Справочник по планиметрии от «Школково»

Факты, выделенные **красным**, на ЕГЭ нужно уметь доказывать!

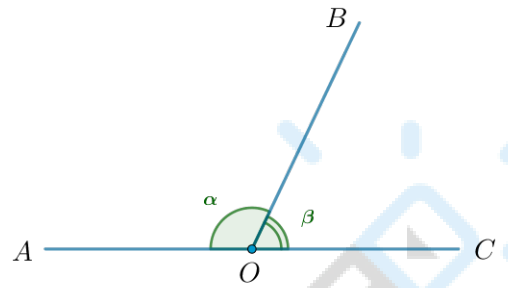
Содержание

1 Базовые факты об углах и прямых

1.1 Смежные углы

Два угла, у которых одна сторона общая, а две другие являются продолжениями друг друга, называются смежными. Сумма смежных углов равна 180°.

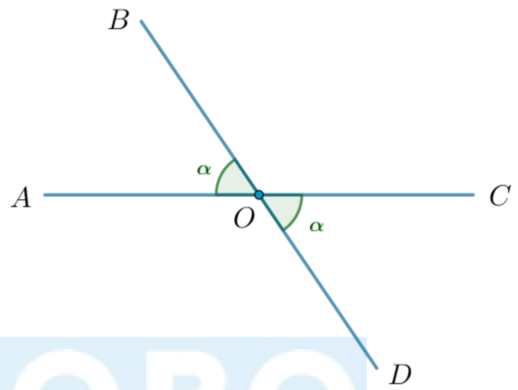
$$\angle AOB + \angle BOC = \alpha + \beta = 180^\circ$$



1.2 Вертикальные углы

Два угла называются вертикальными, если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого. Вертикальные углы равны.

$$\angle AOB = \angle COD$$



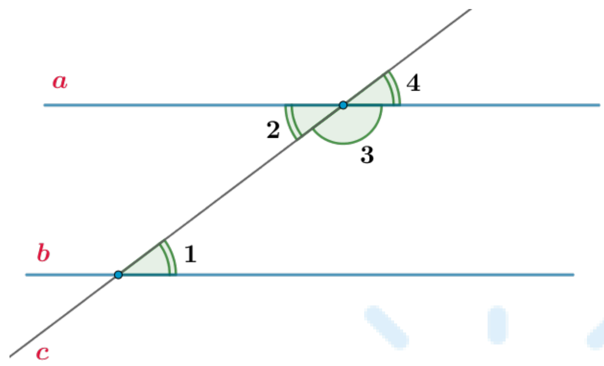
1.3 Свойства и признаки параллельных прямых

Три свойства: если $a \parallel b$ и c — секущая, то

1. $\angle 1 = \angle 2$ (накрест лежащие углы)
2. $\angle 1 = \angle 4$ (соответственные углы)
3. $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$ (односторонние углы)

Три признака: $a \parallel b$ при секущей c, если:

1. $\angle 1 = \angle 2$ (накрест лежащие углы)
2. $\angle 1 = \angle 4$ (соответственные углы)
3. $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$ (односторонние углы)



1.4 Обобщенная теорема Фалеса

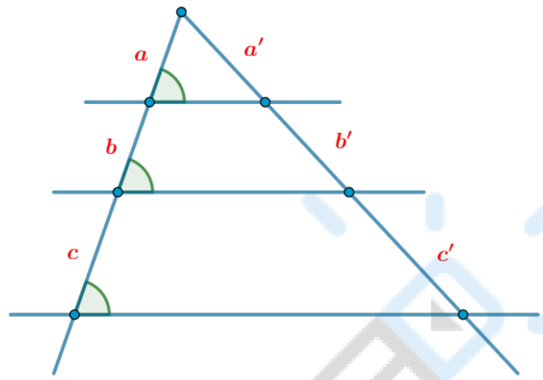
Прямая теорема

Параллельные прямые высекают на сторонах угла пропорциональные отрезки:

$$a : b : c = a' : b' : c'$$

Обратная теорема

Если прямые высекают пропорциональные отрезки на сторонах угла, считая от вершины, то эти прямые параллельны.

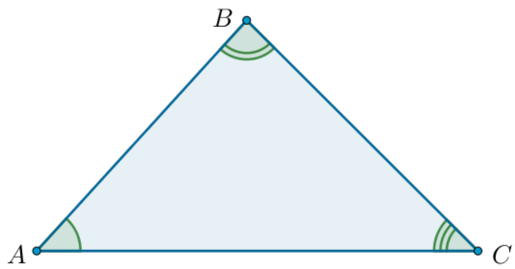


2 Базовые факты о треугольниках

2.1 Сумма углов треугольника

Сумма углов треугольника равна 180° :

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

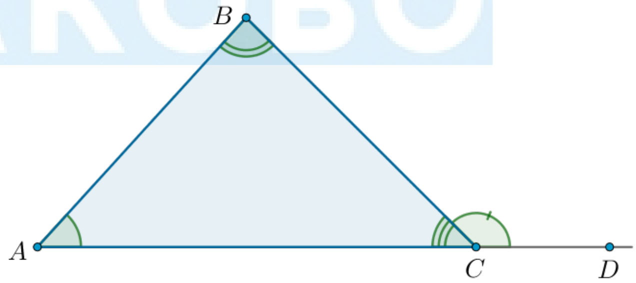


2.2 Внешний угол треугольника

Внешним угол треугольника называется угол, смежный с каким-нибудь внутренним углом треугольника.

Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.

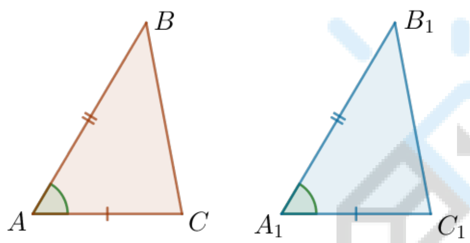
$$\angle BCD = 180^\circ - \angle C = \angle A + \angle B$$



2.3 Признаки равенства треугольников

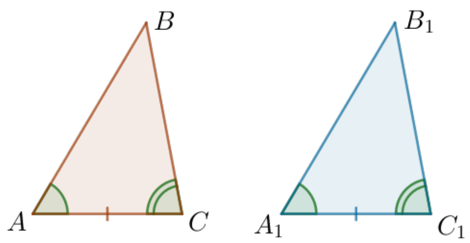
По двум сторонам и углу между ними

Если $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $\angle A = \angle A_1$, то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.



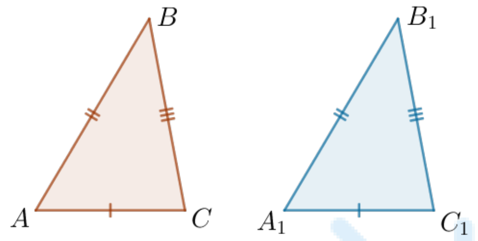
По стороне и двум прилежащим к ней углам

Если $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$ и $\angle C = \angle C_1$, то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.



По трем сторонам

Если $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $BC = B_1C_1$, то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

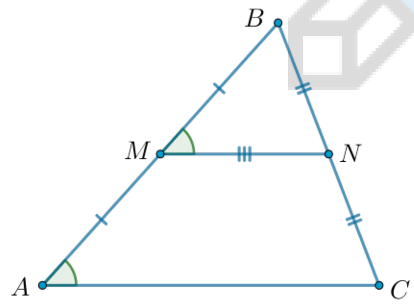


2.4 Средняя линия треугольника

Средняя линия треугольника — отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника.

1. Средняя линия треугольника равна половине третьей стороны и параллельна ей, то есть

$$MN = \frac{1}{2}AC \quad \text{и} \quad MN \parallel AC$$



2. Средняя линия треугольника отсекает от треугольника подобный ему треугольник:

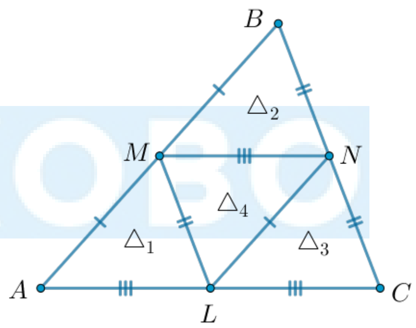
$$\triangle MBN \sim \triangle ABC$$

3. Средние линии треугольника разбивают его на четыре равных треугольника:

$$\triangle_1 = \triangle_2 = \triangle_3 = \triangle_4$$

Следовательно, площади этих треугольников равны:

$$S_{\triangle_1} = S_{\triangle_2} = S_{\triangle_3} = S_{\triangle_4}$$

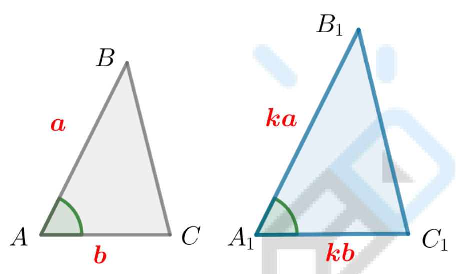


2.5 Признаки подобия треугольников

Два треугольника называются подобными, если их углы соответственно равны, а стороны, лежащие напротив равных углов, относятся друг к другу с одним и тем же коэффициентом.

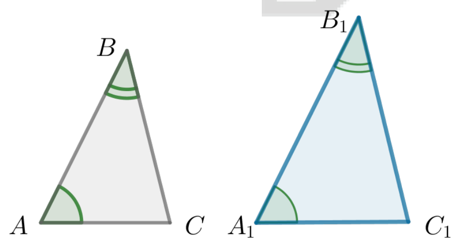
По отношению двух сторон и углу между ними

Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы между ними равны, то такие треугольники подобны.



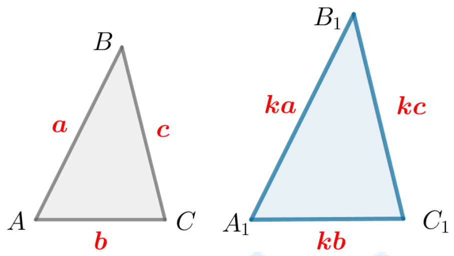
По двум углам

Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.



По отношению трех сторон

Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

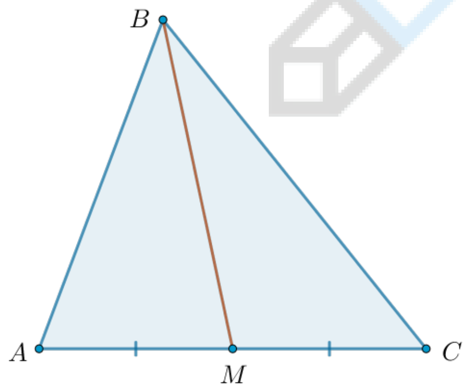


3 Медиана, биссектриса и высота треугольника

3.1 Медиана треугольника

Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны, называется медианой треугольника.
Формула длины медианы треугольника:

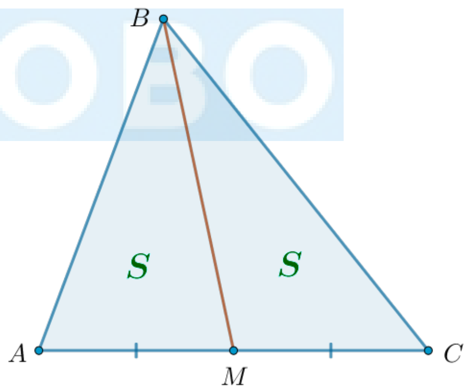
$$BM = \frac{1}{2}\sqrt{2AB^2 + 2BC^2 - AC^2}$$



3.2 Медиана и площади

Медиана треугольника делит его на два треугольника, равных по площади (равновеликих):

$$S_{\triangle ABM} = S_{\triangle CBM}$$



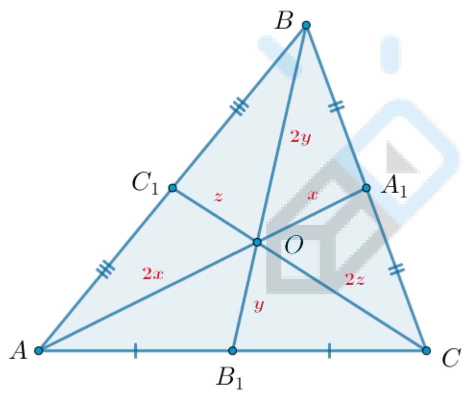
3.3 Точка пересечения медиан

Медианы треугольника пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся в отношении $2:1$, считая от вершины:

$$AO : OA_1 = BO : OB_1 = CO : OC_1 = 2 : 1$$

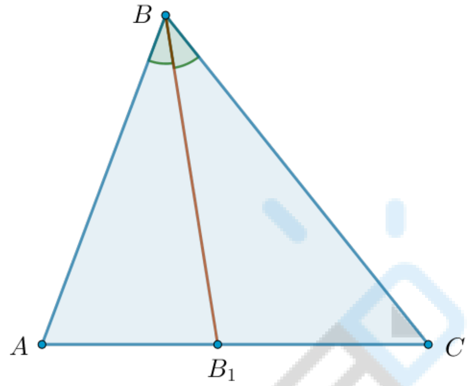
При этом площади шести образовавшихся треугольников равны:

$$S_{AOB_1} = S_{COB_1} = S_{COA_1} = S_{BOA_1} = S_{BOC_1} = S_{AOC_1}$$



3.4 Биссектриса треугольника

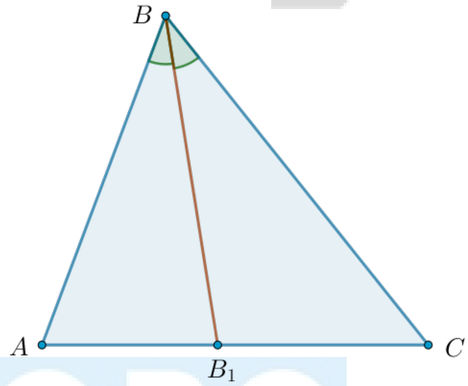
Отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны, называется биссектрисой треугольника.
Напомним, что биссектрисой угла называется луч, исходящий из вершины угла и делящий его на два равных угла.



3.5 Главное свойство биссектрисы треугольника

Пусть BB_1 — биссектриса в треугольнике ABC. Тогда

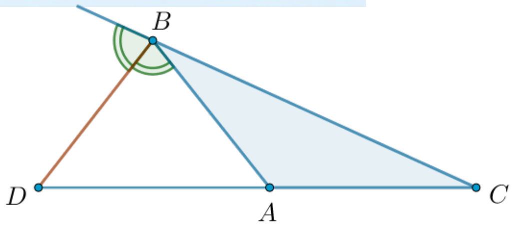
$$\frac{AB}{BC} = \frac{AB_1}{B_1C}$$



3.6 Свойство биссектрисы внешнего угла

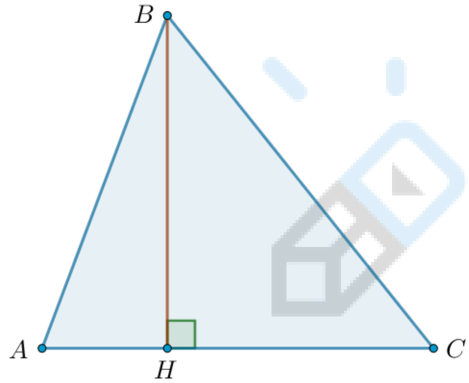
Пусть BD — внешняя биссектриса треугольника ABC. Тогда

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$$



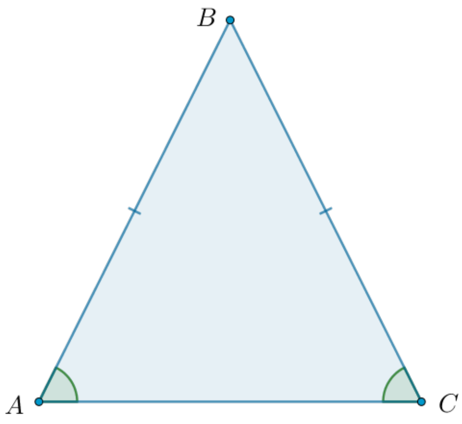
3.7 Высота треугольника

Перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону, называется высотой треугольника.



4 Равнобедренный треугольник

Треугольник называется равнобедренным, если две его стороны равны. Равные стороны называются боковыми сторонами, а третья сторона — основанием равнобедренного треугольника.

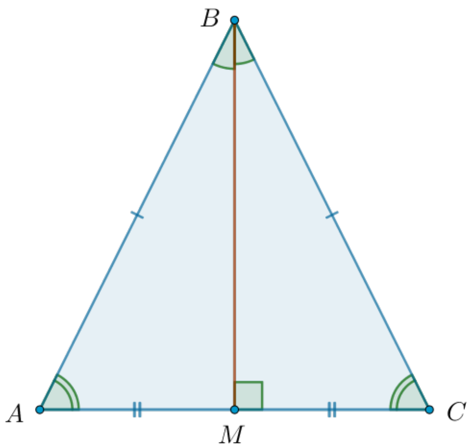


4.1 Свойства равнобедренного треугольника

1. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.
2. В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведенная к основанию, является медианой и высотой.
3. Высота равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является медианой и биссектрисой.
4. Медиана равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является высотой и биссектрисой.

4.2 Признаки равнобедренного треугольника

1. Если в треугольнике равны два угла, то он равнобедренный.
2. Если в треугольнике биссектриса совпадает с медианой, то он равнобедренный.
3. Если в треугольнике медиана совпадает с высотой, то он равнобедренный.
4. Если в треугольнике высота совпадает с биссектриссой, то он равнобедренный.

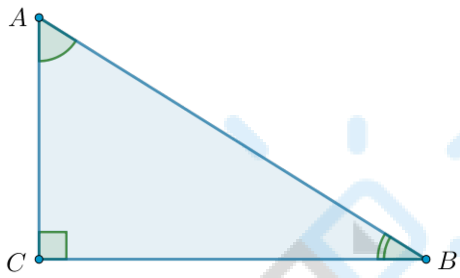


5 Прямоугольный треугольник и его свойства

5.1 Что такое прямоугольный треугольник?

Прямоугольный треугольник — это треугольник, в котором один угол прямой, то есть 90°.

$$\angle C = 90^\circ = \angle A + \angle B$$



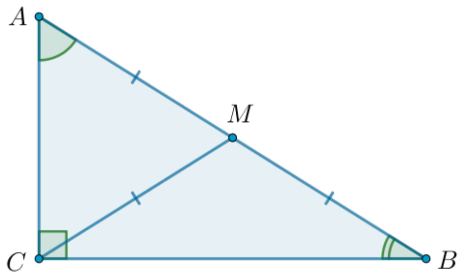
Гипотенуза — это сторона прямоугольного треугольника, лежащая напротив прямого угла.
Катеты — это стороны прямого угла в прямоугольном треугольнике.

5.2 Медиана прямоугольного треугольника

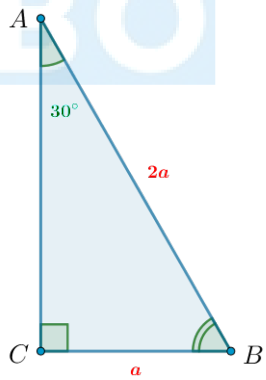
Медиана треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы:

$$CM = \frac{1}{2}AB = AM = MB$$

Таким образом, получаются два равнобедренных треугольника: $\triangle AMC$ и $\triangle CMB$.



5.3 Прямоугольный треугольник с углом в 30 градусов

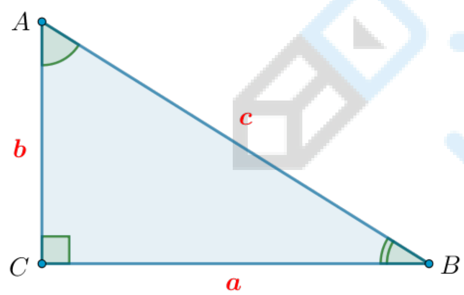


Катет, лежащий напротив угла 30°, равен половине гипотенузы.
Если катет равен половине гипотенузы, то он лежит напротив угла 30°.

5.4 Теорема Пифагора

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

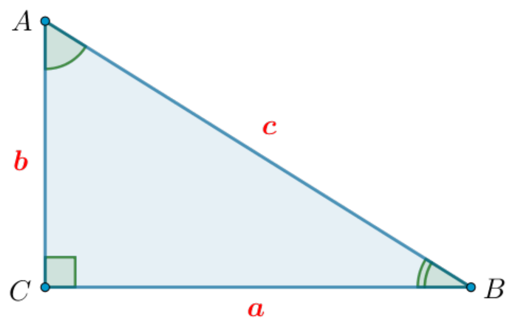
$$c^2 = a^2 + b^2$$



5.5 Тригонометрия в прямоугольном треугольнике

1. Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение длины прилежащего к этому углу катета к длине гипотенузы.

$$\cos\angle A = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}, \quad \cos\angle B = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$$



2. Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение длины противолежащего этому углу катета к длине гипотенузы.

$$\sin\angle A = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}, \quad \sin\angle B = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$$

3. Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего этому углу катета к прилежащему.

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{tg} B = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$$

4. Котангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего к этому углу катета к противолежащему.

$$\operatorname{ctg} A = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}, \quad \operatorname{ctg} B = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}$$

5.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

6. Таблица синусов, косинусов, тангенсов и котангенсов углов из первой четверти:

	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

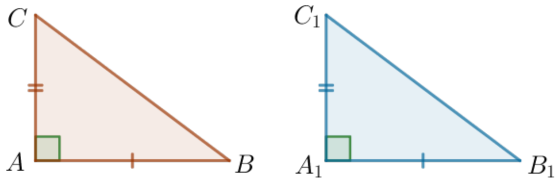
7. Основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

5.6 Признаки равенства прямоугольных треугольников

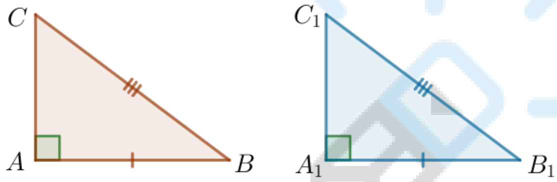
По двум катетам

Если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого, то такие треугольники равны.



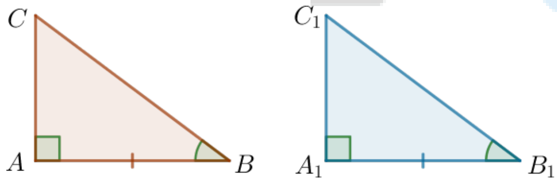
По катету и гипотенузе

Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого, то такие треугольники равны.



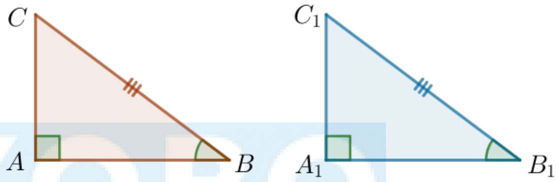
По катету и острому углу

Если катет и прилежащий (противолежащий) к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему (противолежащему) к нему острому углу другого, то такие треугольники равны.

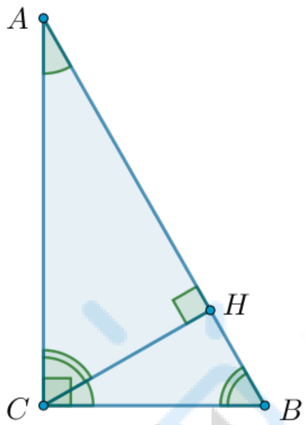


По гипотенузе и острому углу

Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого, то такие треугольники равны.



5.7 Высота прямоугольного треугольника



1. Высота из вершины прямого угла треугольника делит его на два треугольника, подобных исходному:

$$\triangle ABC \sim \triangle AHC \sim \triangle BHC$$

2. Квадрат высоты из прямого угла треугольника равен произведению длин отрезков, на которые она делит гипотенузу:

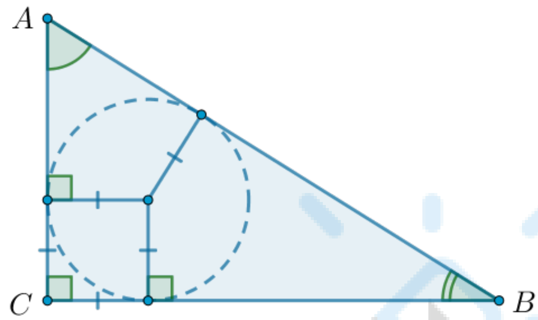
$$CH^2 = AH \cdot BH$$

3. Высота из прямого угла треугольника равна произведению длин катетов, деленному на длину гипотенузы:

$$CH = \frac{AC \cdot BC}{AB}$$

5.8 Вписанная окружность в прямоугольном треугольнике

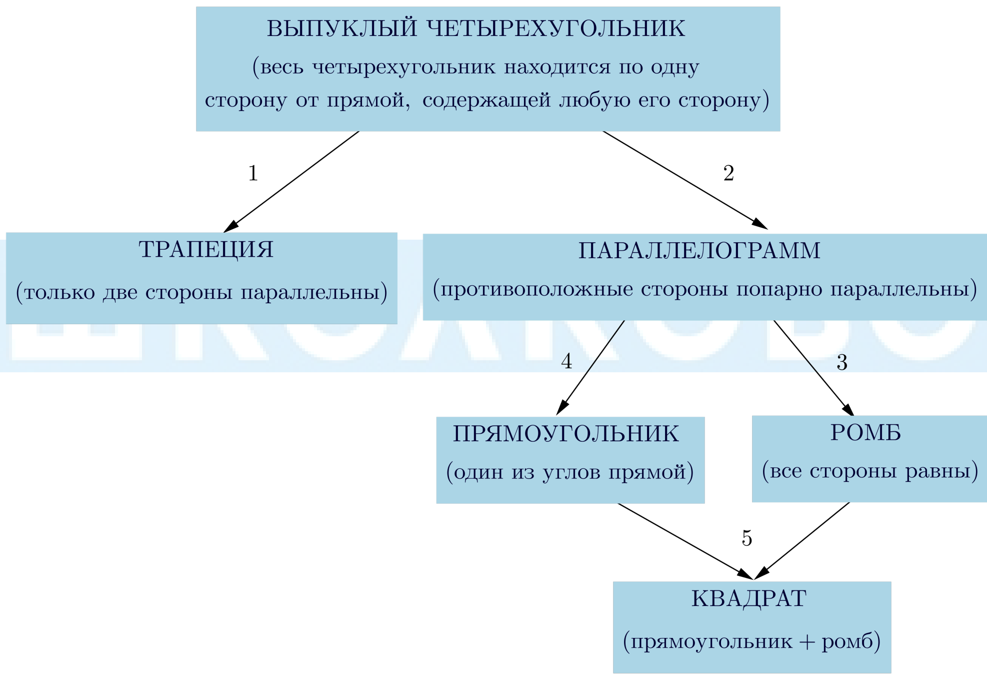
Вершина прямого угла, точки касания вписанной окружности и катетов и центр вписанной окружности прямоугольного треугольника образуют квадрат.



6 Базовые факты о многоугольниках

6.1 Четырехугольники

Сумма внутренних углов любого выпуклого четырехугольника равна 360°.



1. Если у выпуклого четырехугольника две стороны параллельны, а две другие не параллельны, то такой четырехугольник называется трапецией.

2. Если у выпуклого четырехугольника противоположные стороны попарно параллельны, то он называется параллелограммом.

3. Если у параллелограмма все стороны равны, то он называется ромбом.

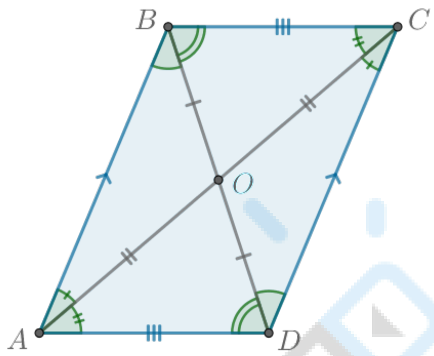
4. Если у параллелограмма хотя бы один угол прямой, то он называется прямоугольником.

5. Если у ромба хотя бы один угол прямой, то он называется квадратом, ИЛИ если у прямоугольника все стороны равны, то он называется квадратом.

6.2 Параллелограмм

Параллелограмм — четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

Признаки параллелограмма.
Четырехугольник является параллелограммом, если

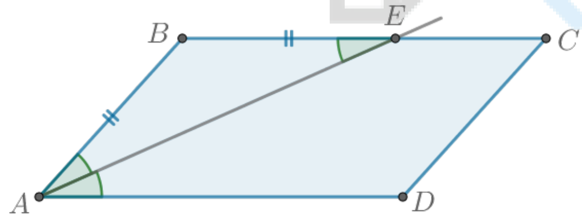


1. противоположные стороны попарно равны.
2. две стороны равны и параллельны.
3. диагонали точкой пересечения делятся пополам.

Свойства параллелограмма:

1. противоположные стороны попарно равны.
2. противоположные углы попарно равны.
3. диагонали точкой пересечения делятся пополам.

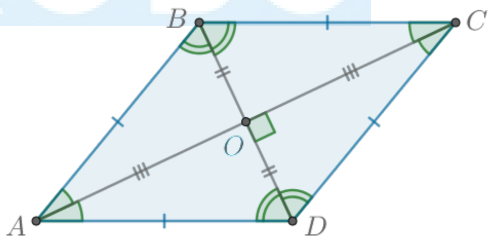
Биссектриса AE параллелограмма $ABCD$ отсекает от него равнобедренный треугольник, то есть $AB = BE$ и $\angle BAE = \angle DAE = \angle BEA$.



6.3 Ромб

Ромб — четырехугольник, у которого все стороны равны. Всякий ромб является параллелограммом. Соответственно, ромб обладает всеми свойствами параллелограмма.

Признаки ромба.
Параллелограмм является ромбом, если



1. диагонали взаимно перпендикулярны.
2. диагонали являются биссектрисами его углов.

Свойства ромба:

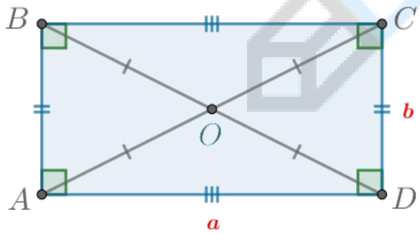
1. диагонали взаимно перпендикулярны.
2. диагонали являются биссектрисами его углов.

6.4 Прямоугольник

Прямоугольник — параллелограмм, у которого хотя бы один угол прямой. Соответственно, прямоугольник обладает всеми свойствами параллелограмма.

Признаки прямоугольника:

1. Если у выпуклого четырехугольника все углы прямые, то он является прямоугольником.
2. Если у параллелограмма диагонали равны, то он является прямоугольником.



Свойство прямоугольника:
Диагонали прямоугольника равны.

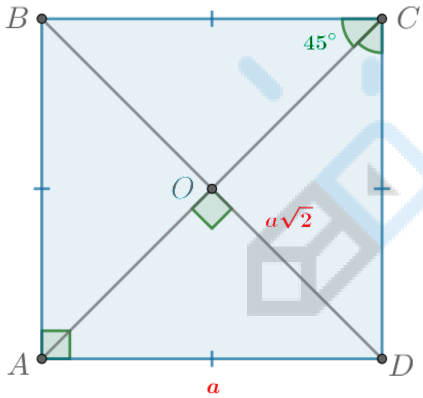
6.5 Квадрат

Квадрат — прямоугольник, у которого все стороны равны.

Альтернативное определение: квадрат — это ромб, у которого хотя бы один угол прямой. Соответственно, квадрат обладает всеми свойствами прямоугольника и ромба.

Свойства квадрата:

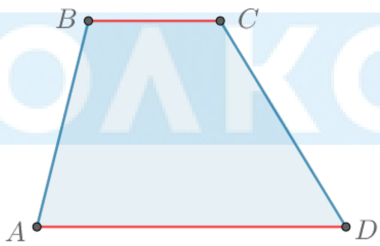
1. Все стороны равны.
2. Все углы прямые.
3. Диагонали точкой пересечения делятся пополам.
4. Диагонали равны.
5. Диагонали взаимно перпендикулярны.
6. Диагонали делят углы квадрата пополам.
7. Диагональ квадрата со стороной a равна $a\sqrt{2}$.



6.6 Трапеция

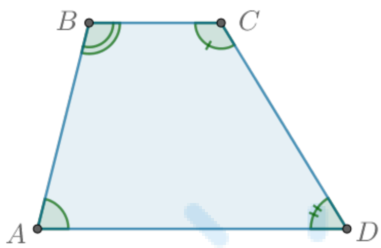
Трапеция — это выпуклый четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие стороны не параллельны.

Параллельные стороны называются основаниями, а две другие — боковыми сторонами.



Сумма углов при боковой стороне равна 180° :

$$\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = 180^\circ$$



6.7 Равнобедренная трапеция

Если боковые стороны трапеции равны, то она называется равнобедренной.

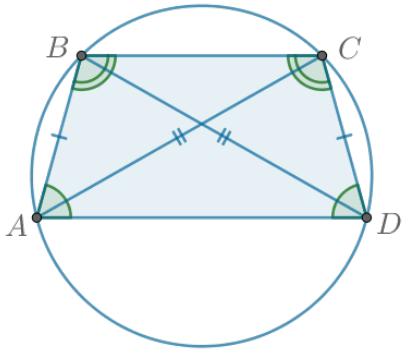
Свойства равнобедренной трапеции:

1. В равнобедренной трапеции углы при любом основании равны.
2. В равнобедренной трапеции длины диагоналей равны.
3. Около равнобедренной трапеции можно описать окружность.

Признаки равнобедренной трапеции:

1. Если в трапеции равны углы при основании, то она равнобедренная.

2. Если диагонали трапеции равны, то она равнобедренная.
3. Если трапецию можно вписать в окружность, то она равнобедренная.

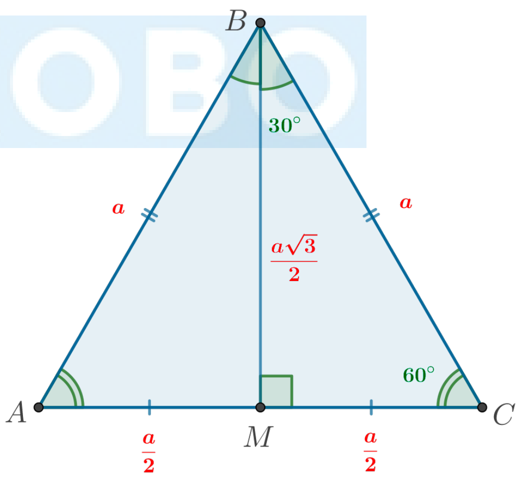


6.8 Многоугольники

Сумма внутренних углов любого выпуклого n-угольника равна $(n-2)\cdot 180^\circ$.
Правильный многоугольник — многоугольник, у которого все стороны равны и все углы равны.
Каждый угол правильного n-угольника равен $\dfrac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$.

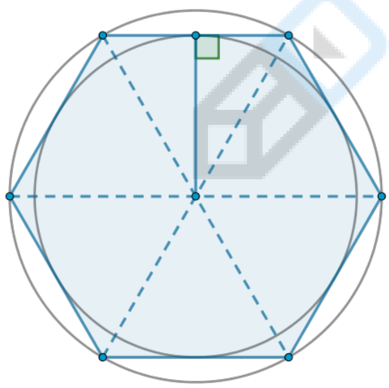
6.9 Правильный треугольник

1. Все углы правильного треугольника равны 60°.
2. Высота, медиана и биссектриса правильного треугольника равна $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, если сторона треугольника равна a.
3. Площадь правильного треугольника со стороной a равна $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.



6.10 Правильный шестиугольник

1. Большие диагонали делят его на 6 равных равносторонних треугольников.
2. Большая диагональ в два раза больше стороны.
3. Центры вписанной и описанной окружностей совпадают — это точка пересечения больших диагоналей.
4. Радиус описанной окружности равен стороне.

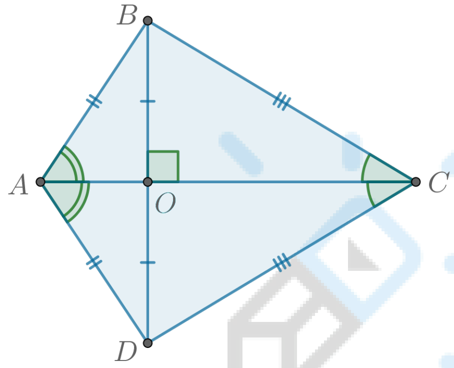


6.11 Дельтоид

Дельтоид — четырёхугольник, четыре стороны которого можно сгруппировать в две пары равных смежных сторон.

Свойства дельтоида:

1. Диагонали взаимно перпендикулярны.
2. В любой выпуклый дельтоид можно вписать окружность.
3. Точка пересечения диагоналей делит одну из них пополам, а другая диагональ является биссектрисой углов и делит дельтоид на два равных треугольника.



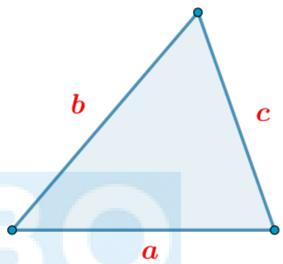
7 Все о площадях

7.1 Формулы площади треугольника

1. Формула Герона площади треугольника

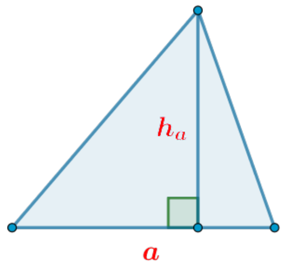
$$S_\triangle = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где p — полупериметр треугольника.



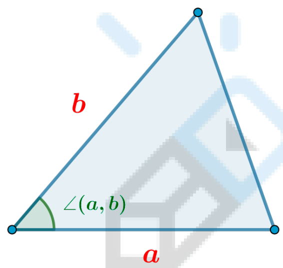
2. Площадь треугольника равна полупроизведению основания на высоту:

$$S_\triangle = \frac{a \cdot h_a}{2}$$



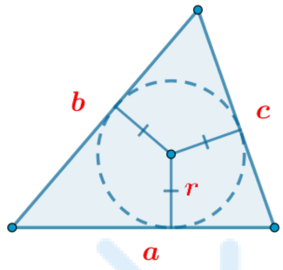
3. Площадь треугольника равна полупроизведению сторон на синус угла между ними:

$$S_\triangle = \frac{1}{2}\, ab \cdot \sin \angle(a,b)$$



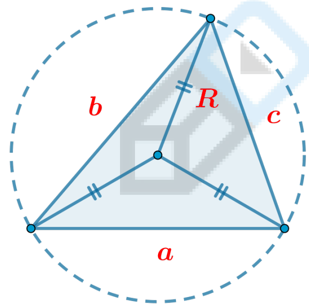
4. Площадь треугольника равна произведению полупериметра на радиус вписанной окружности:

$$S_{\triangle} = p \cdot r = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$$



5. Площадь треугольника равна произведению трех его сторон, деленному на учетверенный радиус описанной окружности:

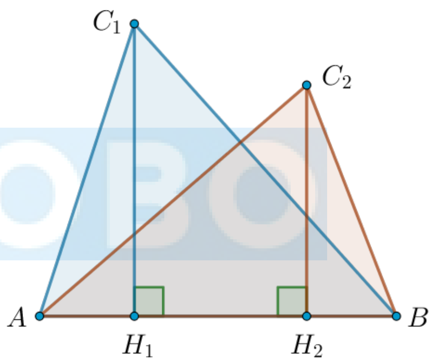
$$S_{\triangle} = \frac{abc}{4R}$$



7.2 Теоремы о площадях треугольников

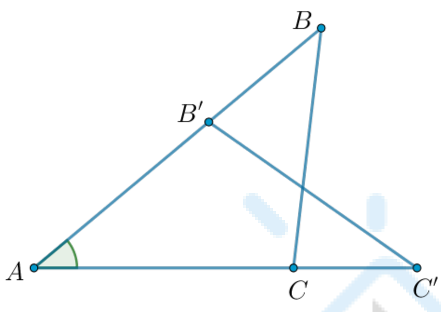
Площади треугольников, имеющих общую сторону, относятся как высоты, проведенные к этой стороне:

$$\frac{S_{\triangle ABC_1}}{S_{\triangle ABC_2}} = \frac{C_1H_1}{C_2H_2}$$



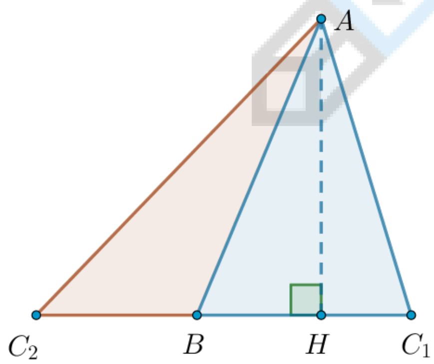
Площади треугольников, имеющих общий угол, относятся как произведения сторон, образующих этот угол:

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AB'C'}} = \frac{AB \cdot AC}{AB' \cdot AC'}$$



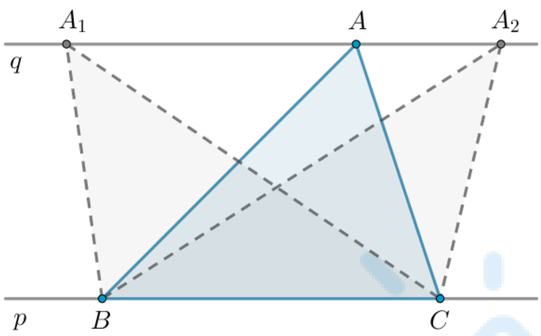
Площади треугольников, имеющих общую высоту, относятся как основания, к которым эта высота проведена:

$$\frac{S_{\triangle ABC_1}}{S_{\triangle ABC_2}} = \frac{BC_1}{BC_2}$$



Если прямые p и q параллельны, то

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle A_1BC} = S_{\triangle A_2BC}$$

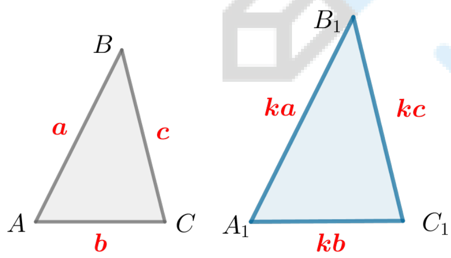


Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия:

$$\frac{S_{\triangle A_1B_1C_1}}{S_{\triangle ABC}} = k^2$$

Отношение периметров подобных треугольников равно коэффициенту подобия:

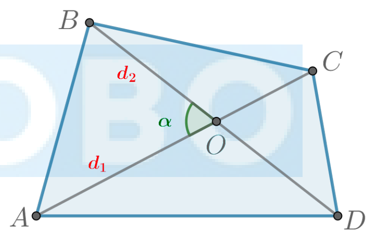
$$\frac{P_{\triangle A_1B_1C_1}}{P_{\triangle ABC}} = k$$



7.3 Площадь выпуклого четырехугольника

Площадь выпуклого четырехугольника равна полупроизведению диагоналей и синуса угла между ними:

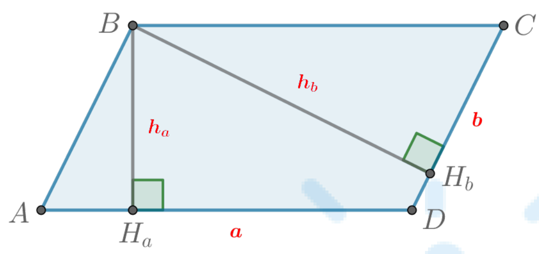
$$S = \frac{1}{2}\, d_1 d_2 \cdot \sin\alpha$$



7.4 Площадь параллелограмма

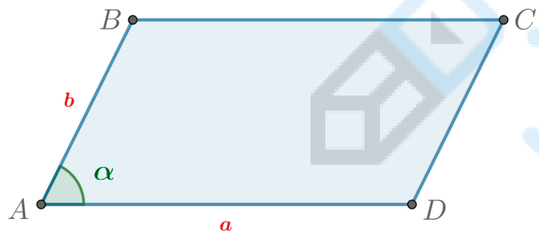
Площадь параллелограмма равна произведению высоты и стороны, к которой она проведена:

$$S = AD \cdot BH_a = a \cdot h_a = CD \cdot BH_b = b \cdot h_b$$



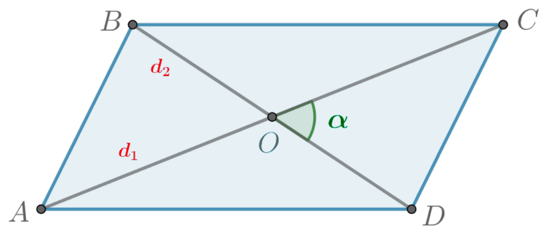
Площадь параллелограмма равна произведению сторон и синуса угла между ними:

$$S = AB \cdot AD \cdot \sin\alpha = ab \cdot \sin\alpha$$



Площадь параллелограмма равна полупроизведению диагоналей и синуса угла между ними:

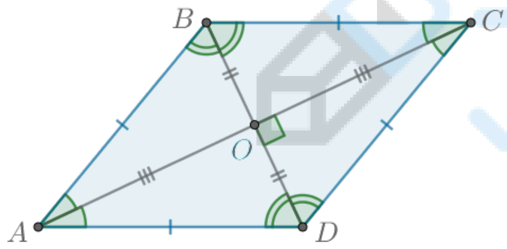
$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot d_1 d_2 \cdot \sin\alpha$$



7.5 Площадь ромба

Так как ромб — это параллелограмм, то его площадь можно найти с помощью любой формулы, справедливой для параллелограмма. Следовательно, формула площади через диагонали примет следующий вид:

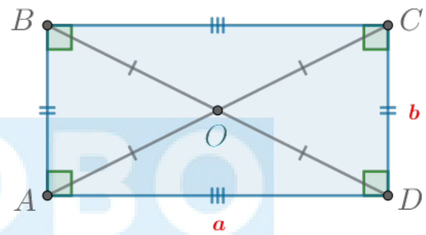
$$S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin 90^\circ = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD$$



7.6 Площадь прямоугольника

Площадь прямоугольника равна произведению длин его смежных сторон:

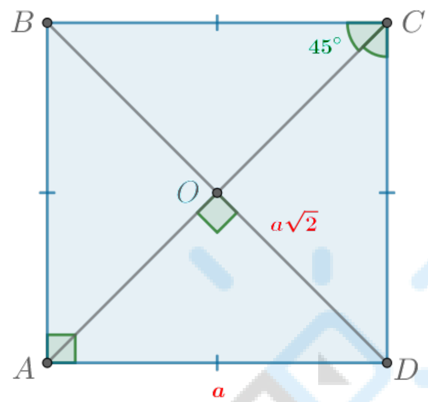
$$S = AD \cdot CD = ab$$



7.7 Площадь квадрата

Так как квадрат — это прямоугольник, то площадь квадрата равна произведению длин его смежных сторон, то есть

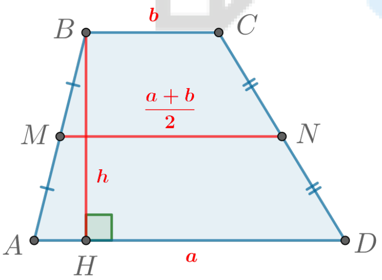
$$S = AB \cdot AD = a^2$$



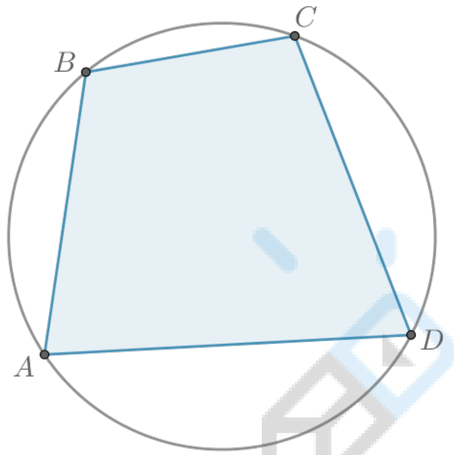
7.8 Площадь трапеции

Площадь трапеции равна произведению высоты и средней линии (полусуммы оснований):

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$



7.9 Формула Брахмагупты

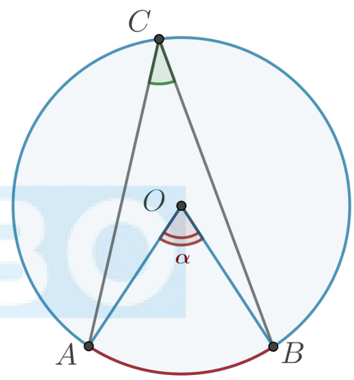


Дан вписанный четырехугольник $ABCD$, p — его полупериметр. Тогда площадь четырехугольника

$$S = \sqrt{(p - AB)(p - BC)(p - CD)(p - DA)}$$

8 Окружности и вписанные четырехугольники

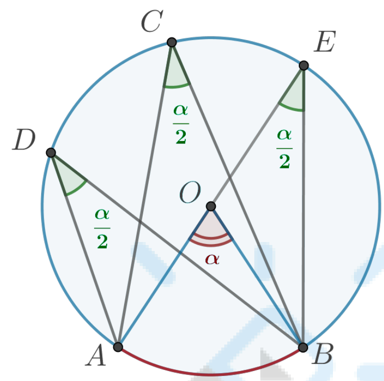
8.1 Центральные и вписанные углы



Центральным углом называется угол с вершиной в центре окружности. Пусть точки A и B лежат на окружности с центром в точке O. Тогда угол AOB — центральный.

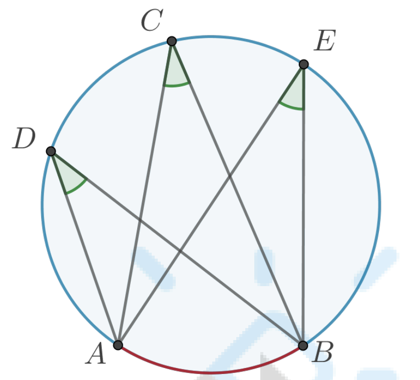
Градусная мера дуги
Пусть $\angle AOB = \alpha$. Градусной мерой дуги AB будем называть градусную меру центрального угла, который опирается на эту дугу. Тогда $\overset{\frown}{AB} = \alpha$.

Вписанным углом называется угол, вершина которого лежит на окружности, а его стороны пересекают эту окружность. Угол ACB — вписанный.

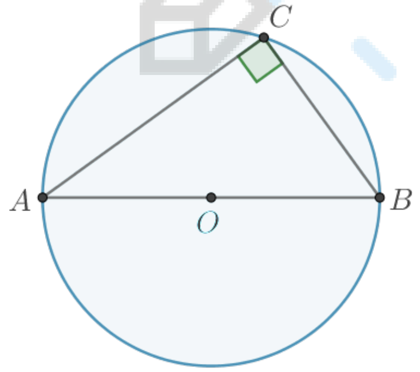


Все вписанные углы, опирающиеся на дугу AB, равны половине центрального угла, опирающегося на эту дугу.

Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

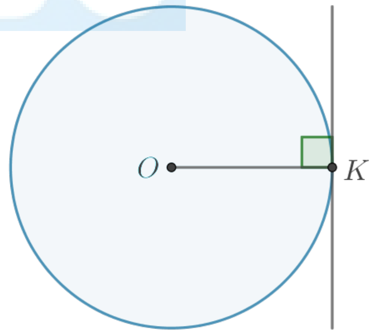


Вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности, равен 90°.

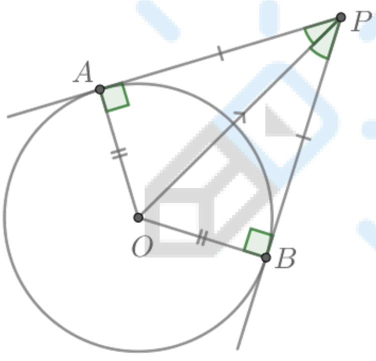


8.2 Окружность и касательные

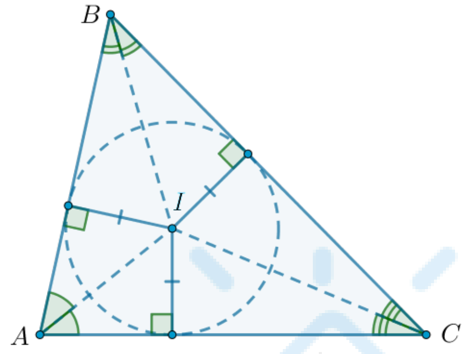
Радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной.



Отрезки касательных к окружности, проведенных из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

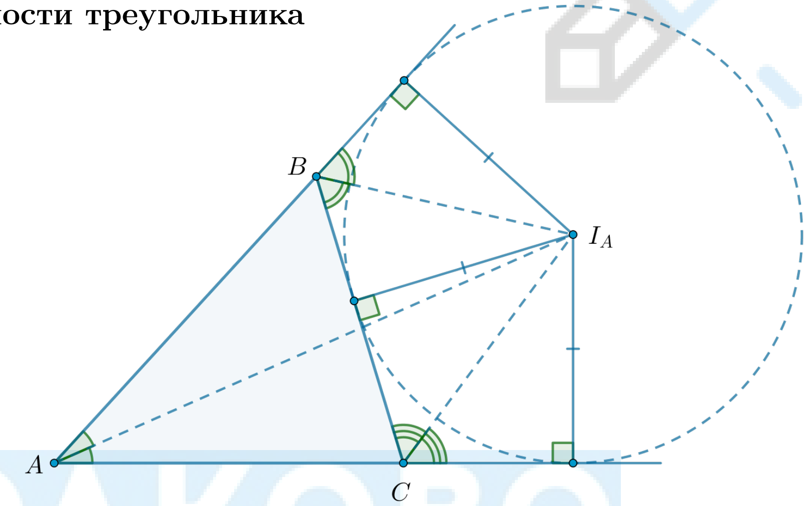


8.3 Центр вписанной окружности треугольника



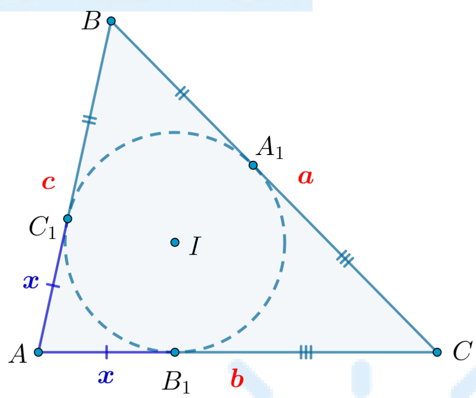
Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке — центре вписанной окружности этого треугольника.

8.4 Центр вневписанной окружности треугольника



Центр вневписанной окружности треугольника лежит на пересечении внутренней биссектрисы угла треугольника, в который вписана окружность, и внешних биссектрис двух других углов.

8.5 Длины отрезков касательных



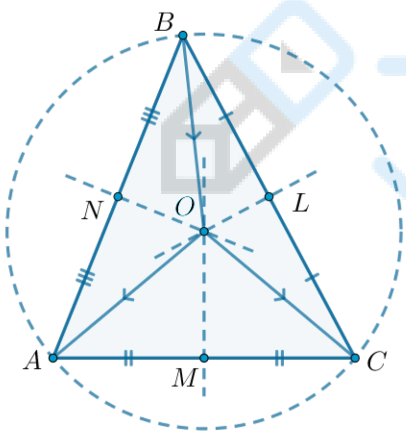
Пусть A_1, B_1 и C_1 — точки касания вписанной окружности со сторонами $BC = a$, $CA = b$ и $AB = c$ треугольника соответственно. Обозначим $AB_1 = AC_1 = x$, p — полупериметр треугольника, тогда

$$x = \frac{b+c-a}{2} = p - a$$

Доказательство:

$$\begin{cases} AB = AB_1 + BC_1 \\ BC = BC_1 + CA_1 \\ AC = AB_1 + CA_1 \end{cases} \Rightarrow \quad AB_1 = \frac{AB + AC - BC}{2} = p - a$$

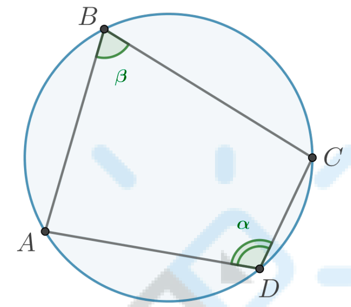
8.6 Центр описанной окружности треугольника



Серединные перпендикуляры треугольника пересекаются в одной точке — центре описанной окружности этого треугольника.

8.7 Вписанный четырехугольник

Вписанный четырехугольник — это четырехугольник, все вершины которого лежат на одной окружности.

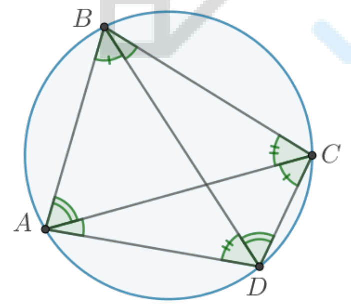


<u>Свойство №1</u>

Сумма противоположных углов вписанного четырехугольника равна 180°.

<u>Признак №1</u>

Если сумма противоположных углов четырехугольника равна 180°, то вокруг него можно описать окружность.

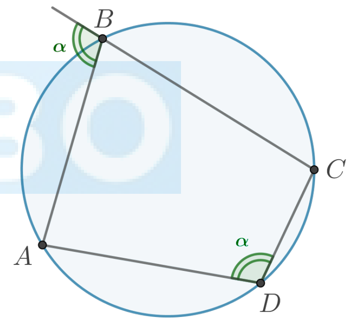


<u>Свойство №2</u>

Если четырехугольник вписанный, то углы, опирающиеся на одну сторону, равны.

<u>Признак №2</u>

Если в четырехугольнике углы, опирающиеся на одну сторону, равны, то он вписанный.

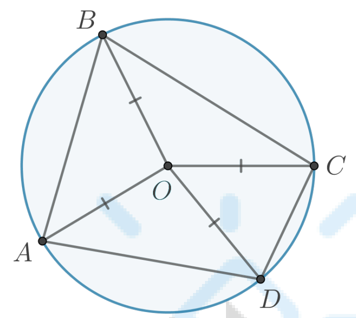


<u>Свойство №3</u>

Если четырехугольник вписанный, то его угол равен углу, смежному с противолежащим.

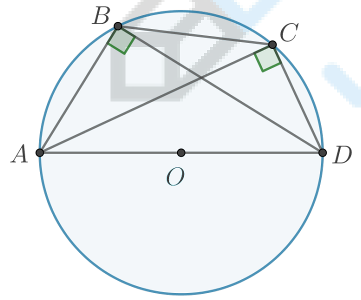
<u>Признак №3</u>

Если угол четырехугольника равен углу, смежному с противолежащим, то он вписанный.



<u>Признак №4</u>

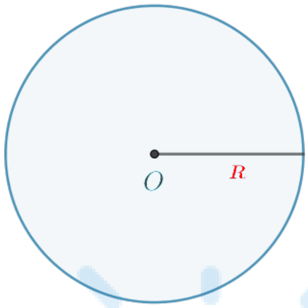
Если явно найдена точка, от которой равноудалены вершины четырехугольника, то он вписанный.



<u>Признак №5</u>

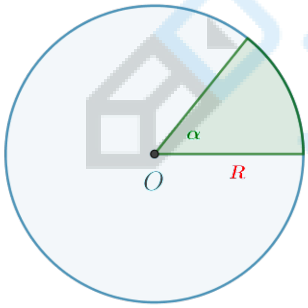
Частный случай. Если два угла по 90° опираются на одну сторону четырехугольника, то он вписанный.

8.8 Площади круга и сектора



Пусть R — радиус круга. Тогда его площадь равна

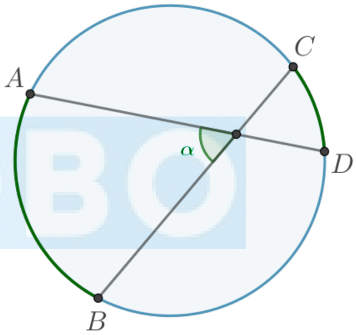
$$S = \pi R^2$$



Сектор круга — часть круга, ограниченная дугой и двумя радиусами, соединяющими концы дуги с центром круга. Пусть R — радиус круга, а α — величина его дуги в градусах. Тогда площадь сектора равна

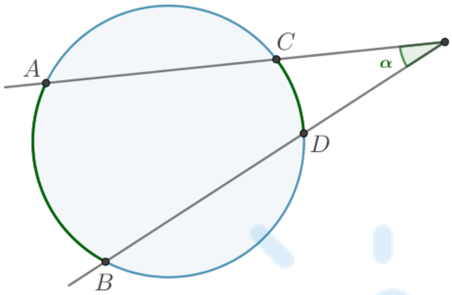
$$S = \pi R^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

8.9 Теоремы о хордах, касательных и секущих



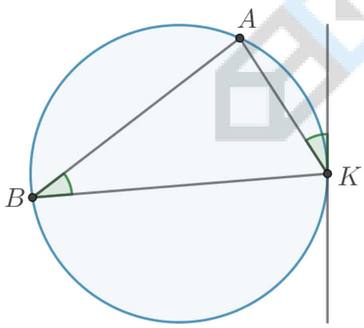
Угол между пересекающимися хордами окружности равен полусумме дуг, заключенных между ними:

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\breve{AB} + \breve{CD}\right)$$



Угол между секущими, проведенными из одной точки к окружности, равен полуразности дуг, заключенных между ними:

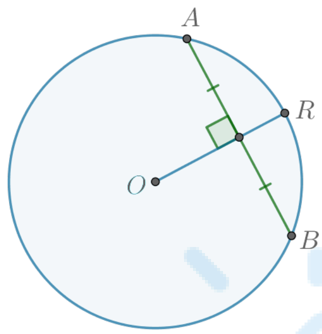
$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\breve{AB} - \breve{CD}\right)$$



Угол между хордой и касательной равен вписанному углу, опирающемуся на дугу, отсеченную хордой.

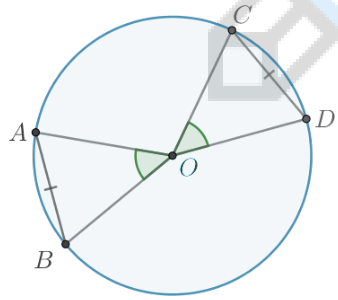
Если радиус перпендикулярен хорде, то он делит ее пополам.
Верно обратное: если радиус делит хорду пополам, то он ей перпендикулярен.

$$OR \perp AB \quad \Leftrightarrow \quad OR \text{ делит } AB \text{ пополам}$$

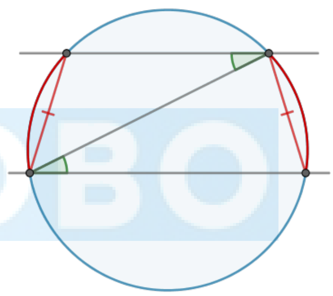


Равные хорды стягивают равные дуги.
Верно обратное: равные дуги стягиваются равными хордами.

$$\breve{AB} = \breve{CD} \quad \Leftrightarrow \quad AB = CD$$



Если окружность пересекают две параллельные прямые, то они высекают равные хорды.

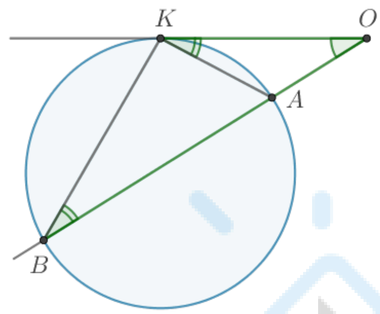


8.10 Подобные треугольники в окружностях

Если OK — касательная, где K — точка касания с окружностью, OB — секущая, A и B — ее точки пересечения с окружностью, то

$$\triangle OAK \sim \triangle OKB$$

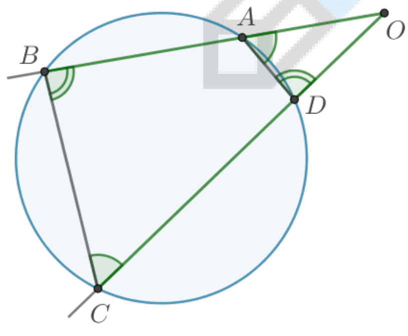
(Следствие: квадрат касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть)



Если OB и OC — секущие, пересекающие повторно окружность в точках A и D соответственно, то

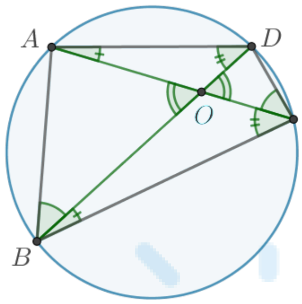
$$\triangle OAD \sim \triangle OCB$$

(Следствие: для данной окружности произведение секущей на ее внешнюю часть — величина постоянная)



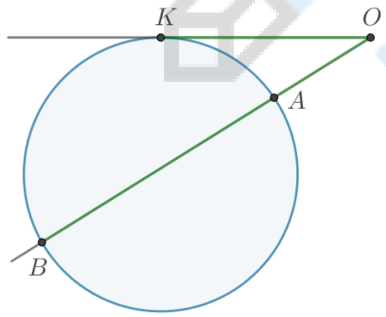
При пересечении хорд в окружности образуются две пары подобных треугольников:

$$\triangle AOB \sim \triangle DOC$$
$$\triangle AOD \sim \triangle BOC$$



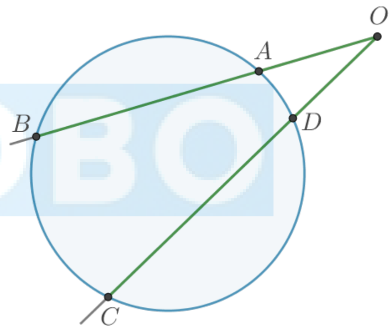
Следствие: произведения отрезков пересекающихся хорд равны

8.11 Отношения касательных, секущих и хорд



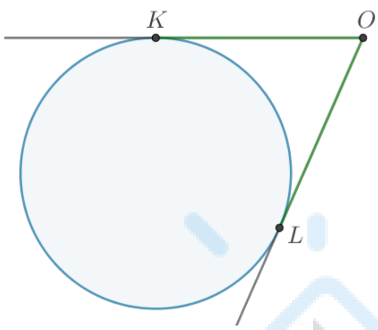
Квадрат касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть:

$$OK^2 = OB \cdot OA$$



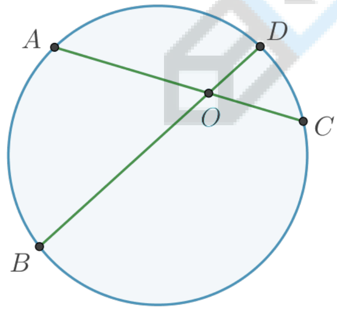
Для данной окружности и точки O вне окружности произведение секущей на ее внешнюю часть — величина постоянная:

$$OB \cdot OA = OC \cdot OD$$



Отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности, равны:

$$OK = OL$$



Произведения отрезков пересекающихся хорд равны:

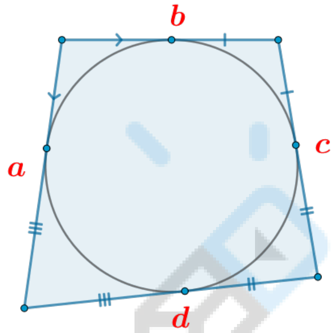
$$AO \cdot OC = BO \cdot OD$$

8.12 Описанный четырехугольник

Центр вписанной в четырехугольник (многоугольник) окружности лежит на пересечении биссектрис его углов.

1. Если в четырехугольник можно вписать окружность, то суммы противоположных сторон четырехугольника равны.
2. Если суммы противоположных сторон четырехугольника равны, то в него можно вписать окружность.

$$a + c = b + d$$



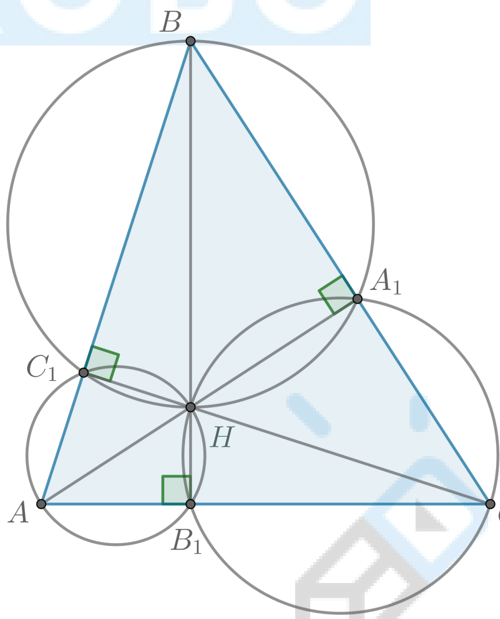
9 Ортоцентр треугольника и его свойства

9.1 Элементарные свойства ортоцентра

Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты треугольника ABC, H — их точка пересечения. Точку H называют *ортоцентром* треугольника ABC, а треугольник $A_1B_1C_1$ — *ортотреугольником*.

Свойство 1

Четырехугольники AC_1HB_1, BA_1HC_1, CB_1HA_1 являются вписанными.



Доказательство

Заметим, что $\angle AC_1H = \angle AC_1C = 90^\circ$ и $\angle AB_1H = \angle AB_1B = 90^\circ$, так как BB_1 и CC_1 — высоты треугольника ABC.

Следовательно, $\angle AC_1H + \angle AB_1H = 180^\circ$, значит, AC_1HB_1 — вписанный четырехугольник, так как сумма его противоположных углов равна 180°.

Четырехугольник BA_1HC_1 является вписанным, так как сумма его противоположных углов равна

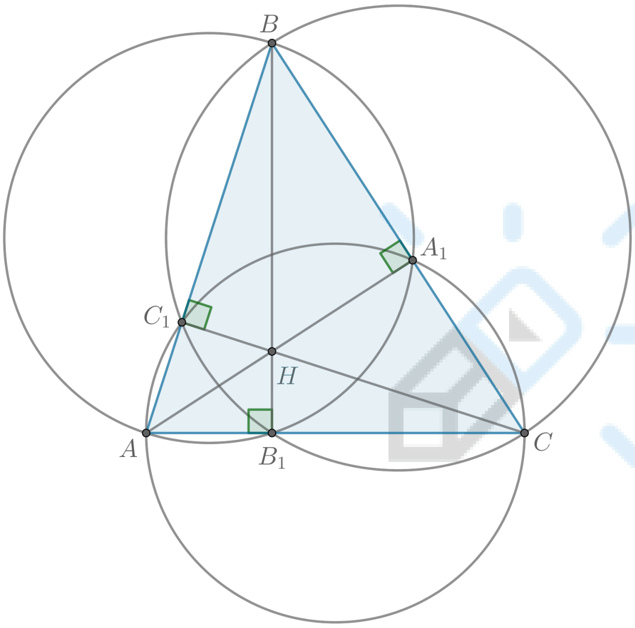
$$\angle BA_1H + \angle BC_1H = \angle BA_1A + \angle BC_1C = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

Четырехугольник CB_1HA_1 является вписанным, так как сумма его противоположных углов равна

$$\angle CB_1H + \angle CA_1H = \angle CB_1B + \angle CA_1A = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

Свойство 2

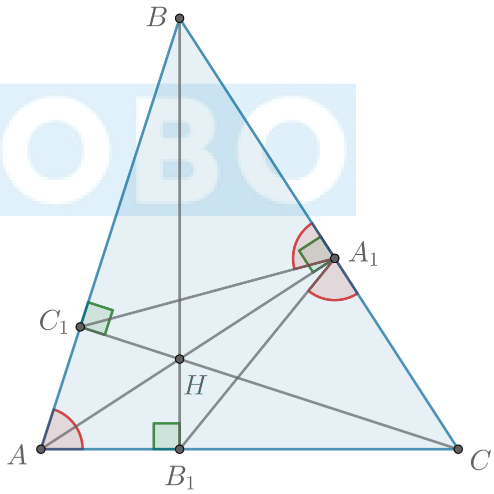
Четырехугольники ABA_1B_1, BCB_1C_1, CAC_1A_1 являются вписанными.



Доказательство
Заметим, что в четырехугольнике ABA_1B_1 углы AA_1B и AB_1B, опирающиеся на сторону AB, равны 90°, значит, ABA_1B_1 — вписанный четырехугольник.
В четырехугольнике BCB_1C_1 углы $\angle BB_1C$ и $\angle BC_1C$, опирающиеся на сторону BC, равны 90°, значит, BCB_1C_1 — вписанный четырехугольник.
В четырехугольнике ACA_1C_1 углы $\angle AA_1C$ и $\angle AC_1C$, опирающиеся на сторону AC, равны 90°, значит, ACA_1C_1 — вписанный четырехугольник.

Свойство 3

Точка H является инцентром ортотреугольника $A_1B_1C_1$.

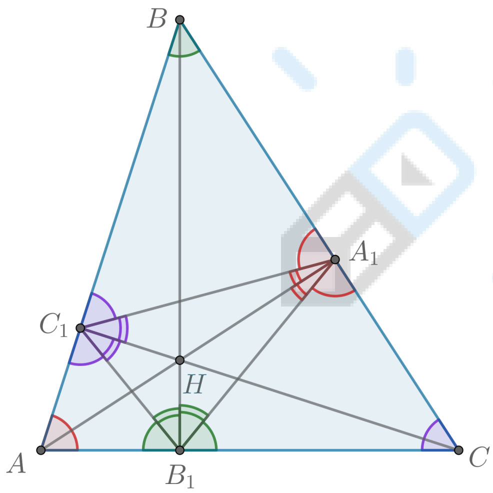


Доказательство
Заметим, что ABA_1B_1 — вписанный четырехугольник, так как $\angle AA_1B = \angle AB_1B = 90^\circ$, значит, его внешний угол CA_1B_1 равен противоположному внутреннему углу BAB_1.
Аналогично внешний угол BA_1C_1 вписанного четырехугольника ACA_1C_1 равен его противоположному внутреннему углу C_1AC. Тогда имеем:

$$\angle CA_1B_1 = \angle BAB_1 = \angle BAC = \angle C_1AC = \angle BA_1C_1$$

Заметим, что $\angle AA_1B = \angle AA_1C = 90^\circ$. Значит,

$$90^\circ - \angle BA_1C_1 = 90^\circ - \angle CA_1B_1$$
$$\angle AA_1C_1 = \angle AA_1B_1$$



Таким образом, AA_1 — биссектриса угла $B_1A_1C_1$.
Аналогично мы можем получить, что BB_1 и CC_1 — биссектрисы углов $A_1B_1C_1$ и $A_1C_1B_1$ соответственно.
Следовательно, точка H является точкой пересечения биссектрис треугольника $A_1B_1C_1$, то есть его инцентром.

9.2 Лемма об отражении ортоцентра №1

Свойство 4

Точка, симметричная ортоцентру треугольника относительно стороны, лежит на описанной окружности треугольника.

Доказательство

Пусть H' — точка, симметричная ортоцентру H относительно стороны AC треугольника ABC. Докажем, что четырехугольник $ABCH'$ вписанный.

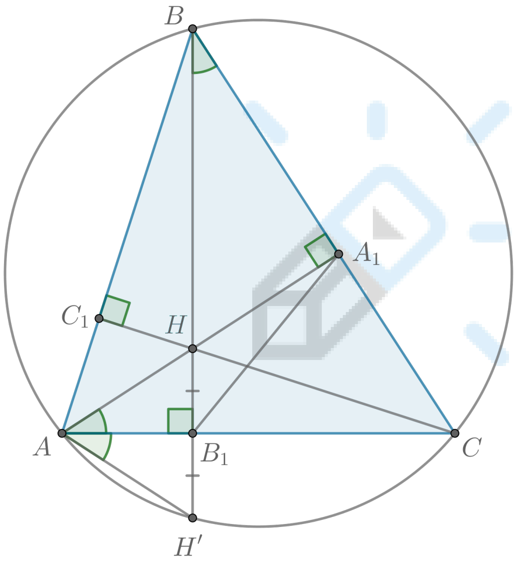
Прямоугольные $\triangle AHB_1$ и $\triangle AH'B_1$ ($\angle ABH = \angle ABH' = 90^\circ$) равны по двум катетам: $B_1H = B_1H'$ по построению, AB_1 — общий катет. В равных треугольниках соответственные элементы равны, значит, $\angle H'AB_1 = \angle B_1AH$.

При этом $\angle B_1AH = \angle B_1AA_1 = \angle B_1BA_1$, так как ABA_1B_1 — вписанный четырехугольник.

Тогда в четырехугольнике $ABCH'$ равны углы, опирающиеся на сторону CH' :

$$\angle H'AC = \angle B_1AH = \angle B_1AA_1 = \angle B_1BA_1 = \angle H'BC$$

Следовательно, $ABCH'$ — вписанный четырехугольник. Значит, H' лежит на описанной окружности треугольника ABC.



NB! В этой и следующей леммах случаи прямоугольных и тупоугольных треугольников не разбираются отдельно. Несложно убедиться, что они устроены практически аналогично.

9.3 Лемма об отражении ортоцентра №2

Точка, симметричная ортоцентру треугольника относительно середины стороны, лежит на описанной окружности треугольника.

Доказательство

Пусть $\angle ABC = \beta$, $\angle CH_BA = \alpha$. Из симметрии $AHCH_B$ — параллелограмм, следовательно,

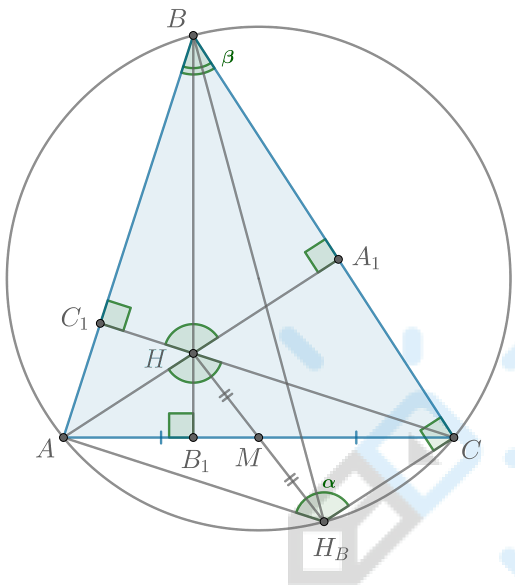
$$\angle CH_BA = \angle AHC = \alpha$$

Тогда $\angle AHC = \angle A_1HC_1 = \alpha$ как вертикальные.

BA_1HC_1 — вписанный четырехугольник, значит,

$$\angle A_1HC_1 + \angle C_1BA_1 = 180^\circ = \alpha + \beta = \angle CH_BA + \angle ABC$$

Таким образом, $ABCH_B$ — вписанный четырехугольник, то есть H_B лежит на описанной окружности треугольника ABC.



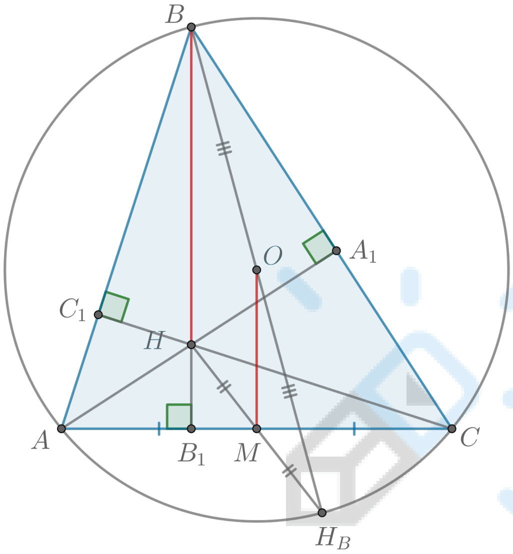
Свойство 5

H_B диаметрально противоположна вершине B треугольника.

Доказательство

$AHCH_B$ — параллелограмм, следовательно, $AA_1 \parallel H_BC$, причем $AA_1 \perp BC$, значит, $H_BC \perp BC$. Значит, $\angle BCH_B = 90^\circ$, то есть BH_B — диаметр описанной окружности треугольника ABC.

Свойство 6



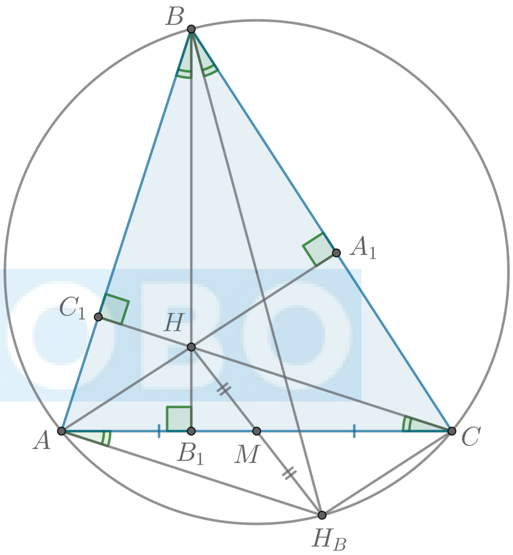
Пусть O — центр описанной окружности треугольника. Тогда $BH = 2OM$.

Доказательство

Пусть точка H_B симметрична ортоцентру H относительно середины M стороны AC. Тогда BH_B — диаметр описанной окружности треугольника ABC, следовательно, центр описанной окружности O — середина BH_B.

С другой стороны, M — середина отрезка H_BH в силу симметрии. Тогда MO — средняя линия треугольника HBH_B, параллельная стороне BH значит, $BH = 2MO$.

Свойство 7



$\angle ABH = \angle CBO$ (говорят, что точки O и H *изогональны*, то есть они лежат на лучах, симметричных относительно биссектрисы угла $\angle ABC$).

Доказательство

Четырехугольник BCB_1C_1 — вписанный, значит, $\angle ABH = \angle ACH$.

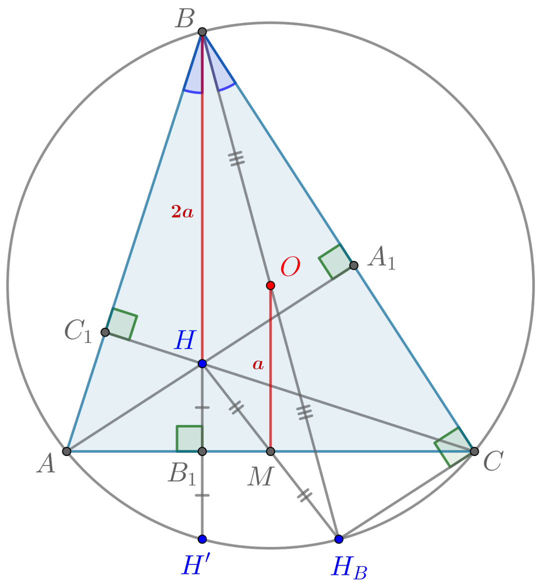
$AHCH_B$ — параллелограмм, значит, $\angle ACH = \angle CAH_B$.

Четырехугольник $ABCH_B$ — вписанный, следовательно, $\angle CAH_B = \angle CBH_B$.

Заметим, что точка O является серединой отрезка BH_B, таким образом,

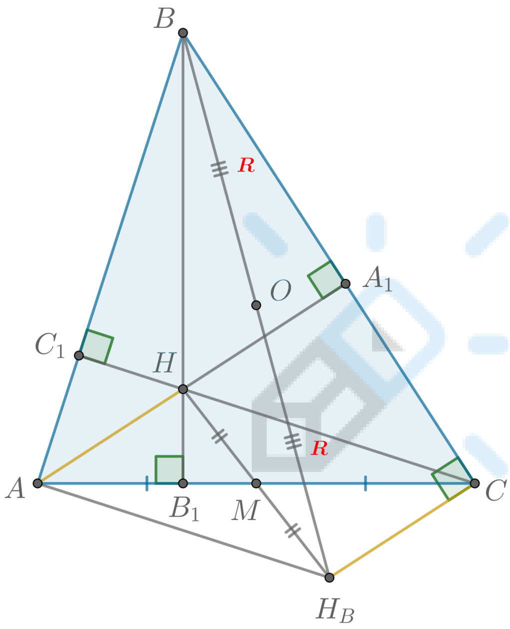
$$\angle ABH = \angle ACH = \angle CAH_B = \angle CBH_B = \angle CBO$$

Картинка для запоминания двух лемм



9.4 Топовые свойства ортоцентра

Свойство 8



В треугольнике ABC с ортоцентром H и радиусом описанной окружности R выполняется следующее равенство:

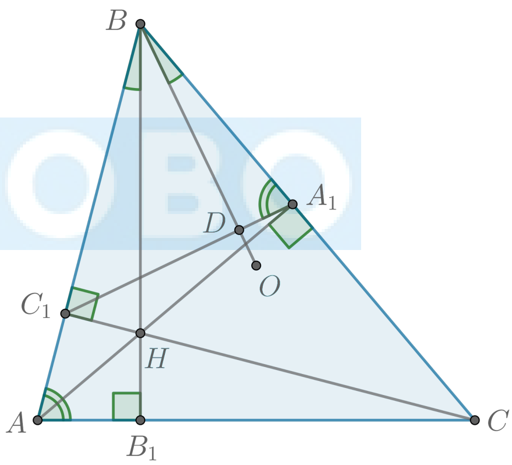
$$AH^2 + BC^2 = 4R^2.$$

Доказательство

Воспользуемся леммой №2, обозначения оставим те же.
$AHCH_B$ — параллелограмм, следовательно, $AH = H_BC$. $OB = OH_B = R$. Запишем теорему Пифагора для $\triangle BCH_B$:

$$BH_B^2 = BC^2 + CH_B^2 \quad \Rightarrow \quad 4R^2 = BC^2 + AH^2$$

Свойство 9



В треугольнике ABC проведены высоты CC_1 и AA_1, O — центр описанной окружности. Тогда $OB \perp C_1A_1$.

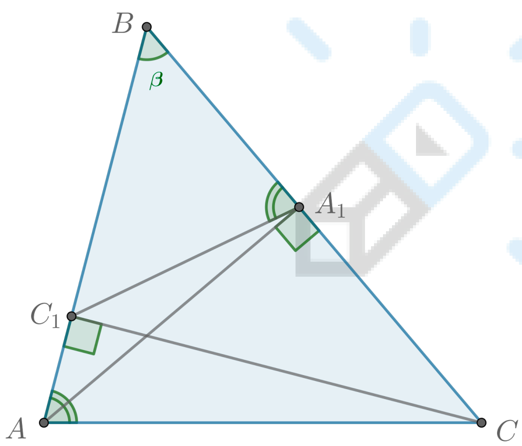
Доказательство

Пусть B_1 — основание третьей высоты, D — точка пересечения C_1A_1 и OB. По свойству 7

$$\angle ABH = \angle CBO \quad \Rightarrow \quad \angle ABB_1 = \angle A_1BD$$

По одному из элементарных свойств AC_1A_1C — вписанный, следовательно, $\angle CAC_1 = \angle BA_1C_1$. Посмотрим на треугольники ABB_1 и A_1BD. В них $\angle ABB_1 = \angle A_1BD$ и $\angle B_1AB = \angle BA_1D$, значит, $\angle A_1DB = \angle AB_1B = 90°$.

Свойство 10



A_1 и C_1 — основания высот из вершин A и C соответственно треугольника ABC. Тогда $\triangle BA_1C_1 \sim \triangle BAC$ с коэффициентом $\cos\beta$, где $\angle ABC = \beta$.

Доказательство

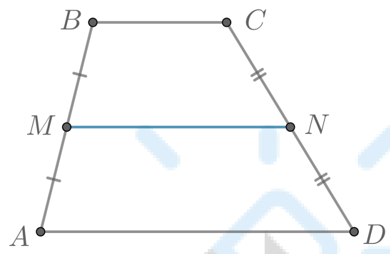
Как мы уже знаем, четырехугольник AC_1A_1C вписанный, следовательно, $\angle CAC_1 = \angle BA_1C_1$. Угол B общий, значит $\triangle BA_1C_1 \sim \triangle BAC$ по двум углам с коэффициентом $BA_1 : BA$.
ABA_1 — прямоугольный треугольник, значит,

$$\frac{BA_1}{BA} = \cos\beta$$

Таким образом, треугольники BA_1C_1 и BAC подобны с коэффициентом $\cos\beta$.

10 Все о трапеции

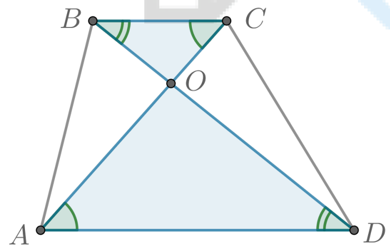
10.1 Средняя линия трапеции



Средняя линия трапеции — отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции. Она параллельна основаниям трапеции и равна их полусумме:

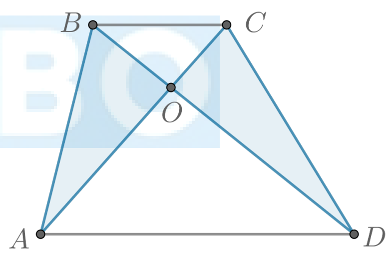
$$MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$$

10.2 Подобные треугольники в трапеции



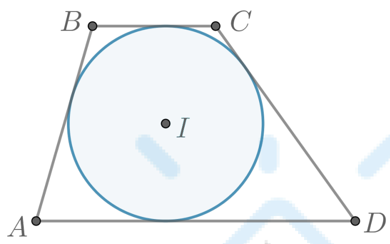
Пусть O — точка пересечения диагоналей трапеции. Тогда треугольники AOD и COB подобны с коэффициентом $k = \dfrac{AD}{BC}$.

10.3 Равновеликие треугольники в трапеции



Треугольники AOB и COD равновелики.

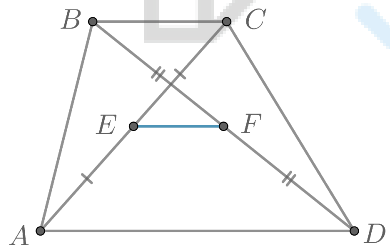
10.4 Описанная трапеция



В трапецию можно вписать окружность, если сумма оснований трапеции равна сумме её боковых сторон:

$$AD + BC = AB + CD$$

10.5 Отрезок, соединяющий середины диагоналей



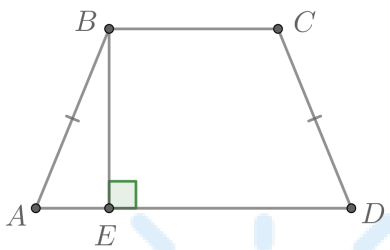
Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований:

$$EF = \frac{1}{2}(AD - BC)$$

Для доказательства этого факта достаточно провести среднюю линию трапеции, понять, что она содержит EF, и вычесть из нее длины средних линий треугольников ABC и DBC.

10.6 Проекция боковой стороны равнобокой трапеции на основание

Высота равнобедренной трапеции BE, опущенная на большее основание AD, делит его на два отрезка, при этом первый равняется половине разности оснований, а второй — половине их суммы:

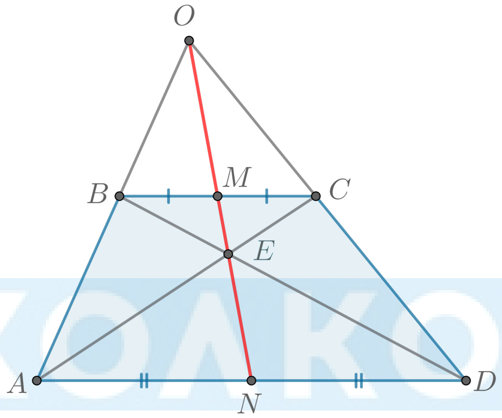


$$AE = \frac{AD - BC}{2}, \quad ED = \frac{AD + BC}{2}$$

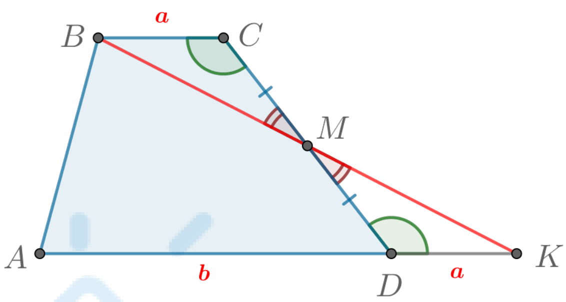
Для доказательства этого факта достаточно провести вторую высоту и получить два равных прямоугольных треугольника и прямоугольник.

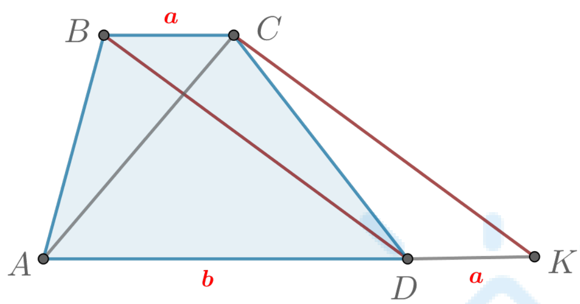
10.7 Замечательное свойство трапеции

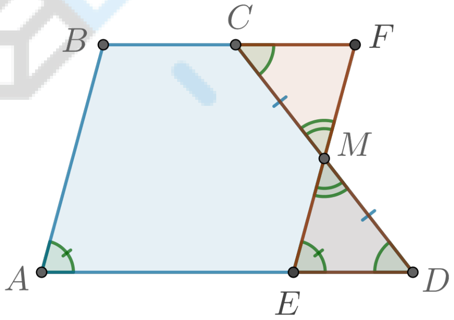
Середины M и N оснований трапеции, точка E пересечения диагоналей и точка O пересечения продолжений боковых сторон трапеции лежат на одной прямой.

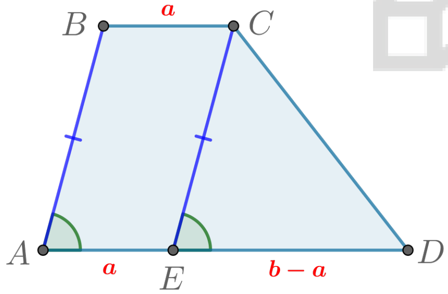


10.8 Дополнительные построения в трапеции









10.9 Нетривиальный факт про трапецию

Произвольная прямая, параллельная основаниям трапеции, пересекает AB, AC, BD и CD в точках P, Q, R и S соответственно. Докажите, что $PQ = RS$.

Доказательство:

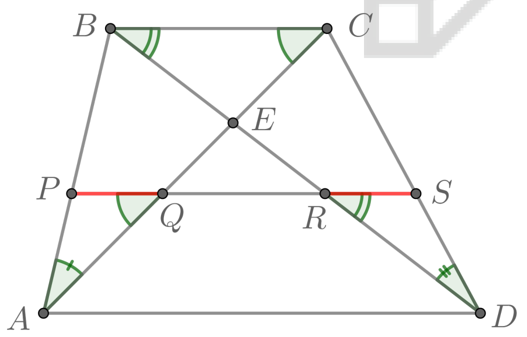
$\triangle APQ \sim \triangle ABC$ по двум углам ($\angle A$ общий, $\angle PQA = \angle BCA$) с коэффициентом $k_1 = \dfrac{AP}{AB}$.

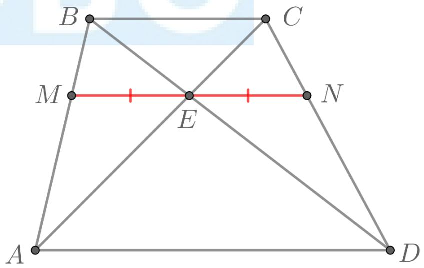
Аналогично $\triangle DSR \sim \triangle DCB$ с коэффициентом $k_2 = \dfrac{DS}{DC}$.

Из первого подобия: $PQ = BC \cdot k_1$. Из второго подобия: $RS = BC \cdot k_2$.

По теореме о пропорциональных отрезках: $\dfrac{BP}{AP} = \dfrac{CS}{SD}$, тогда имеем:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{BP}{AP} &= \frac{CS}{SD} + 1 \\ \frac{AP + BP}{AP} &= \frac{CS + SD}{SD} \\ \frac{AB}{AP} &= \frac{CD}{SD} \\ k_1 &= k_2 \\ PQ &= RS \end{aligned}$$





Следствие

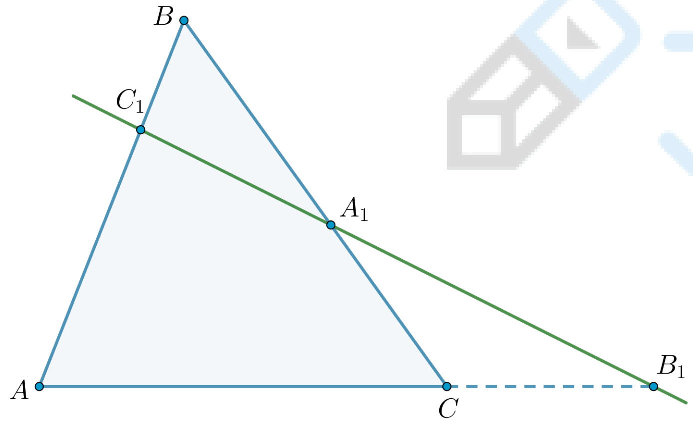
В трапеции с основаниями BC и AD через точку E пересечения диагоналей проведена прямая параллельно основаниям. Она пересекает боковые стороны в точках M и N. Тогда $ME = EN$.

11 Счетные теоремы планиметрии

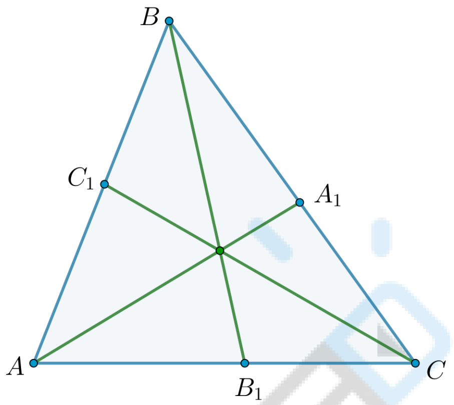
11.1 Теорема Менелая

Если прямая пересекает стороны AB и BC треугольника ABC в точках C_1 и A_1 соответственно, а также продолжение стороны AC в точке B_1, то верно следующее соотношение:

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$



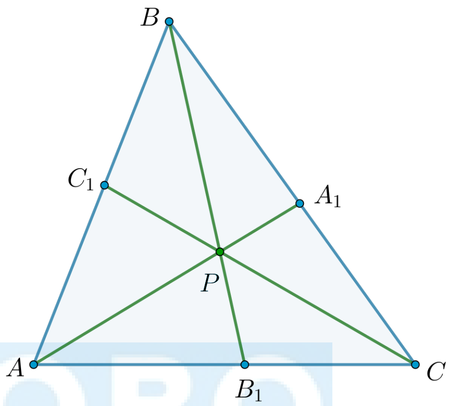
11.2 Теорема Чевы



Если AA_1, BB_1 и CC_1 — чевианы треугольника, пересекающиеся в одной точке, то верно следующее соотношение:

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$

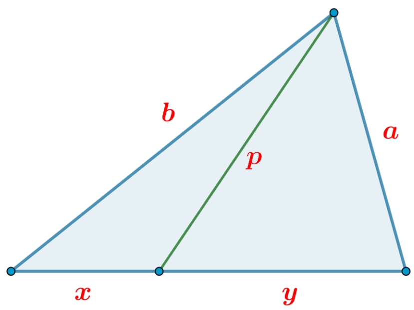
11.3 Теорема Ван-Обеля



Если AA_1, BB_1 и CC_1 — чевианы, пересекающиеся в одной точке, то для них выполнено следующее соотношение:

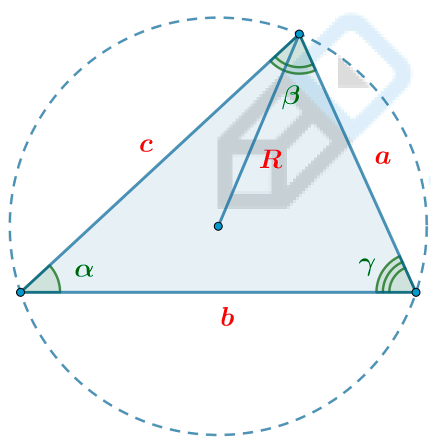
$$\frac{BP}{PB_1} = \frac{BC_1}{C_1A} + \frac{BA_1}{A_1C}$$

11.4 Теорема Стюарта



$$p^2 = a^2 \cdot \frac{x}{x+y} + b^2 \cdot \frac{y}{x+y} - xy$$

11.5 Теорема синусов

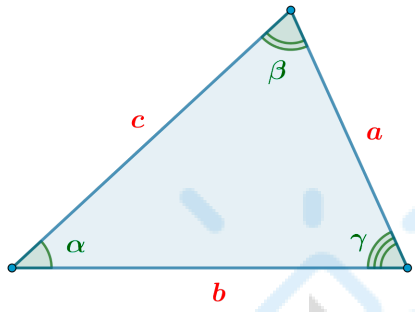


Для произвольного треугольника верно

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

где a, b и c — стороны треугольника, α, β и γ — соответственно противолежащие им углы, а R — радиус окружности, описанной около треугольника.

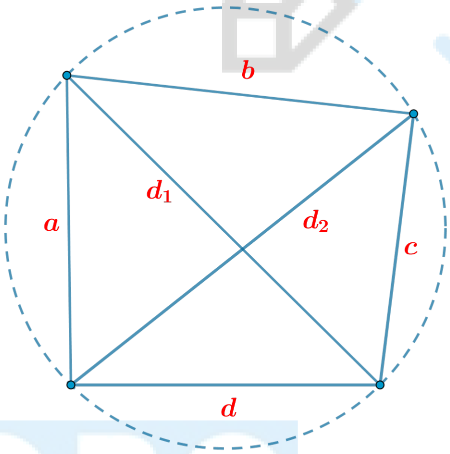
11.6 Теорема косинусов



Для треугольника со сторонами a, b и c и углом α, противолежащим стороне a, справедливо соотношение:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

11.7 Теорема Птолемея

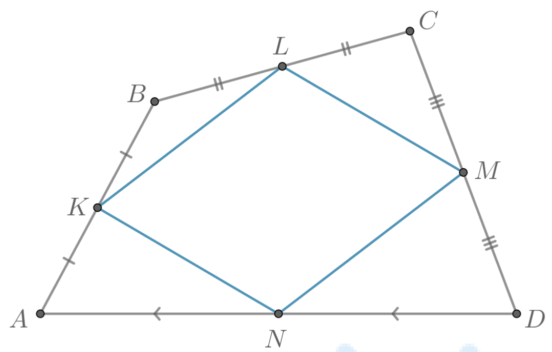


Во вписанном четырехугольнике произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон:

$$d_1 \cdot d_2 = ac + bd$$

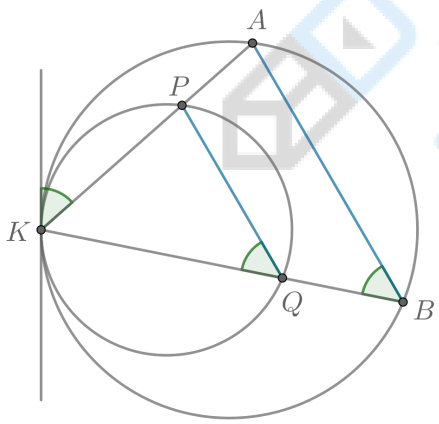
12 Крутые факты планиметрии

12.1 Параллелограмм Вариньона



Середины сторон выпуклого четырехугольника являются вершинами параллелограмма, то есть $KLMN$ — параллелограмм.

12.2 Параллельные хорды касающихся окружностей



Две окружности касаются внутренним образом в точке K. Хорды KA и KB первой окружности пересекают вторую в точках P и Q соответственно. Тогда $AB \parallel PQ$.
Доказательство через факт об угле между хордой и касательной приведено на картинке.

12.3 Лемма о трезубце

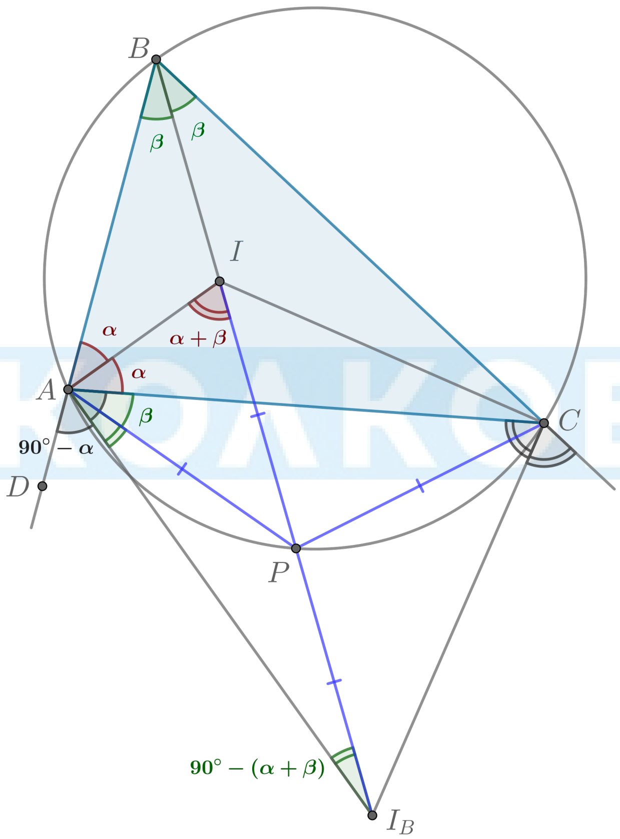
В треугольнике ABC биссектриса угла B пересекает описанную окружность в точке P. I — центр вписанной окружности, I_B — центр вневписанной окружности, касающейся стороны AC треугольника. Тогда P равноудалена от точек A, C, I, I_B.

Доказательство

BP — биссектриса, следовательно, P — середина соответствующей дуги AC, а значит, она равноудалена от концов дуги, то есть $PA = PC$.

Обозначим $\frac{1}{2}\angle A = \alpha$, $\frac{1}{2}\angle B = \beta$. $\angle PAC = \angle PBC = \beta$, так как они оба опираются на дугу PC. При этом $\angle AIP = \angle IAB + \angle ABI = \alpha + \beta$ как внешний в треугольнике ABI. В треугольнике AIP получили следующее:

$$\angle PAI = \angle PAC + \angle CAI = \alpha + \beta = \angle AIP \quad \Rightarrow \quad PA = PI$$



Центр вневписанной окружности I_B является пересечением внешних биссектрис, значит,

$$\angle DAI_B = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle CAB) = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\alpha) = 90^\circ - \alpha = \angle I_BAC$$

Тогда

$$\angle I_BAI = \angle I_BAC + \angle CAI = (90^\circ - \alpha) + \alpha = 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \angle I_BAP = \angle I_BAI - \angle PAI = 90^\circ - (\alpha + \beta)$$

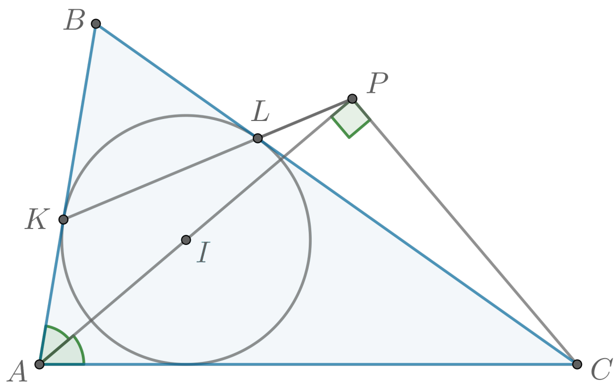
Из треугольника AII_B :

$$\angle II_BA = 90^\circ - \angle AII_B = 90^\circ - (\alpha + \beta)$$

Получили, что $\angle I_BAP = \angle II_BA$, следовательно, $PA = PI_B$.

12.4 Лемма 255

Если окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB и BC в точках K и L соответственно, а биссектриса угла BAC пересекает прямую KL в точке P, то $\angle APC = 90^\circ$.



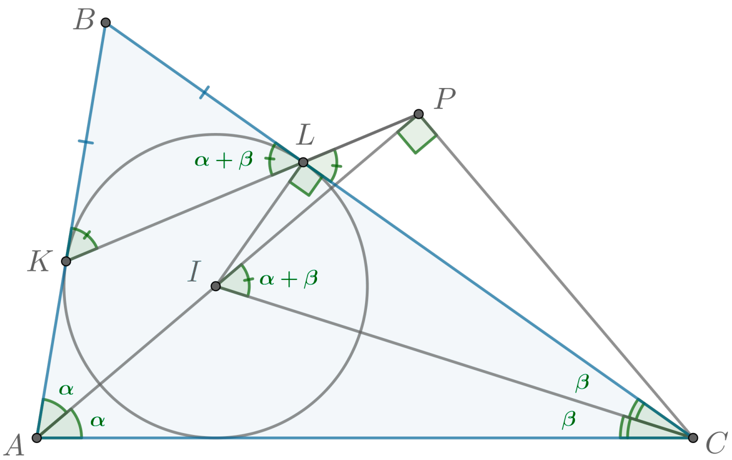
Доказательство

Пусть $\frac{1}{2}\angle A = \alpha$, $\frac{1}{2}\angle C = \beta$. Тогда как внешний угол треугольника AIC

$$\angle PIC = \angle IAC + \angle ICA = \alpha + \beta$$

По сумме углов треугольника ABC $\angle B = 180^\circ - 2\alpha - 2\beta$. Отрезки касательных BK и BL равны, поэтому в равнобедренном треугольнике BKL

$$\angle BLK = \frac{180^\circ - \angle KBL}{2} = \alpha + \beta$$



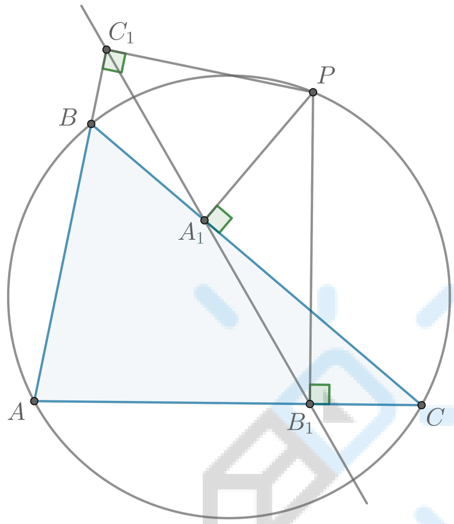
Заметим, что

$$\angle PLC = BLK = \alpha + \beta = PIC$$

Значит, $PLIC$ — вписанный. При этом $\angle ILC = 90^\circ$, так как IL — радиус вписанной окружности, проведенный к стороне. Тогда из вписанности $PLIC$ имеем

$$\angle APC = \angle IPC = \angle ILC = 90^\circ$$

12.5 Прямая Симсона



Дан треугольник ABC. Из точки P опущены перпендикуляры PA_1, PB_1, PC_1 на прямые BC, AC, AB соответственно. Точка P лежит на описанной окружности треугольника $\iff$ точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.

NB! При доказательстве будем считать, что P лежит внутри одного из острых углов треугольника, не умаляя общности, будем считать A таким углом. В дальнейшем мы будем пользоваться данной теоремой только для доказанных случаев, но важно понимать, что верна также общая формулировка, приведенная выше.

Доказательство

$\Longrightarrow$) Пусть P лежит на меньшей дуге BC описанной окружности. Докажем, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.

Напомним, что мы считаем, что угол $\angle A = \alpha$ — острый. Обсудим расположение точек A_1, B_1 и C_1. A_1 лежит на отрезке BC, так как дуга, на которой лежит P, меньше полуокружности.

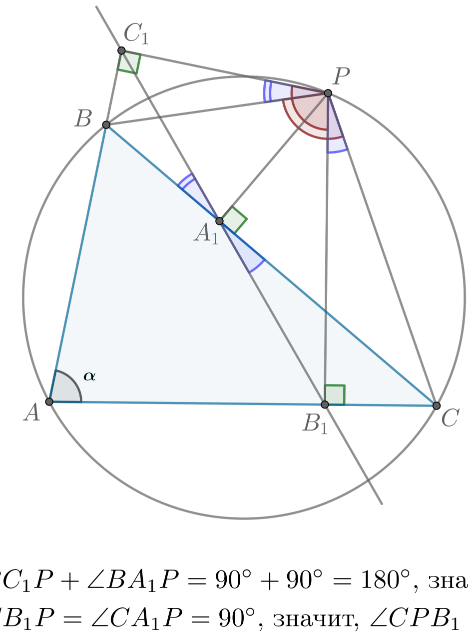
Пусть C_1, не умаляя общности, лежит на продолжении AB. Тогда B_1 лежит на AC.

Докажем от противного. Пусть B_1 лежит на продолжении AC за точку C. $ABPC$ — вписанный, следовательно, $\angle BPC = 180^\circ - \angle CAB = 180^\circ - \alpha$. AC_1PB_1 также вписанный, так как

$$\angle PB_1A + \angle PC_1A = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \angle C_1PB_1 = 180^\circ - \angle B_1AC_1 = 180^\circ - \alpha = \angle BPC$$

При этом мы предположили, что обе точки лежат на продолжениях сторон треугольника, тогда $\angle BPC$ лежит полностью внутри $\angle C_1PB_1$, следовательно, $\angle BPC < \angle C_1PB_1$. Получили противоречие.

Теперь порядок точек на картинке фиксирован.



BC_1PA_1 вписанный, так как $\angle BC_1P + \angle BA_1P = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, значит, $\angle C_1PB = \angle C_1A_1B$.
B_1CPA_1 вписанный, так как $\angle CB_1P = \angle CA_1P = 90^\circ$, значит, $\angle CPB_1 = \angle CA_1B_1$.
Выше было доказано, что $\angle C_1PB_1 = 180^\circ - \alpha = \angle BPC$. Тогда

$$\angle C_1PB = \angle C_1PB_1 - \angle BPB_1 = \angle BPC - \angle BPB_1 = \angle B_1PC$$

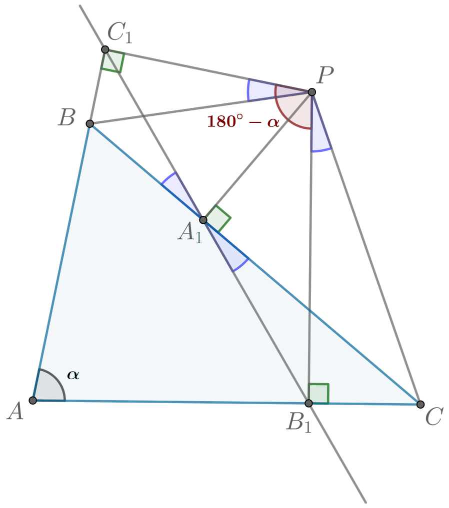
Следовательно, все четыре угла, обозначенные синим на картинке, равны между собой, в частности $\angle C_1A_1B = \angle B_1A_1C$. BA_1C — одна прямая, тогда и $C_1A_1B_1$ тоже одна прямая.

$\Longleftarrow$) Пусть для некоторой точки P точки A_1, B_1, C_1 оказались на одной прямой. Докажем, что точка P лежит на описанной окружности, то есть четырехугольник $ABPC$ — вписанный.

BC_1PA_1 вписанный, так как $\angle BC_1P + \angle BA_1P = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Из вписанности $\angle C_1PB = \angle C_1A_1B$.

B_1CPA_1 вписанный, так как $\angle CB_1P = \angle CA_1P = 90^\circ$. Из вписанности $\angle CPB_1 = \angle CA_1B_1$.

Также $\angle B_1A_1C = \angle C_1A_1B$ как вертикальные, тогда все четыре уголка, обозначенные синим на картинке, равны между собой, в частности $\angle C_1PB = \angle B_1PC$.



Пусть $\angle CAB = \alpha$. AC_1PB_1 также вписанный, так как $\angle PB_1A + \angle PC_1A = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, поэтому

$$\angle C_1PB_1 = 180^\circ - \angle B_1AC_1 = 180^\circ - \alpha$$

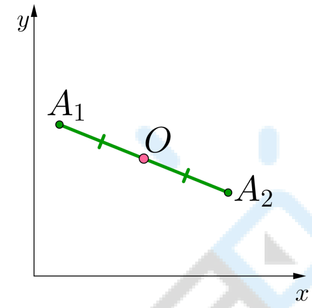
Значит,

$$180^\circ - \alpha = \angle C_1PB_1 = \angle C_1PB + \angle BPB_1 = \angle B_1PC + \angle BPB_1 = \angle BPC$$

Тогда в четырехугольнике $ABPC$ сумма углов $\angle CAB + \angle BPC = 180^\circ$, следовательно, точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC.

13 Метод координат

13.1 Длина отрезка и координаты его середины

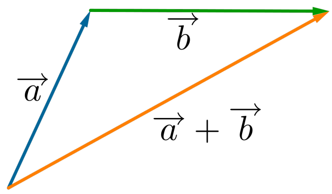


Если $A_1\,(x_1; y_1)$ и $A_2\,(x_2; y_2)$,
O — середина отрезка A_1A_2, то верны следующие формулы:

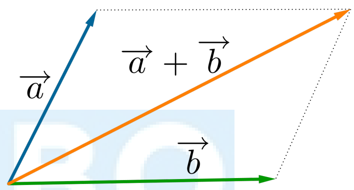
$$A_1A_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$O\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

13.2 Правила треугольника и параллелограмма

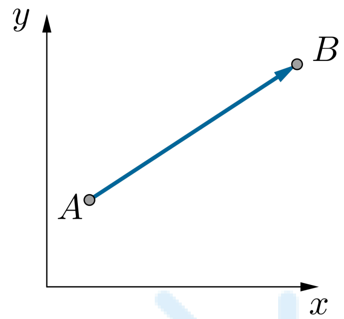


Правило треугольника суммы векторов: отложить вектор $\vec{b}$ от конца вектора $\vec{a}$, тогда $\vec{a} + \vec{b}$ будет равен вектору, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец совпадает с концом вектора $\vec{b}$.



Правило параллелограмма суммы векторов: отложить вектор $\vec{b}$ от начала вектора $\vec{a}$, построить на данных векторах параллелограмм. Тогда $\vec{a} + \vec{b}$ — вектор, совпадающий с диагональю параллелограмма, начало которого совпадает с началом векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

13.3 Координаты и модуль вектора



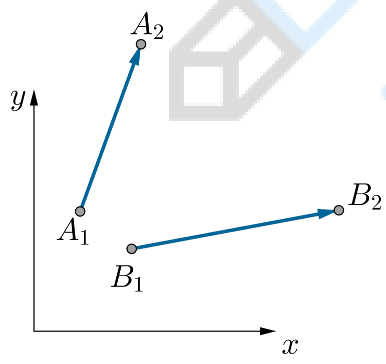
Пусть даны точки $A\,(x_1; y_1)$ и $B\,(x_2; y_2)$.
Тогда вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты:

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$$

Если $\overrightarrow{AB} = \{a, b\}$, то его длина вычисляется по формуле:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

13.4 Скалярное произведение векторов



Пусть даны два вектора: $\overrightarrow{A_1A_2} = \{x_1; y_1\}$ и $\overrightarrow{B_1B_2} = \{x_2; y_2\}$.
Тогда сумма этих векторов имеет координаты:

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} = \{x_1 + x_2; y_1 + y_2\}$$

Скалярное произведение этих векторов можно вычислить по одной из двух формул:

$$\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{B_1B_2}\right) = |\overrightarrow{A_1A_2}| \cdot |\overrightarrow{B_1B_2}| \cdot \cos\angle(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{B_1B_2})$$

$$\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{B_1B_2}\right) = x_1x_2 + y_1y_2$$