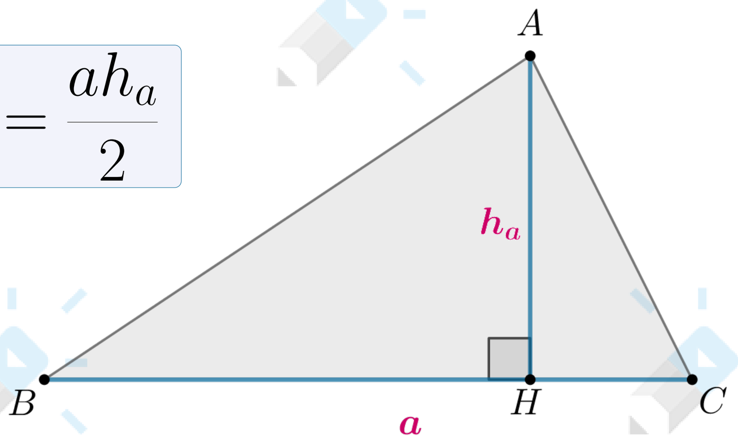
Площадь $\triangle ABC$ равна полупроизведению высоты AH на основание BC, к которому проведена эта высота.

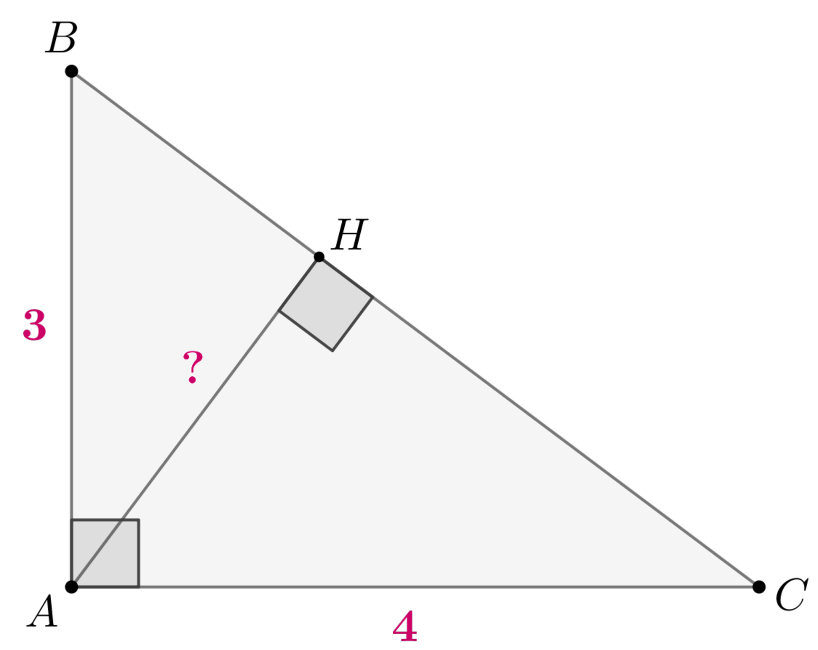
$$S = \frac{ah_a}{2}$$



Пример, где встречается

Найдите высоту прямоугольного треугольника с катетами 3 и 4, проведенную к гипотенузе.

▶ Пусть дан $\triangle ABC$ с $\angle A = 90^\circ$ и проведена $AH \perp BC$.



Тогда

$$\frac{AH \cdot BC}{2} = S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$AH = \frac{AB \cdot AC}{BC}$$

По теореме Пифагора $BC = 5$. Следовательно,

$$AH = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5} = 2,4$$

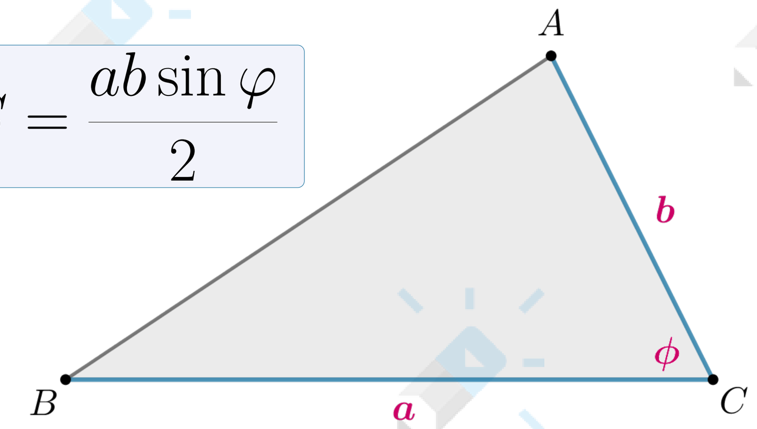
Тем самым мы вывели формулу: высота прямоугольного треугольника с катетами a и b, проведенная к гипотенузе c, равна

$$h = \frac{ab}{c}$$

■

Площадь $\triangle ABC$ равна полупроизведению двух сторон CA и CB на синус угла C между ними.

$$S = \frac{ab\sin\varphi}{2}$$



Пример, где встречается

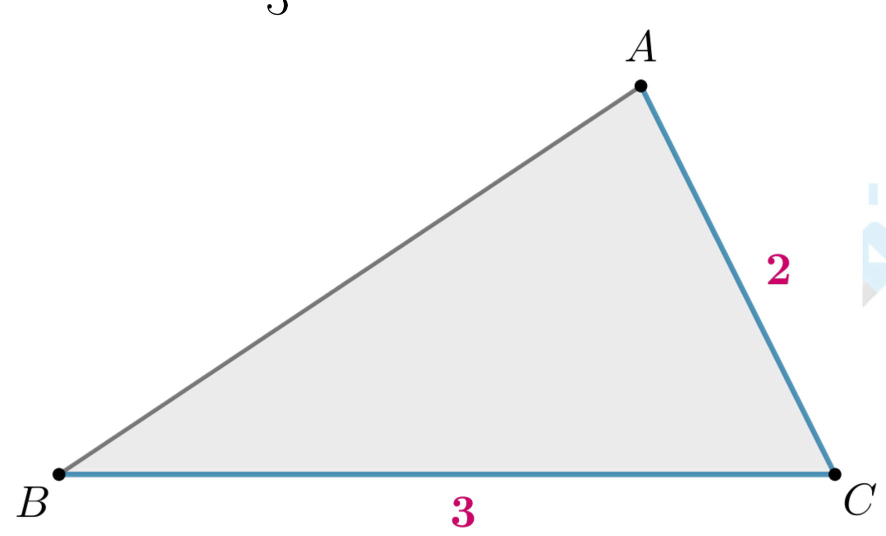
Две стороны треугольника равны 2 и 3, а косинус угла между ними равен $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Найдите площадь треугольника.

▶ Рассмотрим $\triangle ABC$:

$AC = 2$,

$BC = 3$,

$\cos\angle C = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.



По основному тригонометрическому тождеству $\sin^2\angle C + \cos^2\angle C = 1$, следовательно,

$$\sin\angle C = \sqrt{1 - \frac{8}{9}} = \frac{1}{3}$$

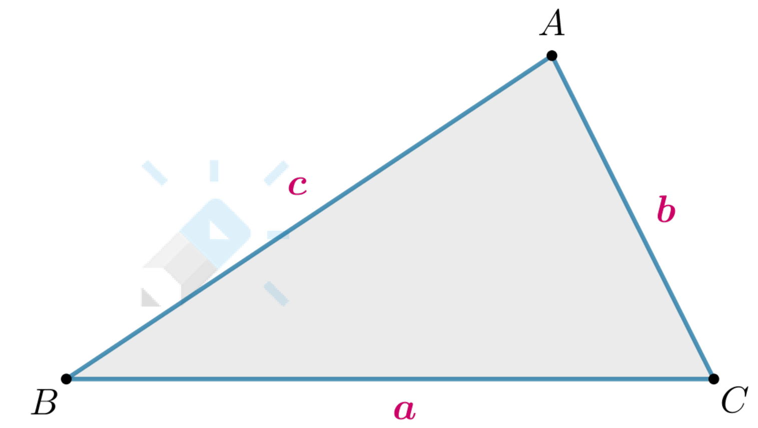
Тогда площадь $\triangle ABC$ равна

$$S = \frac{2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3}}{2} = 1$$

■

Формула Герона: площадь $\triangle$-ка со сторонами a, b, c и полупериметром p ищется по формуле

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

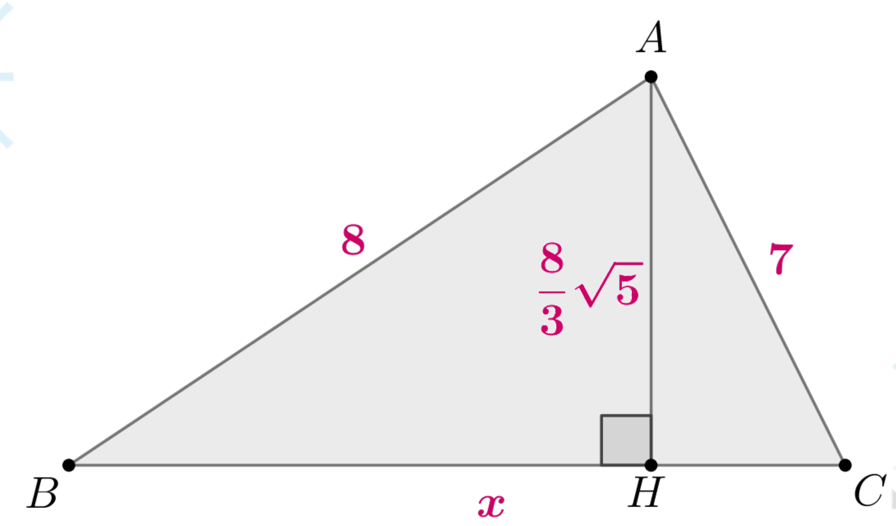


Пример, где встречается

Две стороны треугольника равны 7 и 8, а высота, проведенная к третьей стороне, равна $\frac{8}{3}\sqrt{5}$. Найдите третью сторону, если она — большая из сторон.

▶ Пусть $x > 8$ — третья сторона. Значит, полупериметр треугольника равен $p = \frac{15+x}{2}$.
Тогда площадь треугольника равна

$$\frac{1}{2}\cdot x \cdot \frac{8}{3}\sqrt{5} = S = \sqrt{p(p-x)(p-7)(p-8)}$$



Преобразуем:

$$S = \sqrt{p(p-x)(p-7)(p-8)} =$$

$$= \sqrt{\frac{15+x}{2} \cdot \frac{15-x}{2} \cdot \frac{x+1}{2} \cdot \frac{x-1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{(225-x^2)(x^2-1)}$$

Получаем уравнение

$$\frac{4}{3}x\sqrt{5} = \frac{1}{4}\sqrt{(225-x^2)(x^2-1)} \quad \Leftrightarrow$$

$$9x^4 - 754x^2 + 81 \cdot 25 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x^2 = 81;\ \frac{25}{9} \quad \Rightarrow$$

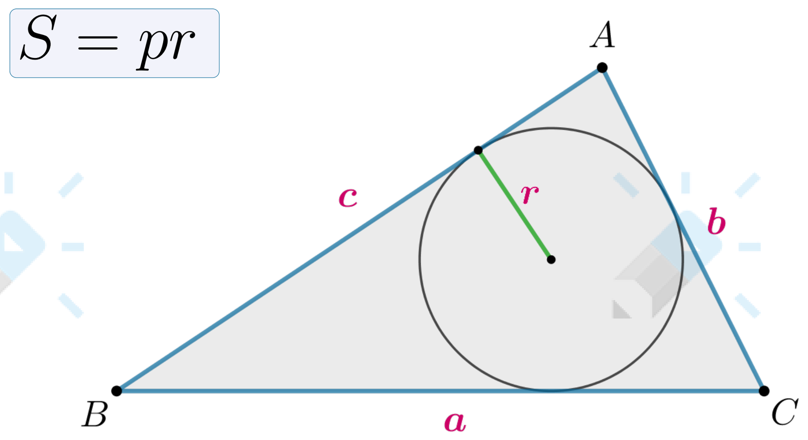
$$x = 9;\ \frac{5}{3}$$

Так как $x > 8$, то $x = 9$.

■

Площадь $\triangle$-ка со сторонами a, b, c, полупериметром $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ и радиусом r вписанной окружности ищется по формуле

$$S = pr$$

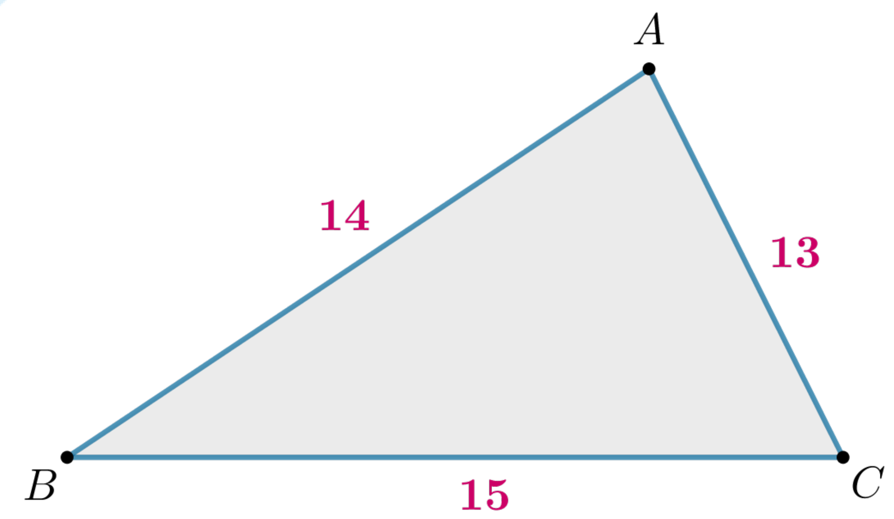


Пример, где встречается

Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник со сторонами 13, 14 и 15.

▶ Будем искать радиус вписанной окружности по формуле

$$S = pr \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{S}{p}$$



Полупериметр $\triangle ABC$ равен

$$p = \frac{13+14+15}{2} = 21$$

По формуле Герона площадь $\triangle ABC$ равна

$$S = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} =$$

$$= \sqrt{3 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 2} =$$

$$= 3 \cdot 7 \cdot 4$$

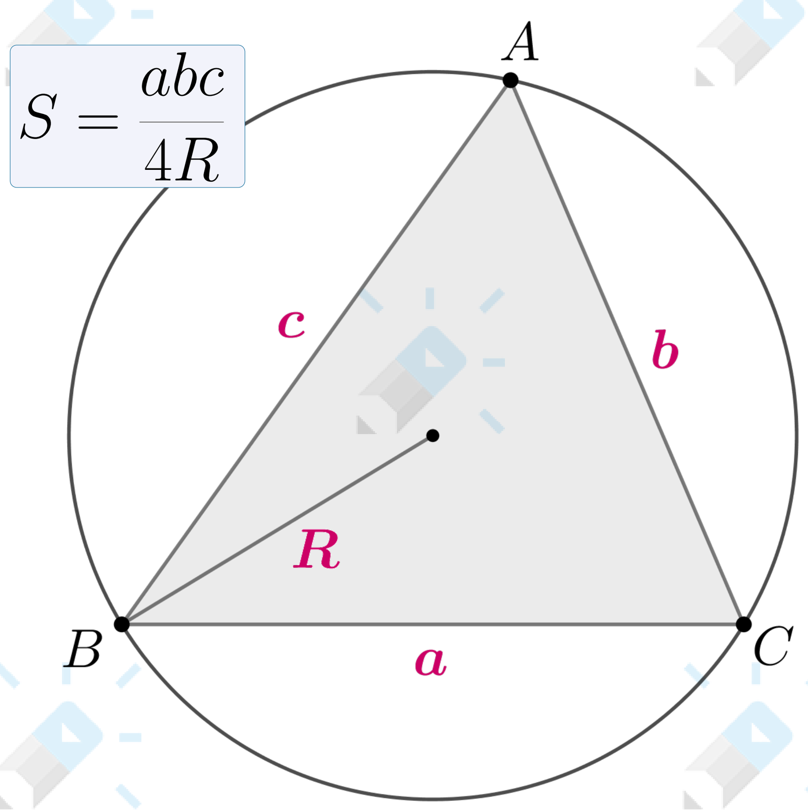
Тогда

$$r = \frac{3 \cdot 7 \cdot 4}{21} = 4$$

■

Площадь $\triangle$-ка со сторонами a, b, c и радиусом R описанной окружности ищется по формуле

$$S = \frac{abc}{4R}$$



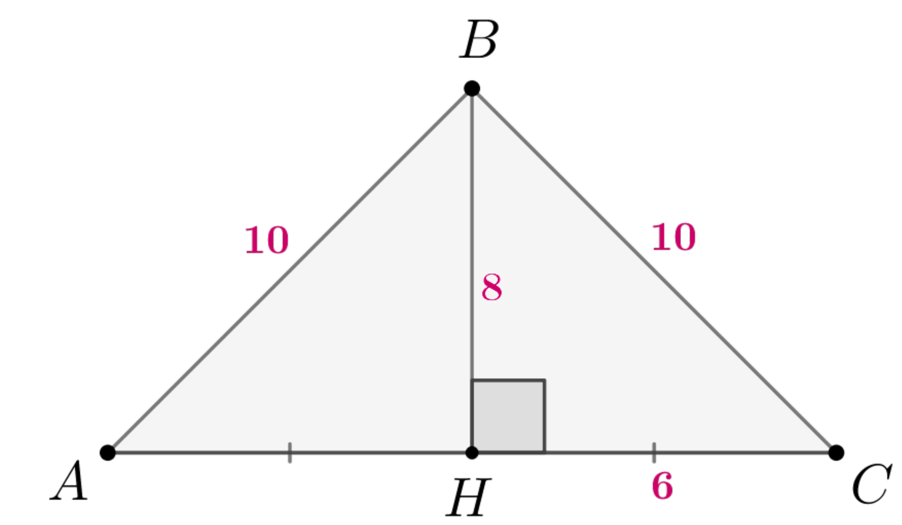
Пример, где встречается

Дан треугольник ABC со сторонами 10, 10 и 12. Найдите радиус описанной около него окружности.

▶ Будем искать радиус описанной окружности по формуле

$$R = \frac{abc}{4S}$$

Опустим высоту BH к основанию $\triangle ABC$. Так как он равнобедренный, то BH — медиана, следовательно, $HC = 6$.



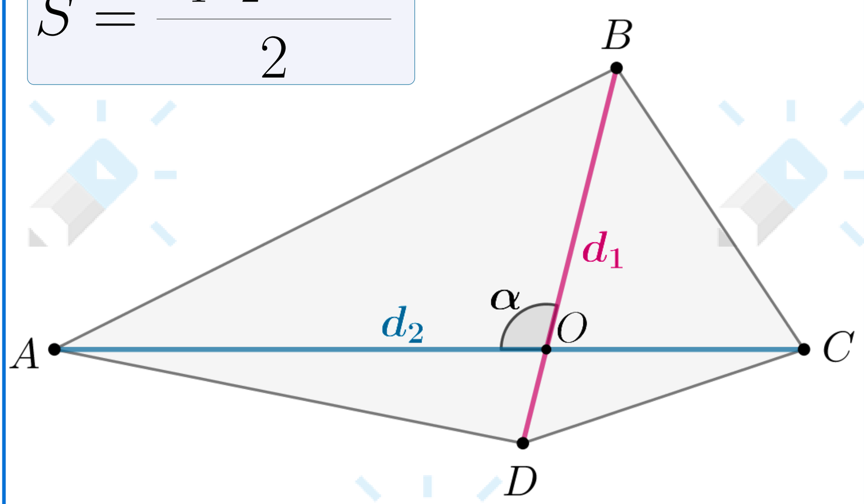
Тогда по теореме Пифагора $BH = 8$. Следовательно,

$$R = \frac{10 \cdot 10 \cdot 12}{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8} = \frac{25}{4} = 6,25$$

■

Площадь выпуклого четырехугольника $ABCD$ равна полупроизведению диагоналей AC и BD на синус угла AOB (или угла BOC) между ними.

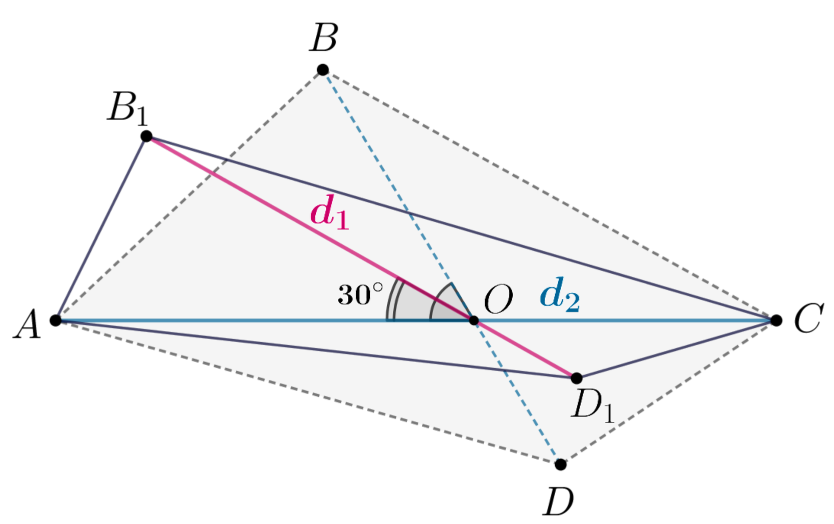
$$S = \frac{d_1 d_2 \sin\alpha}{2}$$



Пример, где встречается

Угол между диагоналями выпуклого четырехугольника был равен 60°, а после поворота одной из диагоналей относительно точки пересечения диагоналей стал равен 30°. Найдите площадь полученного четырехугольника, если площадь исходного четырехугольника была равна $\sqrt{3}$.

► Пусть угол между диагоналями $ABCD$ равен 60°, а угол между диагоналями AB_1CD_1 равен 30°. Диагонали при этом остались прежними.



По формуле площади выпуклого четырехугольника

$$\sqrt{3} = S_{ABCD} = \frac{d_1 d_2 \sin 60^\circ}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$d_1 d_2 = 4$$

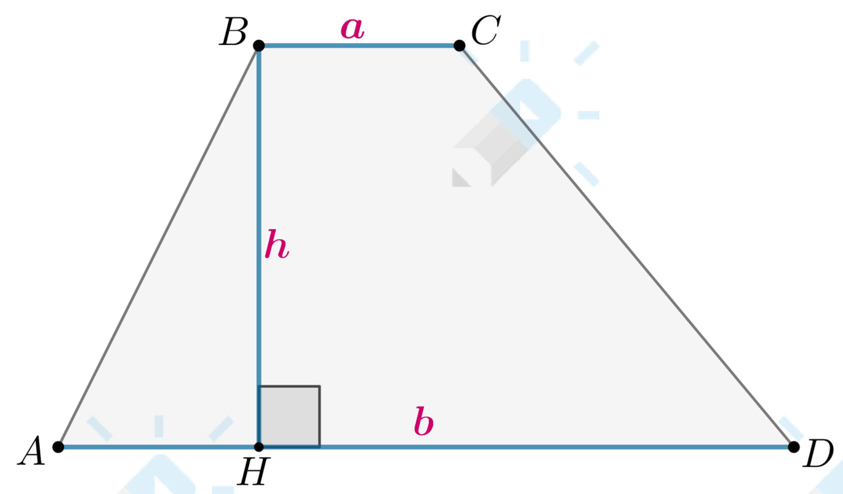
Тогда

$$S_{AB_1CD_1} = \frac{d_1 d_2 \sin 30^\circ}{2} = \frac{4 \cdot \frac{1}{2}}{2} = 1$$

■

Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований AD и BC на высоту BH.

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$



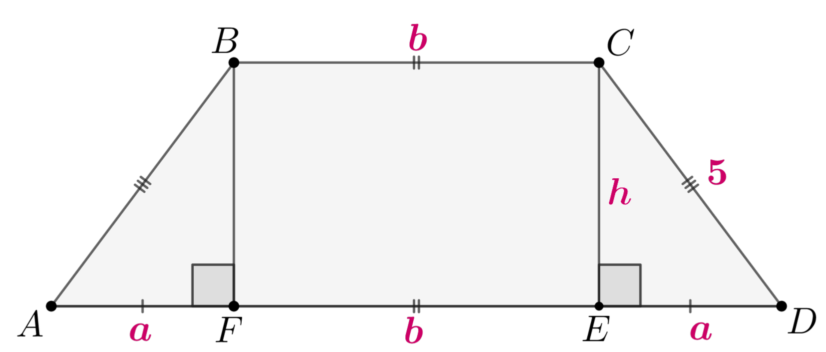
Пример, где встречается

Средняя линия равнобедренной трапеции с площадью 24 равна 6. Боковая строна трапеции равна 5. Найдите большее основание трапеции.

► Проведем высоты CE и BF. Они разбивают основание AD на отрезки $AF = DE = a$ ($\triangle ABF = \triangle DCE$ как прямоугольные по катету и гипотенузе), $EF = BC = b$ ($FBCE$ — прямоугольник). Средняя линия трапеции равна полусумме оснований, следовательно, равна $a + b = 6$. Площадь трапеции равна

$$24 = S = \frac{b + (2a + b)}{2} \cdot h = (a+b)h \quad \Rightarrow$$

$$h = \frac{24}{6} = 4$$

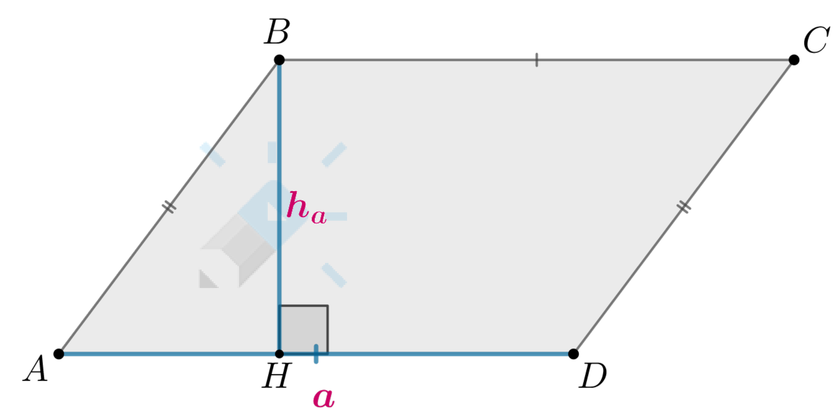


По теореме Пифагора из $\triangle DCE$ находим $ED = 3$. Следовательно, большее основание $AD = (a+b)+a = 6+3 = 9$.

■

Площадь параллелограмма $ABCD$ равна произведению высоты BH на основание AD, к которому проведена эта высота.

$$S = ah_a$$

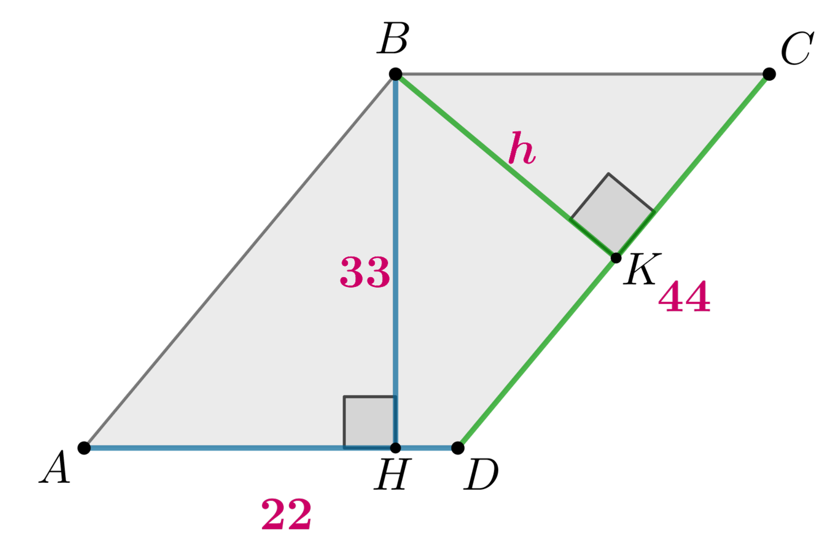


Эта формула верна, так как параллелограмм разбивается на два равных $\triangle ABD$ и $\triangle CBD$, площади которых равны и ищутся по формуле $S_\triangle = \frac{ah_a}{2}$.

Пример, где встречается

Стороны параллелограмма равны 22 и 44. Высота, опущенная на первую из этих сторон, равна 33. Найдуте высоту, опущенную на вторую сторону параллелограмма.

► Пусть $AB = 22$, $CD = 44$, $BH = 33$ — высота. Проведем высоту $BK = h$ на сторону CD.



Так как площадь параллелограмма равна произведению высоты на сторону, к которой эта высота проведена, то

$$AD \cdot BH = S = CD \cdot BK \quad \Rightarrow$$

$$22 \cdot 33 = 44h \quad \Leftrightarrow$$

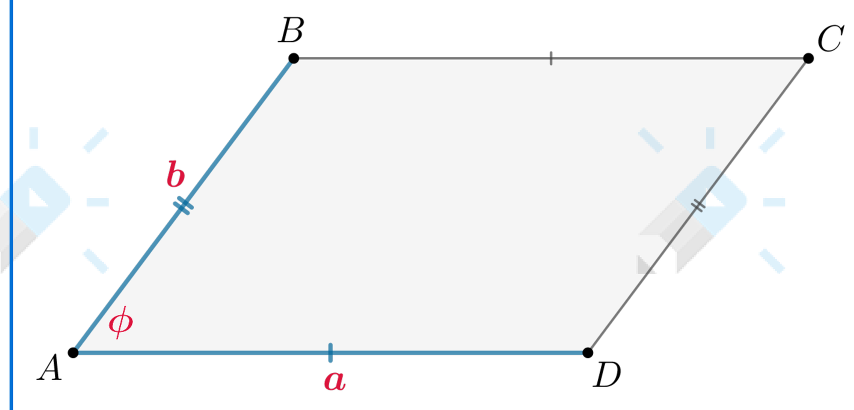
$$h = \frac{22 \cdot 33}{44} \quad \Leftrightarrow$$

$$h = 16,5$$

■

Площадь параллелограмма $ABCD$ равна произведению двух смежных сторон AB и AD на синус угла A между ними.

$$S = ab\sin\varphi$$

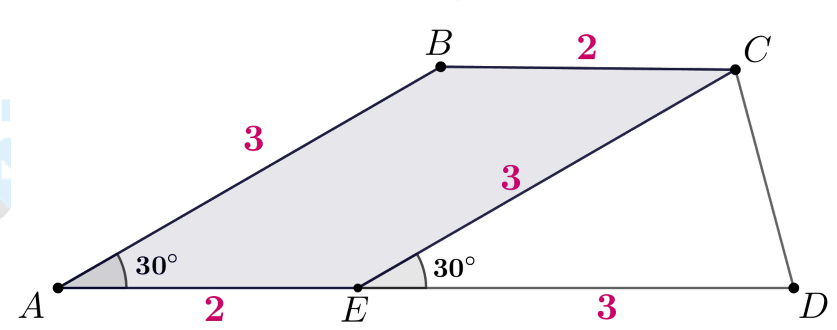


Эта формула верна, так как параллелограмм разбивается на два равных $\triangle ABD$ и $\triangle CBD$, площади которых равны и ищутся как $S_\triangle = \frac{ab\sin\varphi}{2}$.

Пример, где встречается

Найдите площадь трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 5$, $BC = 2$, боковая сторона которой равны $AB = 3$, а угол A равен 30°.

► Проведем $CE \parallel AB$, тогда трапеция разобьется на параллелограмм $ABCE$ и треугольник CED. Следовательно, $CE = AB = 3$, $DE = AD - AE = 5 - 2 = 3$. Так как $AB \parallel CE$ и AD — секущая, то $\angle CED = \angle BAE = 30^\circ$ как соответственные углы.



Тогда площадь трапеции равна сумме площадей параллелограмма и треугольника, следовательно, получаем

$$S_{ABCD} = S_{ABCE} + S_{CED} =$$

$$= AB \cdot AE \cdot \sin 30^\circ + \frac{CE \cdot DE \cdot \sin 30^\circ}{2} =$$

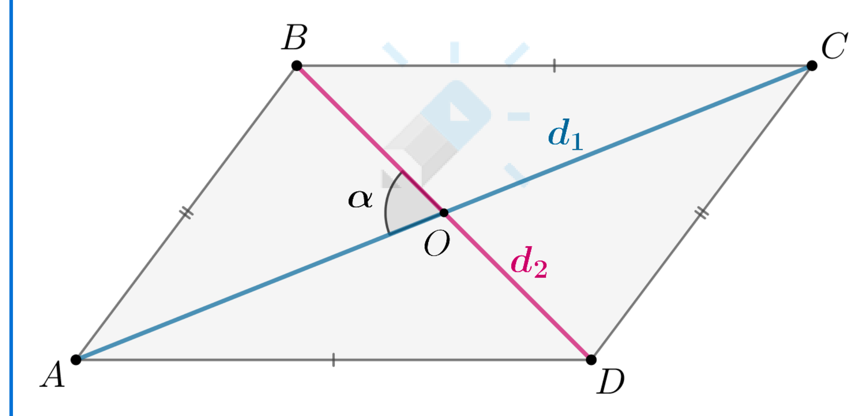
$$= 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}}{2} =$$

$$= 5,25$$

■

Площадь параллелограмма $ABCD$ равна полупроизведению диагоналей AC и BD на синус угла AOB (или угла BOC) между ними.

$$S = \frac{d_1 d_2 \sin\alpha}{2}$$

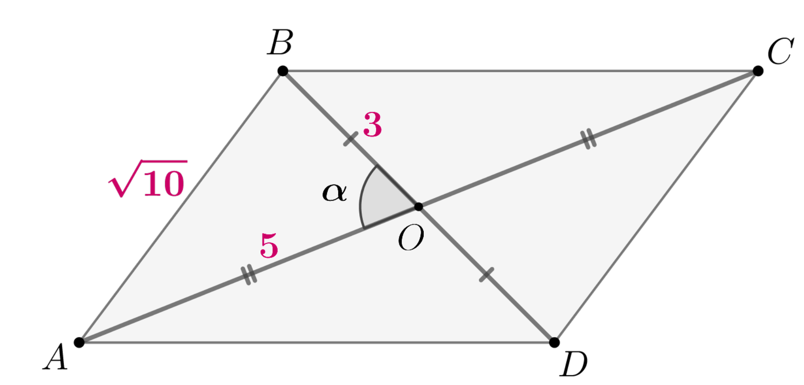


Эта формула верна, так как параллелограмм — частный случай выпуклого четырехугольника.

Пример, где встречается

Диагонали параллелограмма равны 6 и 10, а одна из сторон равна $\sqrt{10}$. Найдите площадь параллелограмма.

► Пусть дан параллелограмм $ABCD$ такой, что $AB = \sqrt{10}$, $AC = 10$, $BD = 6$. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам $\Rightarrow \quad AO = 5, BO = 3$.



По теореме косинусов в $\triangle ABO$:

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2 \cdot AO \cdot BO \cdot \cos\alpha \Rightarrow$$

$$10 = 25 + 9 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \cos\alpha \quad \Leftrightarrow$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{5}$$

По основному тригонометрическому тождеству $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ находим

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$$

Выбираем $\sin\alpha > 0$, так как синус любого угла от 0° до 180° положительный. Тогда площадь параллелограмма равна

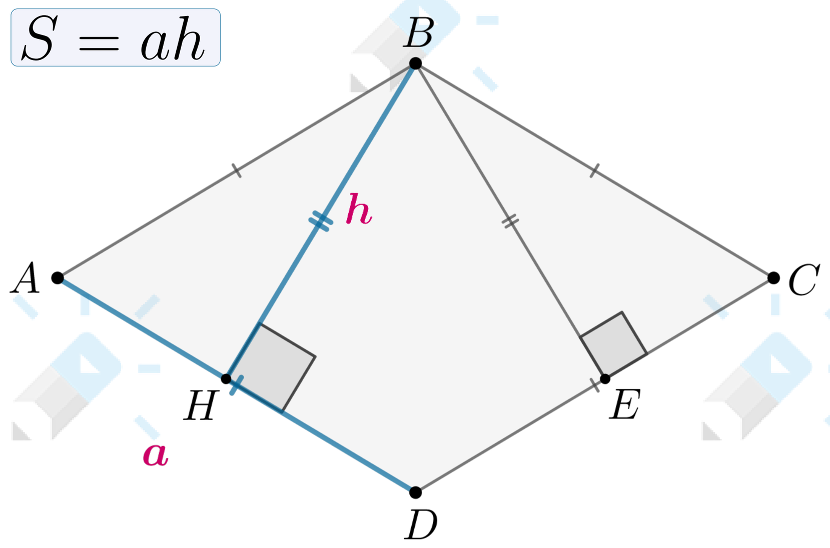
$$S = \frac{AC \cdot BD \cdot \sin\alpha}{2} \quad \Rightarrow$$

$$S = \frac{10 \cdot 6 \cdot \frac{3}{5}}{2} = 18$$

■

Площадь ромба $ABCD$ равна произведению высоты BH на сторону AD.

$S = ah$

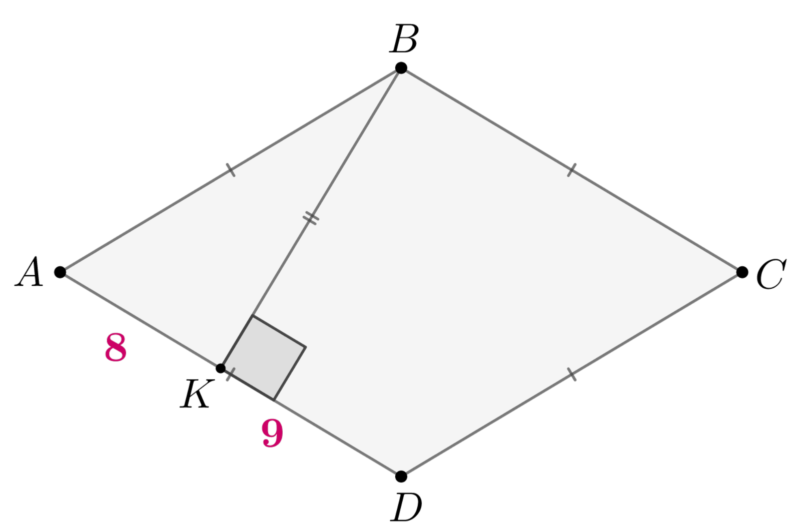


Эта формула верна, так как ромб является параллелограммом, стороны которого равны. Все высоты ромба также равны.

Пример, где встречается

Высота BK делит сторону AD ромба $ABCD$ на отрезки $AK = 8$ и $DK = 9$. Найдите площадь ромба.

► Так как $AK = 8$, $DK = 9$, то $AB = AD = 8 + 9 = 17$.



Тогда по теореме Пифагора из $\triangle ABK$ находим

$$BK = \sqrt{AB^2 - AK^2}$$
$$BK = \sqrt{17^2 - 8^2}$$
$$BK = 15$$

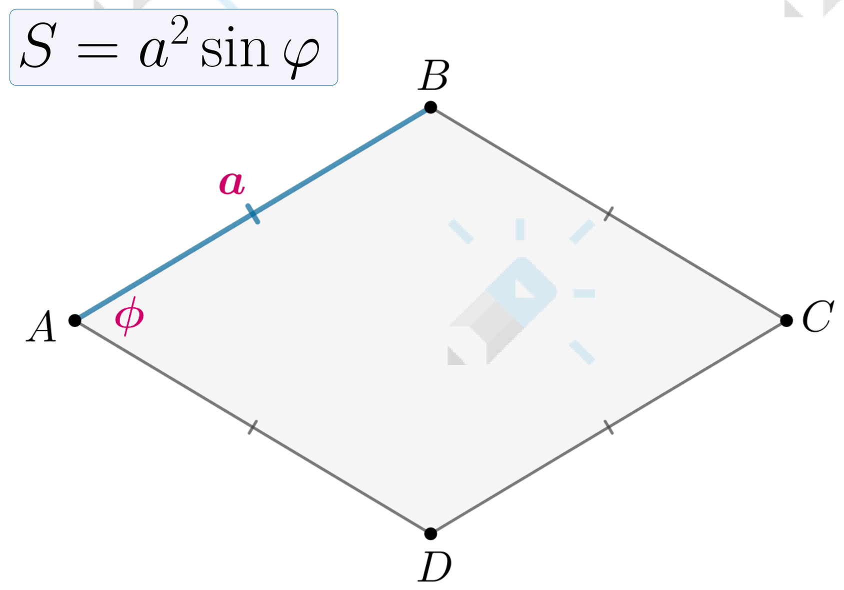
Тогда площадь ромба $ABCD$ равна

$$S = AB \cdot BK = 17 \cdot 15 = 255$$

■

Площадь ромба $ABCD$ равна произведению квадрата его стороны AB на синус любого его угла (например, угла A).

$S = a^2 \sin\varphi$



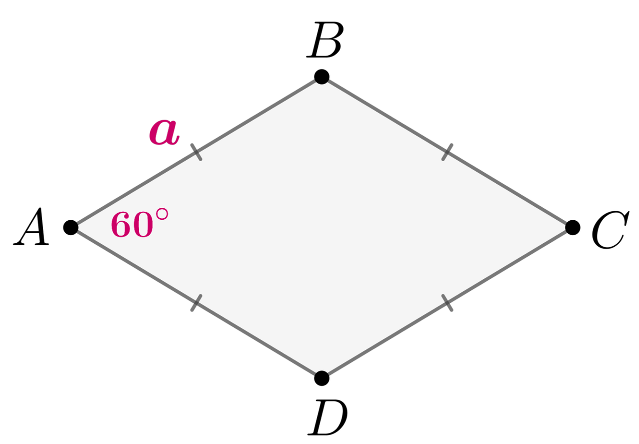
Эта формула верна, так как ромб является параллелограммом, все стороны которого равны ($a = b$ в формуле $S = ab\sin\varphi$ площади параллелограмма).

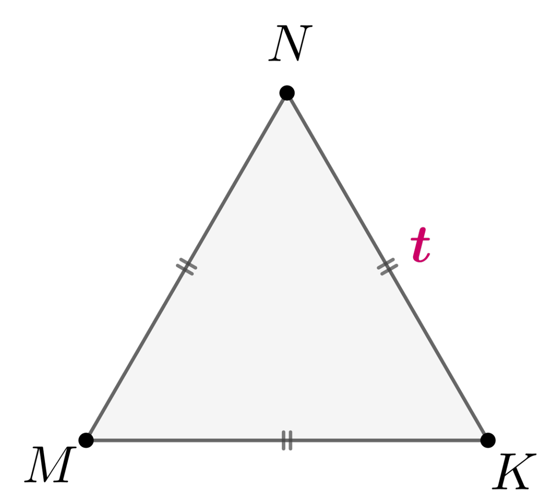
Пример, где встречается

Площадь ромба $ABCD$ с углом 60° и площадь равностороннего треугольника MNK равны. Найдите отношение квадрата стороны ромба $ABCD$ к квадрату стороны треугольника MNK.

► Пусть сторона ромба $ABCD$ равна a, а сторона треугольника MNK равна t. Тогда

$$S_{ABCD} = a^2 \sin 60^\circ$$
$$S_{MNK} = \frac{t^2\sqrt{3}}{4}$$





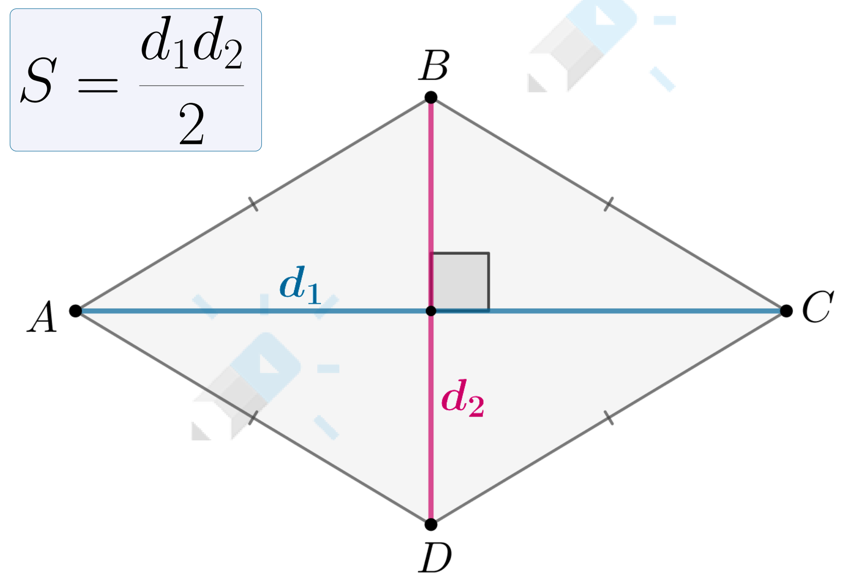
По условию

$$\frac{t^2\sqrt{3}}{4} = a^2 \sin 60^\circ \quad \Leftrightarrow$$
$$a^2 : t^2 = \frac{\sqrt{3}}{4\sin 60^\circ} \quad \Leftrightarrow$$
$$a^2 : t^2 = 1 : 2 = 0,5$$

■

Площадь ромба $ABCD$ равна полупроизведению диагоналей AC и BD.

$S = \frac{d_1 d_2}{2}$



Эта формула верна, так как ромб является параллелограммом, диагонали которого перпендикулярны, следовательно, синус угла между ними равен 1.

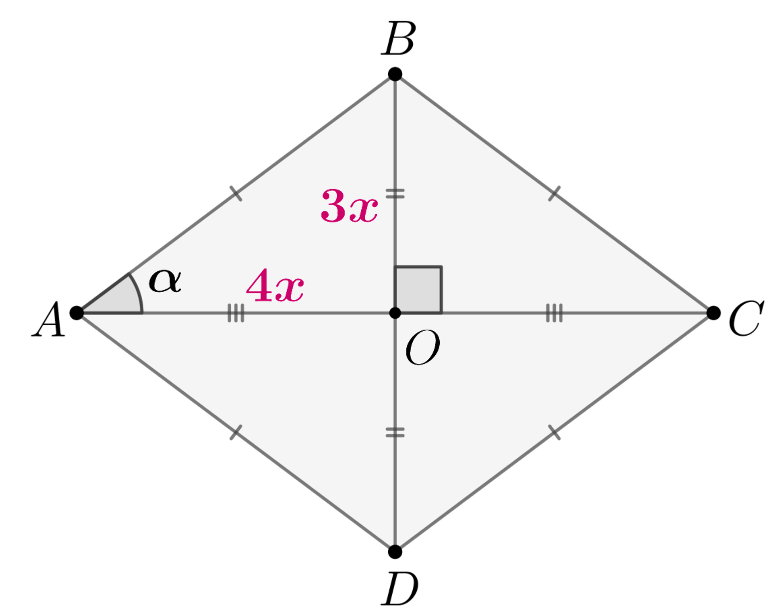
Пример, где встречается

В ромбе $ABCD$, площадь которого равна 96, тангенс угла BAC равен $0,75$. Найдите сторону ромба.

► Так как

$$\frac{BO}{AO} = \operatorname{tg}\angle BAC = \frac{3}{4}$$

то можно принять $BO = 3x$, $AO = 4x$.



Так как диагонали ромба точкой пересечения делятся пополам, то $AC = 8x$, $BD = 6x$, следовательно, площадь ромба равна

$$96 = S = \frac{AC \cdot BD}{2} \quad \Rightarrow$$
$$96 = \frac{8x \cdot 6x}{2} \quad \Leftrightarrow$$
$$96 = 24x^2 \quad \Leftrightarrow$$
$$x^2 = 4$$

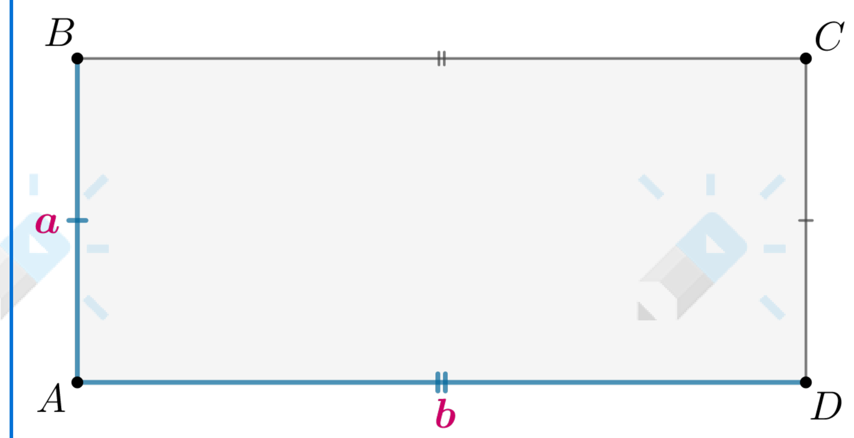
По теореме Пифагора из $\triangle ABO$:

$$AB^2 = 9x^2 + 16x^2 = 25x^2 \quad \Leftrightarrow$$
$$AB^2 = 100 \quad \Leftrightarrow$$
$$AB = 10$$

■

Площадь прямоугольника $ABCD$ равна произведению двух его смежных сторон AB и AD.

$S = ab$



Эта формула верна, так как прямоугольник — параллелограмм с прямым углом, следовательно, синус этого угла равен 1.

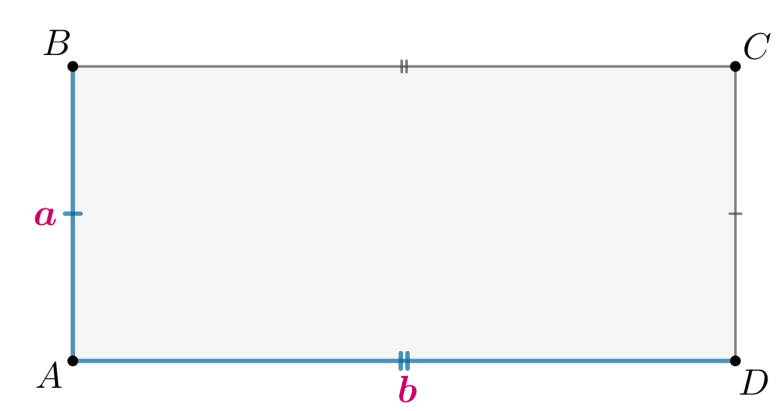
Пример, где встречается

Периметр прямоугольника равен 76, а площадь 192. Найдите большую сторону прямоугольника.

► Пусть в прямоугольнике $ABCD$ стороны $AB = a$, $AD = b$. Пусть без ограничения общности $b \geqslant a$. Тогда

$$\begin{cases} P_{ABCD} = 2(AB + AD) = 2(a + b) \\ S_{ABCD} = AB \cdot AD = ab \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a + b = 38 \\ ab = 192 \end{cases}$$



Числа a и b — корни квадратного уравнения

$$t^2 - 38t + 192 = 0$$

Его дискриминант равен

$$D = 38^2 - 4 \cdot 192 \quad \Leftrightarrow$$
$$D = 4(19^2 - 192) \quad \Leftrightarrow$$
$$D = 4 \cdot 169$$

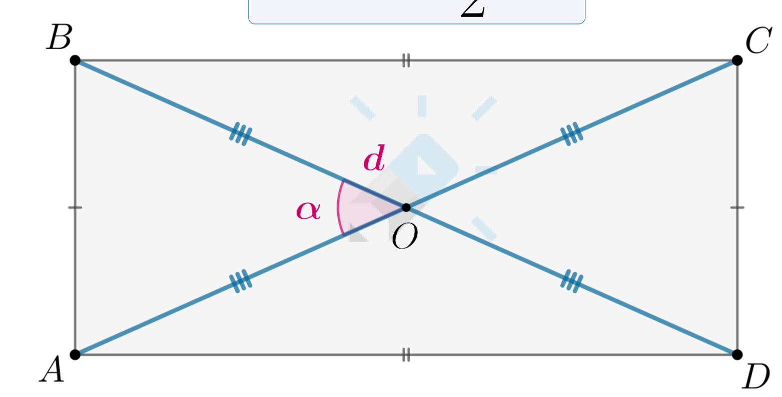
Следовательно, $t = \frac{38 \pm 26}{2} = 6; 32$.

Следовательно, большая сторона $AD = 32$.

■

Площадь прямоугольника $ABCD$ равна полупроизведению квадрата диагонали AC на синус угла AOB (или угла BOC) между диагоналями.

$$S = \frac{d^2 \sin\alpha}{2}$$

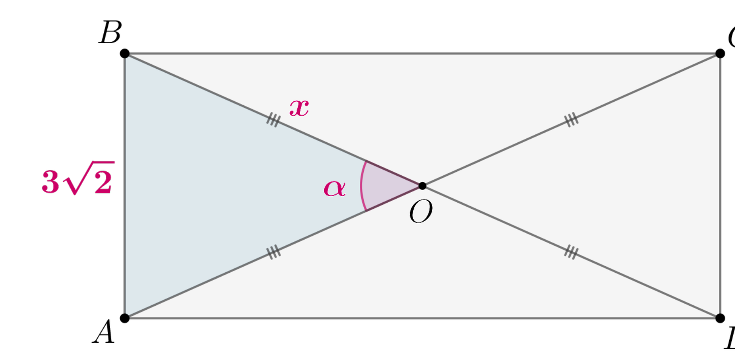


Эта формула верна, т.к. прямоугольник — параллелограмм, диагонали которого равны ($d_1 = d_2$ в формуле $S = \frac{d_1 d_2 \sin\alpha}{2}$ площади параллелограмма).

Пример, где встречается

Меньшая сторона прямоугольника равна $3\sqrt{2}$, а угол между диагоналями равен $\arccos\frac{8}{17}$. Найдите площадь прямоугольника.

► Так как диагонали прямоугольника $ABCD$ равны и точкой пересечения делятся пополам, то $AO = BO = x$; также $AB = 3\sqrt{2}$, $AB < AD$. Пусть $\angle AOB = \alpha$. Тогда $\cos\alpha = \frac{8}{17}$ (так как угол между диагоналями имеет положительный косинус, то это острый угол, следовательно, он лежит против меньшей стороны прямоугольника).



По теореме косинусов из $\triangle AOB$:

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2 \cdot AO \cdot BO \cdot \cos\alpha$$
$$18 = 2x^2(1 - \cos\alpha) = 2x^2\left(1 - \frac{8}{17}\right) \quad \Leftrightarrow$$
$$x^2 = 17$$

Площадь прямоугольника равна

$$S = \frac{AC \cdot BD \cdot \sin\alpha}{2} = 2x^2 \sin\alpha$$

Найдем $\sin\alpha$ из основного тригонометрического тождества

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \Rightarrow$$
$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{8}{17}} = \frac{15}{17}$$

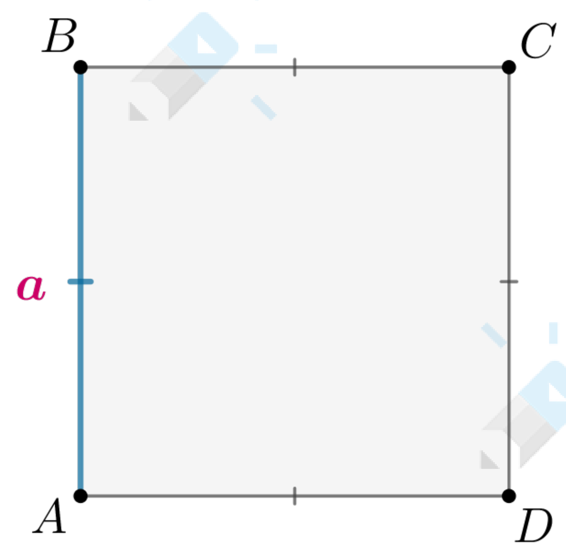
Выбираем $\sin\alpha > 0$, так как синус любого угла от 0° до 180° положительный. Следовательно,

$$S = 2 \cdot 17 \cdot \frac{15}{17} = 30$$

■

Площадь квадрата $ABCD$ равна квадрату его стороны AB.

$S = a^2$

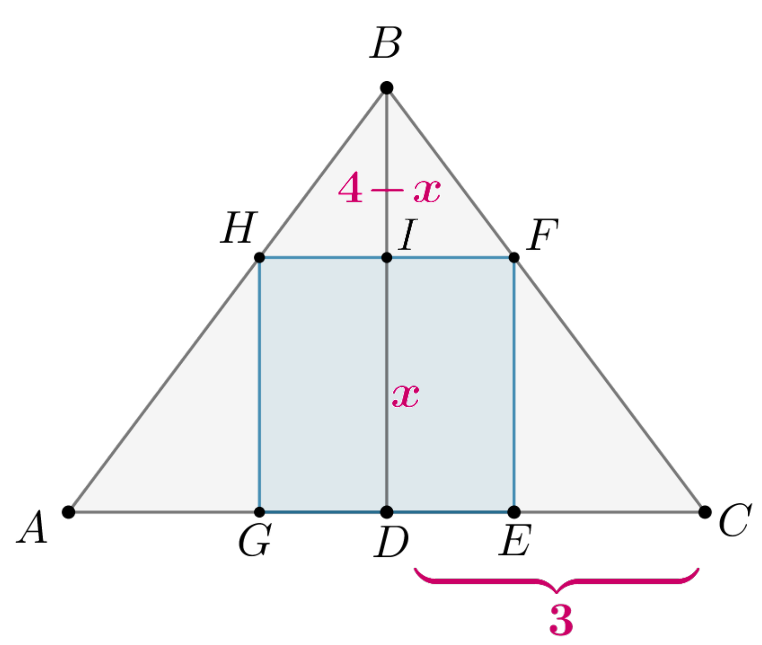


Эта формула верна, так как квадрат является прямоугольником, все стороны которого равны ($a = b$ в формуле $S = ab$ площади прямоугольника).

Пример, где встречается

В равнобедренный треугольник с основанием, равным 6, и боковой стороной, равной 5, вписан квадрат: две вершины квадрата лежат на основании треугольника, а две другие — на боковых сторонах. Найдите площадь квадрата.

▶ Пусть квадрат $GHFE$ вписан в $\triangle ABC$. Пусть сторона квадрата равна x. Проведем $BD \perp AC$, AC — основание. Тогда $DC = 3$ и по теореме Пифагора из $\triangle BDC$ находим $BD = 4$. Пусть $BD \cap HF = I$. Так как $FE \perp AC$, $BD \perp AC$, то $FE \parallel BD$, следовательно, $ID = FE = x \quad \Rightarrow \quad BI = 4 - x$. Также заметим, что $\triangle AHG = \triangle CFE$ как прямоугольные по катету $HG = FE$ и острому углу $\angle A = \angle C$, следовательно, $AG = CE \quad \Rightarrow \quad GD = ED = \frac{x}{2}$.



$\triangle BIF \sim \triangle BDC$:

$$\frac{BI}{BD} = \frac{IF}{DC} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{4-x}{4} = \frac{\frac{x}{2}}{3} \quad \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{12}{5}$$

Следовательно, площадь квадрата равна

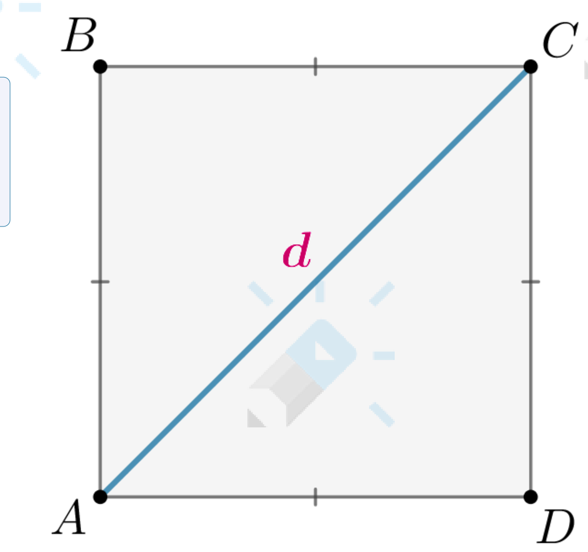
$$S_{GHFE} = GH^2 = x^2 \quad \Rightarrow$$

$$S_{GHFE} = \frac{144}{25} = 5,76$$

■

Площадь квадрата $ABCD$ равна половине квадрата его диагонали AC (или диагонали BD).

$$S = \frac{d^2}{2}$$

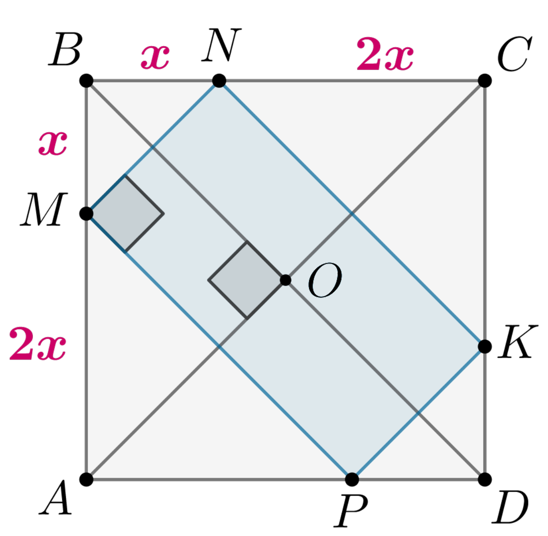


Эта формула верна, так как квадрат является прямоугольником, диагонали которого перпендикулярны, следовательно, синус угла между ними равен 1.

Пример, где встречается

В квадрат вписан прямоугольник (не являющийся квадратом) так, что все вершины прямоугольника лежат на сторонах квадрата. Во сколько раз площадь квадрата больше площади прямоугольника, если вершины прямоугольника делят стороны квадрата в отношении $2:1$?

▶ Пусть $ABCD$ — квадрат, $MNKP$ — прямоугольник. Либо $AM : MB = 2 : 1$ и $BN : NC = 1 : 2$, либо $AM : MB = 2 : 1$ и $BN : NC = 2 : 1$. Во втором случае прямоугольник будет являться квадратом (докажите это), следовательно, нам подходит первый случай. Тогда также $CK : KD = 2 : 1$, $DP : PA = 1 : 2$.



Следовательно, по обратной теореме Фалеса $MN \parallel AC$, $NK \parallel BD$.
Пусть диагональ квадрата равна d, $AM = 2x$, $MB = x$. Заметим, что $\triangle BMN \sim \triangle BAC \quad \Rightarrow$

$$\frac{MN}{AC} = \frac{BN}{BC} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad MN = \frac{1}{3}d$$

Также $\triangle CNK \sim \triangle CBD \quad \Rightarrow$

$$\frac{NK}{BD} = \frac{CN}{CB} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad NK = \frac{2}{3}d$$

Тогда

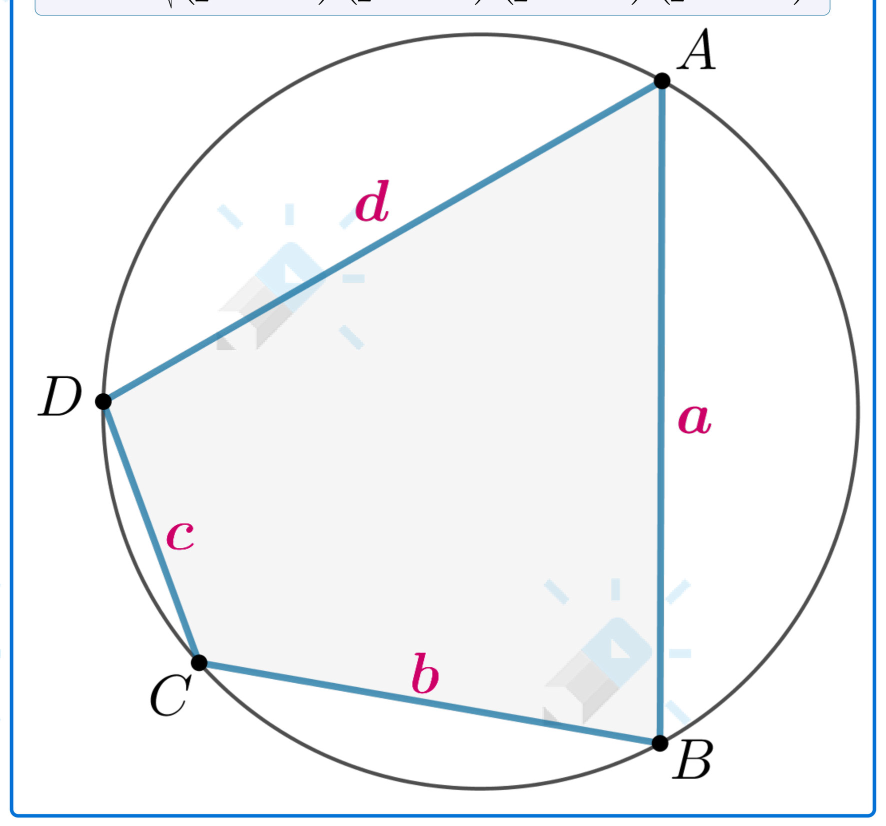
$$\frac{S_{ABCD}}{S_{MNKP}} = \frac{\frac{1}{2}AC^2}{MN \cdot NK} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{MNKP}} = \frac{\frac{1}{2}d^2}{\frac{1}{3}d \cdot \frac{2}{3}d} = \frac{9}{4} = 2,25$$

■

Площадь вписанного четырехугольника $ABCD$ со сторонами a, b, c, d и полупериметром p ищется по формуле

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$



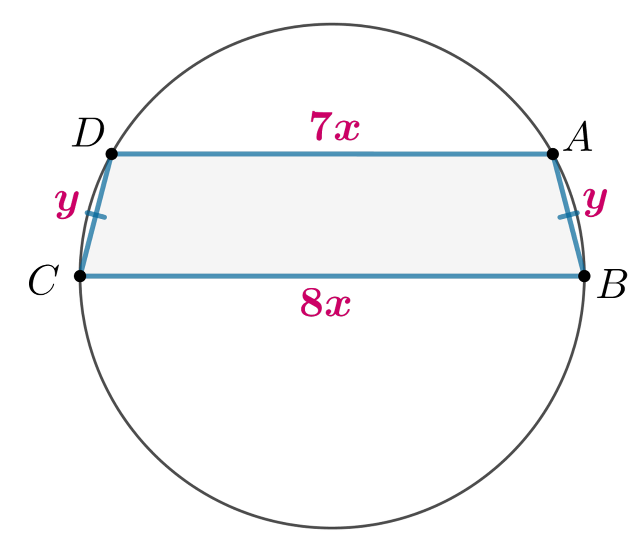
Пример, где встречается

Около трапеции описана окружность. Периметр трапеции равен 19, средняя линия равна 7, 5, основания трапеции относятся как $7:8$. Найдите площадь трапеции, умноженную на $\sqrt{15}$.

▶ Пусть дана трапеция $ABCD$, основания $BC = 8x$, $AD = 7x$. Так как трапеция вписанная, то она равнобедренная, следовательно, $AB = CD = y$.
Средняя линия трапеции равна полусумме оснований, откуда

$$7x + 8x = 2 \cdot 7,5 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$$

Следовательно, $BC = 8$, $AD = 7$.



Так как сумма оснований равна 15, то сумма боковых сторон равна $2y = P_{ABCD} - (AD + BC) = 19 - 15 = 4$. Отсюда $y = 2$.

Полупериметр трапеции равен $p = \frac{19}{2}$.

Тогда площадь трапеции равна

$$S = \sqrt{(p-AB)(p-BC)(p-CD)(p-AD)}$$

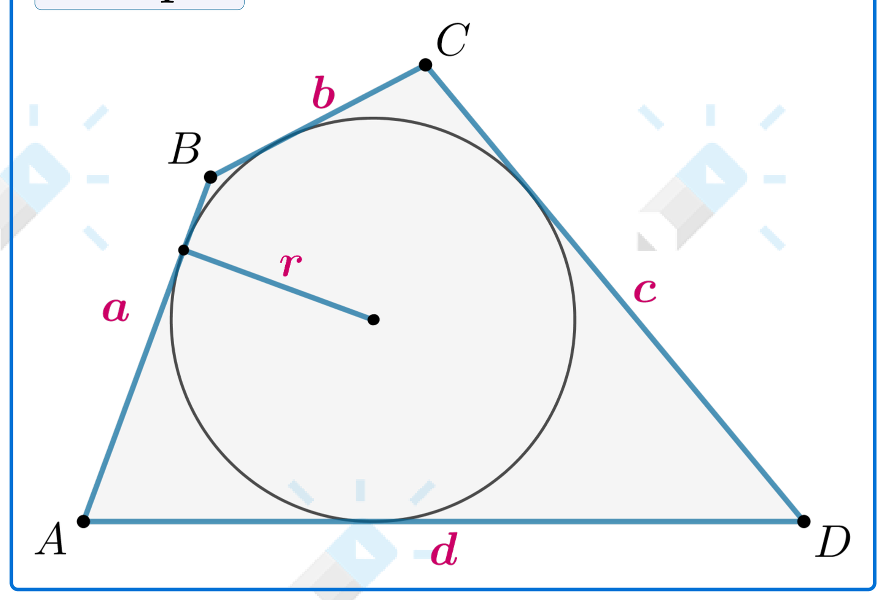
$$S = \sqrt{\left(\frac{19}{2}-2\right)\left(\frac{19}{2}-8\right)\left(\frac{19}{2}-2\right)\left(\frac{19}{2}-7\right)} \quad \Rightarrow$$

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{15^3} = \frac{15\sqrt{15}}{4}$$

Тогда ответ равен $S\sqrt{15} = \frac{225}{4} = 56,25$. ■

Площадь описанного четырехугольника $ABCD$ со сторонами a, b, c, d, полупериметром $p = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$ и радиусом r вписанной окружности ищется по формуле

$$S = pr$$

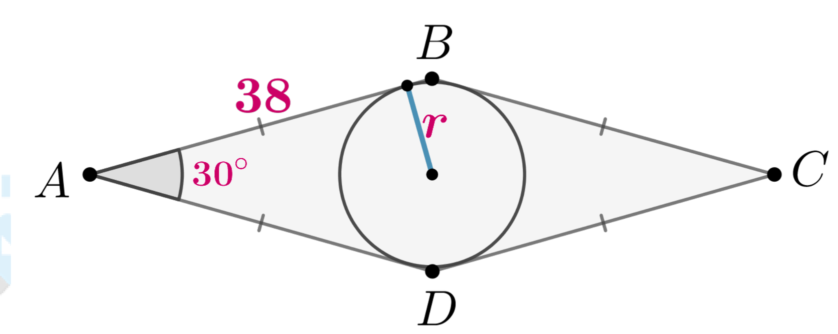


Пример, где встречается

Сторона ромба равна 38, острый угол равен 30°. Найдите радиус окружности, вписанной в этот ромб.

▶ Пусть дан ромб $ABCD$, $AB = 38$, $\angle A = 30^\circ$, r — радиус вписанной окружности.
Будем искать радиус вписанной окружности по формуле

$$r = \frac{S}{p}$$



Полупериметр ромба равен

$$p_{ABCD} = 2AB = 2 \cdot 38$$

Площадь ромба равна

$$S_{ABCD} = AB^2 \sin\angle A =$$

$$= 38^2 \cdot \frac{1}{2}$$

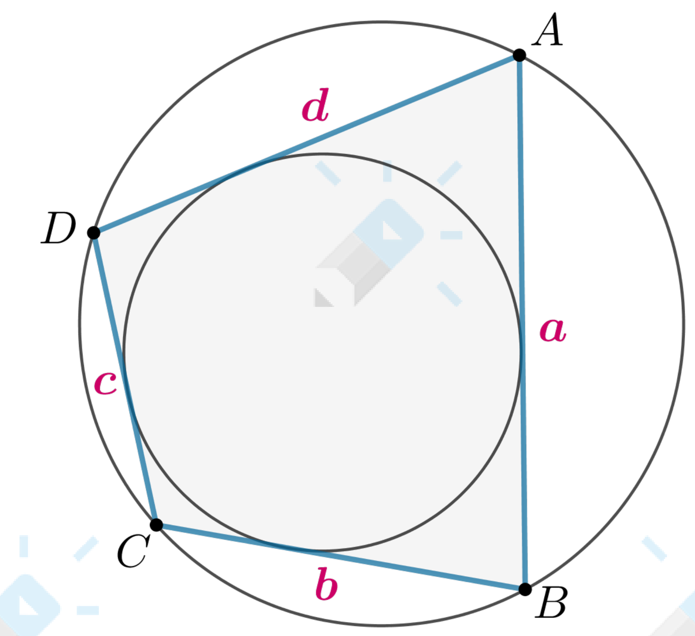
Следовательно,

$$r = \frac{38^2 \cdot \frac{1}{2}}{2 \cdot 38} = \frac{38}{4} = 9,5$$

■

Площадь описанного и вписанного четырехугольника $ABCD$ со сторонами a, b, c, d, ищется по формуле

$$S = \sqrt{abcd}$$



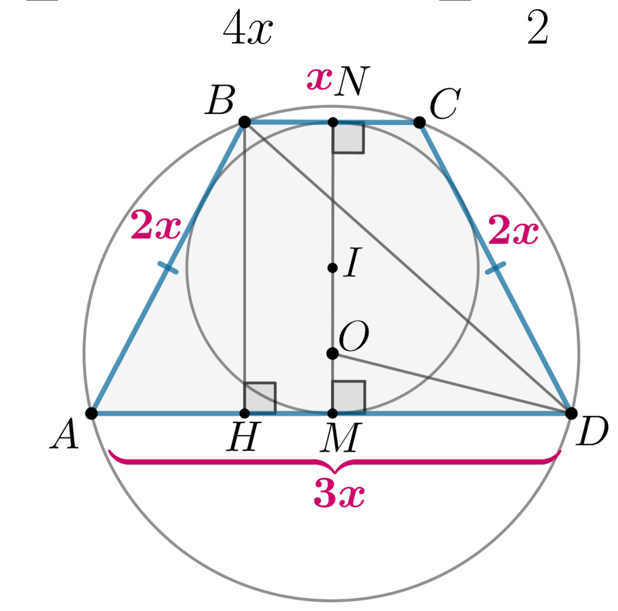
Пример, где встречается

В трапецию $ABCD$ вписана окружность и около трапеции описана окружность. Боковая сторона AB в два раза больше меньшего основания BC и равна $\sqrt{3}$. Найдите расстояние между центрами окружностей.

▶ Так как $ABCD$ — вписанная, то $AB = CD = 2x = \sqrt{3}$, тогда $BC = x$. Так как $ABCD$ — описанная, то $AD = 3x$. Центр O описанной окружности и центр I вписанной окружности находятся на прямой MN, проходящей через середины оснований перпендикулярно им. R — радиус описанной окружности, r — радиус вписанной. Тогда

$$r = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{AB \cdot BC \cdot CD \cdot AD}}{AB + CD}$$

$$r = \frac{\sqrt{2x \cdot x \cdot 2x \cdot 3x}}{4x} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$



Тогда высота $BH = 2r = x\sqrt{3}$. $HD = \frac{1}{2}(AD+BC) = 2x$. По теореме Пифагора из $\triangle BHD$ $BD = x\sqrt{7}$. Также

$$\sin\angle A = \frac{BH}{AB} = \frac{x\sqrt{3}}{2x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Следовательно, так как окружность, описанная около $ABCD$ — это та же окружность, которая описана около $\triangle ABD$, по теореме синусов имеем

$$R = \frac{BD}{2\sin\angle A} = \frac{x\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$$

По теореме Пифагора из $\triangle OMD$ $OM = \sqrt{R^2 - MD^2} = \frac{x\sqrt{3}}{6}$. Следовательно,

$$IO = r - OM = \frac{x\sqrt{3}}{2} - \frac{x\sqrt{3}}{6} = \frac{x\sqrt{3}}{3} = 0,5$$

■