_2; y_1 - y_2).$$

- При умножении вектора $\vec{a}(x_1; y_1)$ на число k его координаты умножаются на k :

$$k \cdot \vec{a}(x_1; y_1) = \vec{a}(kx_1; ky_1).$$

8.2 Связь координат вектора с координатами его начала и конца

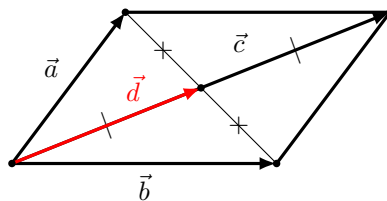
Пусть есть вектор $\vec{a}$ с началом в точке $(x_1; y_1)$ и концом в точке $(x_2; y_2)$.



Вектор — последовательное перемещение по горизонтали и вертикали. Тогда для перемещения из начала вектора, точки $(x_1; y_1)$, в его конец, точку $(x_2; y_2)$, надо сначала сместиться по горизонтали на $x_2 - x_1$, а затем по вертикали на $y_2 - y_1$. Таким образом координаты вектора $\vec{a}$ равны $(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$, то есть для получения координат вектора нужно вычесть из координат его конца координаты его начала.

8.3 Задача про медиану треугольника

Вспомним правило параллелограмма. Возьмем два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Пусть $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$.

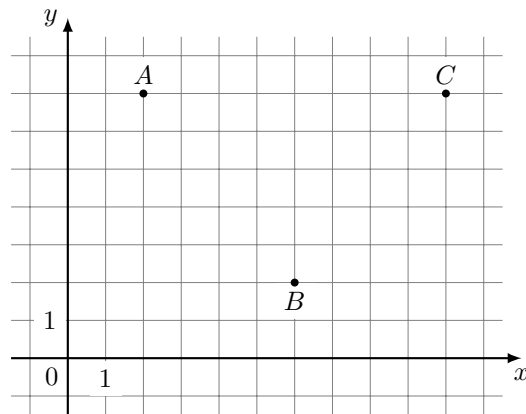


Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, поэтому медиана треугольника, образованного векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, есть половина вектора $\vec{c}$.

Таким образом,

$$\vec{d} = \frac{1}{2}\vec{c} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}).$$

7. На координатной плоскости отмечены точки A , B и C . Найдите длину медианы AM треугольника ABC .



Ответ

6,5

Решение

Известно, что $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. Найдём координаты точек A , B , C :

$$A(2; 7)$$

$$B(6; 2)$$

$$C(10; 7)$$

Отсюда получаем

$$\overrightarrow{AB} = (6 - 2; 2 - 7) = (4; -5)$$

$$\overrightarrow{AC} = (10 - 2; 7 - 7) = (8; 0)$$

Тогда имеем:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} ((4 + 8); (-5 + 0)) = \frac{1}{2} (12; -5) = \left(\frac{12}{2}; -\frac{5}{2} \right)$$

Следовательно, длина медианы AM равна

$$AM = \sqrt{\left(\frac{12}{2} \right)^2 + \left(-\frac{5}{2} \right)^2} = \frac{13}{2} = 6,5$$