Планиметрия

Факты, выделенные **красным**, на ЕГЭ нужно уметь доказывать!

Содержание

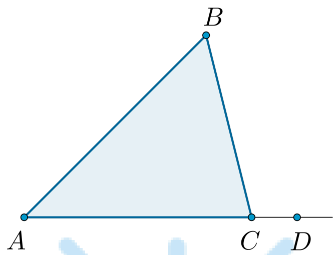
ШКОЛКОВО

1 Базовые факты о треугольниках и углах. Параллельность прямых.

1.1 Углы в треугольнике

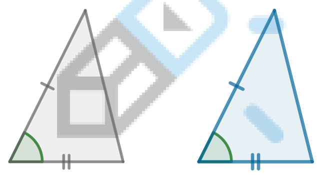
Сумма углов треугольника равна 180°: $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$.

Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним: $\angle BCD = \angle A + \angle B$.

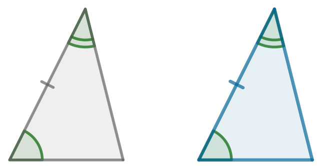


1.2 Признаки равенства треугольников

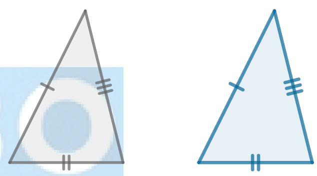
Первый признак. Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.



Второй признак. Если сторона и два прилежащих угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим углам другого треугольника, то такие треугольники равны.



Третий признак. Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.



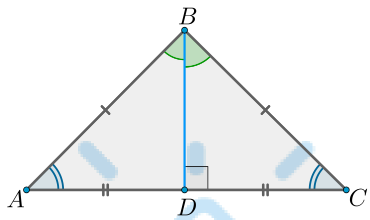
ШКОЛКОВО

1.3 Равнобедренный треугольник

Равнобедренный треугольник — треугольник, у которого две стороны равны. Эти стороны называются боковыми, а третья — основанием.

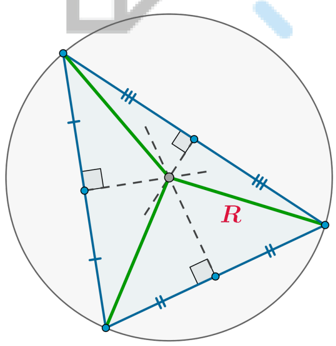
1. Биссектриса, медиана и высота, проведенные к основанию равнобежренного треугольника, совпадают.

2. Углы при основании равнобедренного треугольника равны: $\angle A = \angle C$.



1.4 Центр описанной окружности треугольника

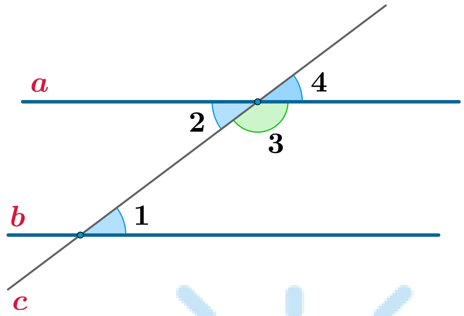
Центр окружности, описанной около треугольника, лежит на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.
Заметим, что в общем случае серединный перпендикуляр к стороне треугольника не проходит через противоположную вершину треугольника.



1.5 Свойства и признаки параллельных прямых

Три свойства: если $a \parallel b$ и c – секущая, то

- $\angle 1 = \angle 2$ (накрест лежащие углы)
- $\angle 1 = \angle 4$ (соответственные углы)
- $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$ (односторонние углы)



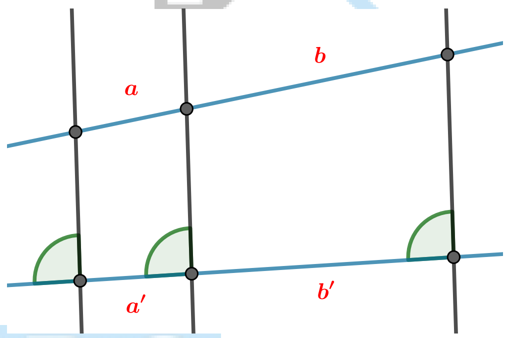
Три признака: $a \parallel b$ при секущей c, если:

- $\angle 1 = \angle 2$ (накрест лежащие углы)
- $\angle 1 = \angle 4$ (соответственные углы)
- $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$ (односторонние углы)

1.6 Обобщенная теорема Фалеса

Параллельные секущие образуют на прямых пропорциональные отрезки:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$



ШКОЛКОВО

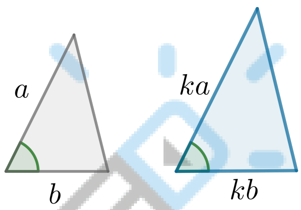
1.7 Обратная обобщенная теорема Фалеса

Если прямые, пересекающие две другие прямые (параллельные или нет), отсекают на обеих из них пропорциональные между собой отрезки, начиная от вершины, то такие прямые параллельны.

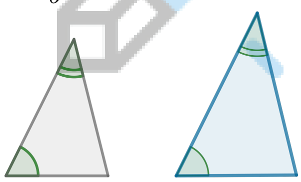
1.8 Признаки подобия треугольников

Два треугольника называются подобными, если их углы соответственно равны, а стороны, лежащие против равных углов, относятся друг к другу с одним и тем же коэффициентом.

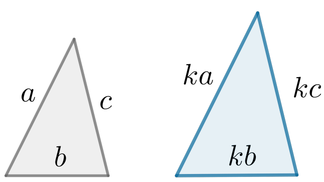
1. Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы между ними равны, то такие треугольники подобны.



2. Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.



3. Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

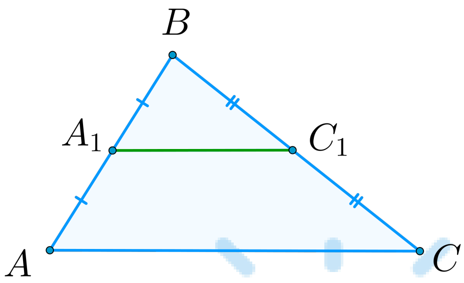


2 Средние линии и медианы треугольника

2.1 Средняя линия треугольника

Средняя линия треугольника — отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника.

1. Средняя линия треугольника параллельна третьей стороне: $A_1C_1 \parallel AC$.
2. Средняя линия треугольника равна половине третьей стороны: $A_1C_1 = \frac{1}{2}AC$.
3. Средняя линия треугольника отсекает от треугольника подобный ему треугольник: $\triangle A_1BC_1 \sim \triangle ABC$.

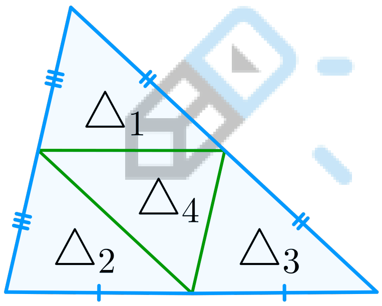


Средние линии треугольника разбивают его на четыре равных треугольника:

$$\triangle_1 = \triangle_2 = \triangle_3 = \triangle_4$$

Следовательно, площади этих треугольников равны:

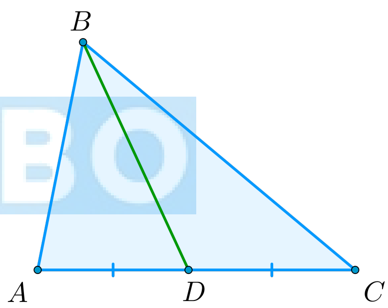
$$S_{\triangle_1} = S_{\triangle_2} = S_{\triangle_3} = S_{\triangle_4}$$



2.2 Медиана треугольника

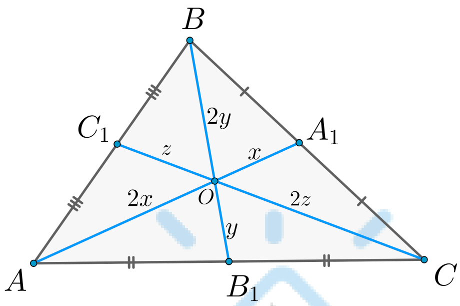
Медиана треугольника делит его на два треугольника, равных по площади (равновеликих): $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle CBD}$.
Формула длины медианы треугольника:

$$BD = \frac{1}{2}\sqrt{2AB^2 + 2BC^2 - AC^2}$$



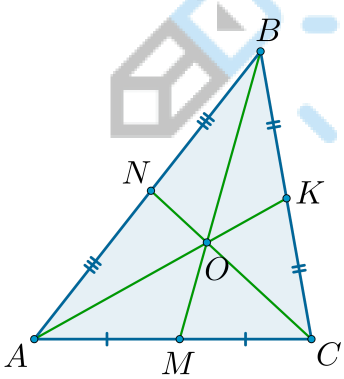
Медианы в треугольнике точкой пересечения делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины:

$$AO : OA_1 = BO : OB_1 = CO : OC_1 = 2 : 1$$



Все три медианы треугольника делят его на шесть равновеликих треугольников:

$$S_{\triangle AOM} = S_{\triangle COM} = S_{\triangle COK} = S_{\triangle BOK} = S_{\triangle BON} = S_{\triangle AON}$$



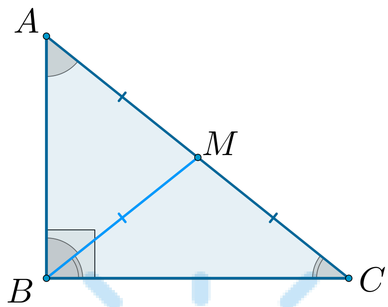
3 Прямоугольный треугольник

3.1 Медиана прямоугольного треоугльника

Медиана треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы:

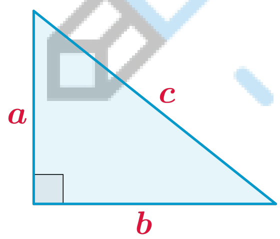
$$BM = \frac{1}{2}AC = AM = MC$$

Таким образом, получаются два равнобедренных треугольника: $\triangle ABM$ и $\triangle CBM$.



3.2 Теорема Пифагора

Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов: $c^2 = a^2 + b^2$.
Верно и обратное: если квадрат стороны равен сумме квадратов двух других сторон, то треугольник является прямоугольным.



3.3 Высота в прямоугольном треугольнике

1. Высота из вершины прямого угла треугольника делит его на два треугольника, подобных исходному:

$$\triangle ABC \sim \triangle AHC \sim \triangle BHC$$

2. Квадрат высоты из прямого угла треугольника равен произведению длин отрезков, на которые она делит гипотенузу:

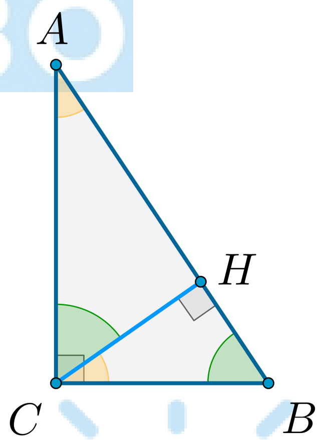
$$CH^2 = AH \cdot BH$$

3. Проекция катета на гипотенузу равна частному квадрата катета и гипотенузы:

$$BH = \frac{BC^2}{AB}; \quad AH = \frac{AC^2}{AB}$$

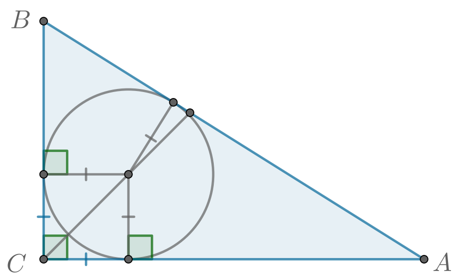
4. Высота из вершины прямого угла равна частному произведения катетов и гипотенузы:

$$CH = \frac{AC \cdot BC}{AB}$$

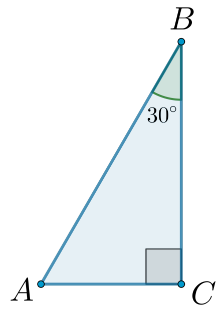


3.4 Вписанная окружность в прямоугольном треугольнике

Вершина прямого угла, точки касания вписанной окружности и катетов и центр вписанной окружности прямоугольного треугольника образуют квадрат.



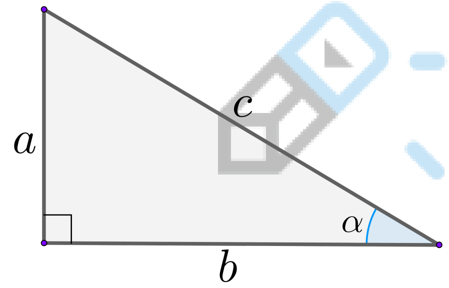
3.5 Прямоугольный треугольник с острым углом в 30 градусов



1. Катет, лежащий против угла 30°, равен половине гипотенузы.
2. Если катет равен половине гипотенузы, то он лежит против угла 30°.

3.6 Тригонометрия в прямоугольном треугольнике

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c};$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}.$$



4 Базовые факты о многоугольниках

4.1 Четырехугольники

Сумма внутренних углов любого выпуклого четырехугольника равна 360°.

1. Если у выпуклого четырехугольника две стороны параллельны, а две другие не параллельны, то такой четырехугольник называется трапецией.

2. Если у выпуклого четырехугольника противоположные стороны попарно параллельны, то он называется параллелограммом.

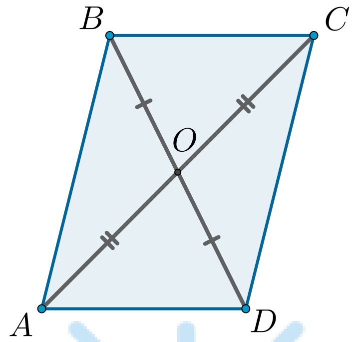
3. Если у параллелограмма все стороны равны, то он называется ромбом.

4. Если у параллелограмма хотя бы один угол прямой, то он называется прямоугольником.

5. Если у ромба хотя бы один угол прямой, то он называется квадратом, ИЛИ если у прямоугольника все стороны равны, то он называется квадратом.

4.2 Параллелограмм

Параллелограмм — четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

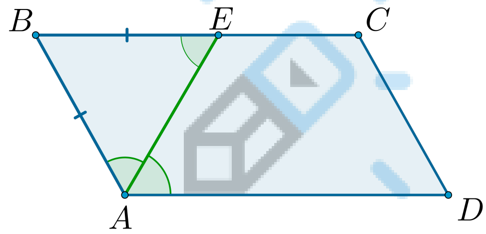


Признаки: четырехугольник является параллелограммом, если

1. противоположные стороны попарно равны.
2. две стороны равны и параллельны.
3. диагонали точкой пересечения делятся пополам.

Свойства параллелограмма:

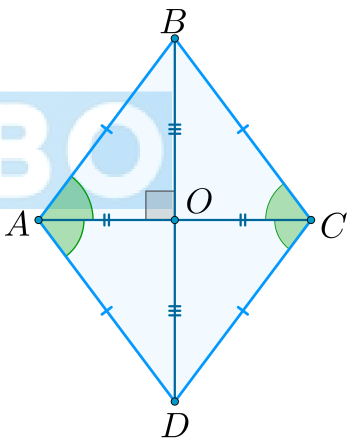
1. противоположные стороны попарно равны.
2. противоположные углы попарно равны.
3. диагонали точкой пересечения делятся пополам.



Биссектриса AE параллелограмма $ABCD$ отсекает от него равнобедренный треугольник, то есть $AB = BE$ и $\angle BAE = \angle DAE = \angle BEA$.

4.3 Ромб

Ромб — параллелограмм, у которого все стороны равны. Соответственно, ромб обладает всеми свойствами параллелограмма.



Признаки: параллелограмм является ромбом, если

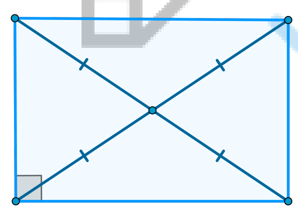
1. диагонали взаимно перпендикулярны.
2. диагонали являются биссектрисами его углов.

Свойства ромба:

1. диагонали взаимно перпендикулярны.
2. диагонали являются биссектрисами его углов.

4.4 Прямоугольник

Прямоугольник — параллелограмм, у которого хотя бы один угол прямой. Соответственно, прямоугольник обладает всеми свойствами параллелограмма.



Признаки прямоугольника:

1. Если у выпуклого четырехугольника все углы прямые, то он является прямоугольником.
2. Если у параллелограмма диагонали равны, то он является прямоугольником.

Свойство прямоугольника:

Диагонали прямоугольника равны.

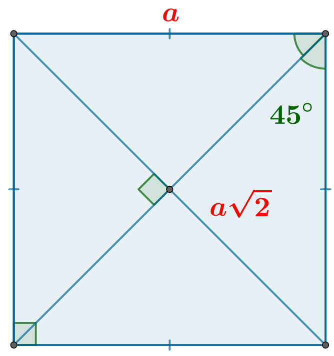
4.5 Квадрат

Квадрат — прямоугольник, у которого все стороны равны.

Альтернативное определение: квадрат — это ромб, у которого хотя бы один угол прямой. Соответственно, квадрат обладает всеми свойствами прямоугольника и ромба.

Свойства квадрата:

1. Все стороны равны.
2. Все углы прямые.
3. Диагонали точкой пересечения делятся пополам.
4. Диагонали равны.
5. Диагонали взаимно перпендикулярны.
6. Диагонали делят углы квадрата пополам.
7. Диагональ квадрата со стороной a равна $a\sqrt{2}$.



4.6 Трапеция

Трапеция — выпуклый четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны. Параллельные стороны называются основаниями, а две другие — боковыми.

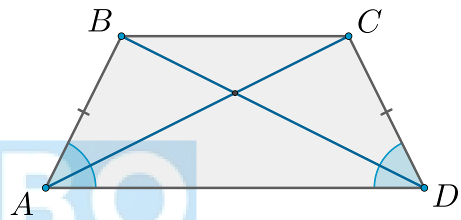
Свойство трапеции:

Сумма углов при боковой стороне равна $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = 180°$.

Если боковые стороны трапеции равны, то она **равнобедренная**.

Признаки и свойства равнобедренной трапеции:

1. углы при основании равны.
2. диагонали равны.



4.7 Многоугольники

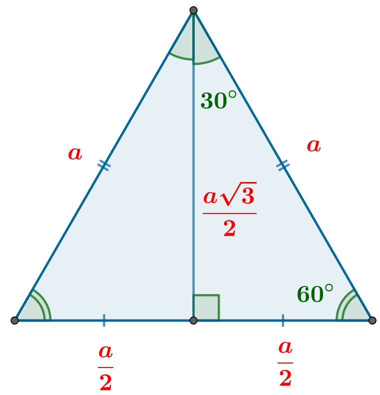
Сумма внутренних углов любого выпуклого n-угольника равна $(n-2)\cdot 180°$.

Правильный многоугольник — многоугольник, у которого все стороны равны и все углы равны.

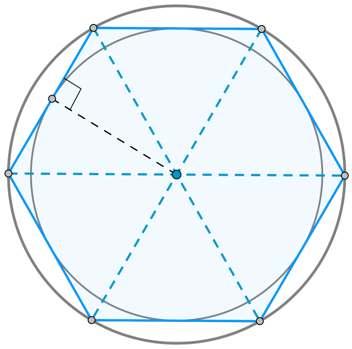
Каждый угол правильного n-угольника равен $\dfrac{(n-2)\cdot 180°}{n}$.

4.8 Правильный треугольник

1. Все углы правильного треугольника равны 60°.
2. Высота, медиана и биссектриса правильного треугольника равна $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, если сторона треугольника равна a.
3. Площадь правльного треугольника со стороной a равна $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.



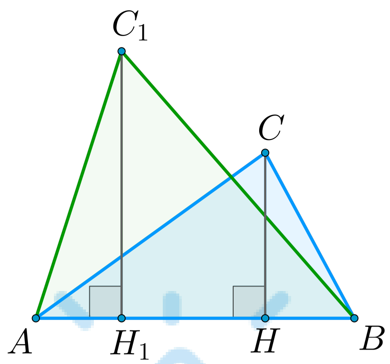
4.9 Правильный шестиугольник



1. Большие диагонали делят его на 6 равных равносторонних треугольников.
2. Большая диагональ в два раза больше стороны.
3. Центры вписанной и описанной окружностей совпадают — это точка пересечения больших диагоналей.
4. Радиус описанной окружности равен стороне.

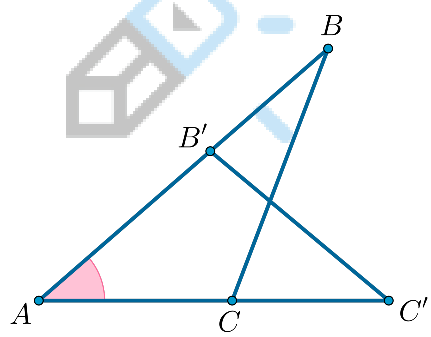
5 Все о площадях

5.1 Теоремы о площадях треугольников



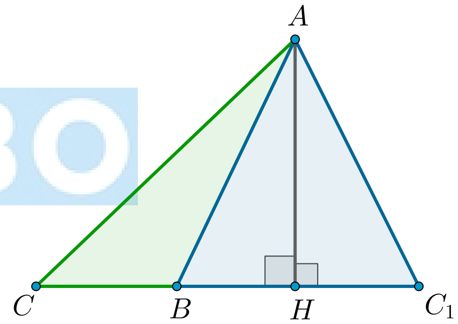
Площади треугольников, имеющих общую сторону, относятся как высоты, проведенные к этой стороне:

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABC_1}} = \frac{CH}{C_1H_1}$$



Площади треугольников, имеющих общий угол, относятся как произведения сторон, образующих этот угол:

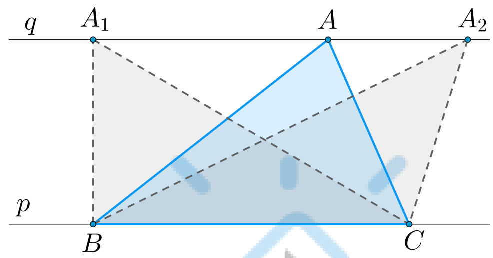
$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AB'C'}} = \frac{AB \cdot AC}{AB' \cdot AC'}$$



Площади треугольников, имеющих общую высоту, относятся как основания, к которым эта высота проведена:

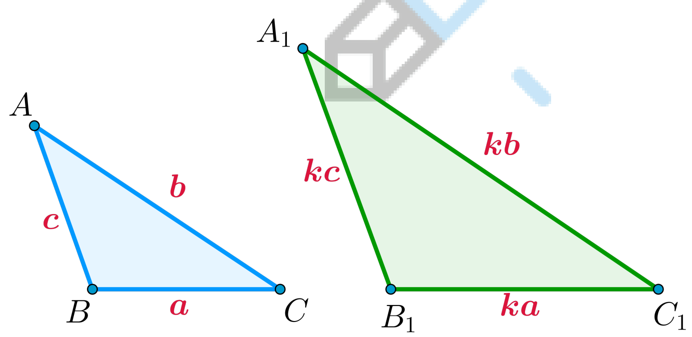
$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABC_1}} = \frac{BC}{BC_1}$$

ШКОЛКОВО



Если прямые p и q параллельны, то

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle A_1BC} = S_{\triangle A_2BC}$$



Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия:

$$\frac{S_{\triangle A_1B_1C_1}}{S_{\triangle ABC}} = k^2$$

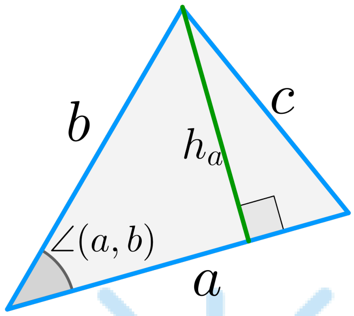
Отношение периметров подобных треугольников равно коэффициенту подобия:

$$\frac{P_{\triangle A_1B_1C_1}}{P_{\triangle ABC}} = k$$

5.2 Форулы площади треугольника

1. Формула Герона площади треугольника:

$$S_{\triangle} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$



2. Площадь треугольника равна полупроизведению основания на высоту:

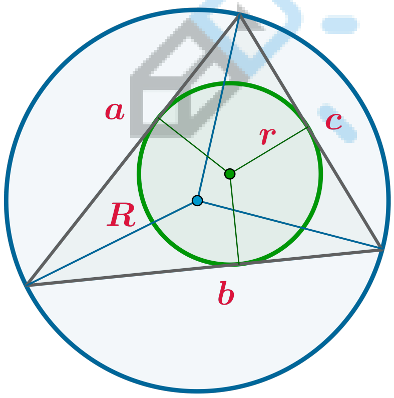
$$S_{\triangle} = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

3. Площадь треугольника равна полупроизведению сторон на синус угла между ними:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2}\, ab \cdot \sin\angle(a,b)$$

4. Площадь треугольника равна произведению полупериметра на радиус вписанной окружности:

$$S_{\triangle} = p \cdot r = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$$

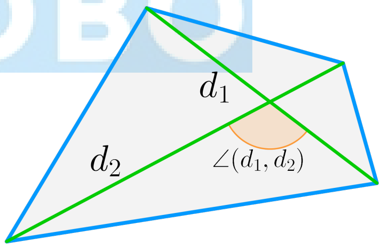


5. Площадь треугольника равна произведению трех его сторон, деленному на учетверенный радиус описанной окружности:

$$S_{\triangle} = \frac{abc}{4R}$$

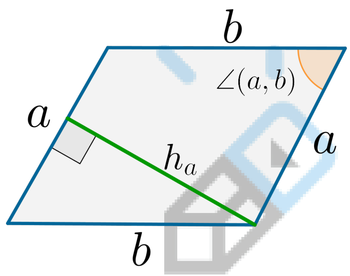
5.3 Площадь выпуклого четырехугольника

$$S = \frac{1}{2}\, d_1 d_2 \cdot \sin\angle(d_1, d_2)$$



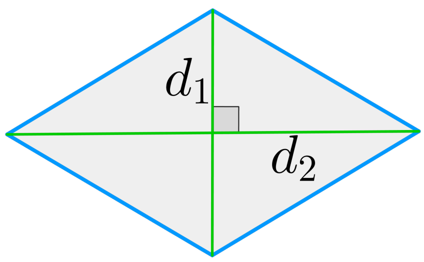
5.4 Площадь параллелограма

$$S = a \cdot h_a = ab \cdot \sin\angle(a,b)$$



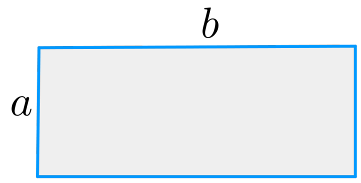
5.5 Площадь ромба

$$S = \frac{1}{2}\, d_1 d_2$$



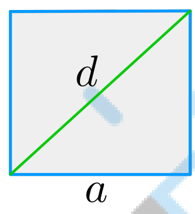
5.6 Площадь прямоугольника

$$S = ab$$



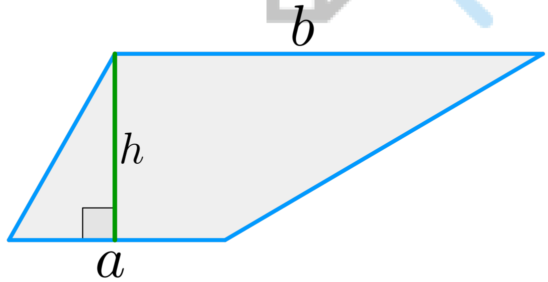
5.7 Площадь квадрата

$$S = a^2 = \frac{1}{2} d^2$$



5.8 Площадь трапеции

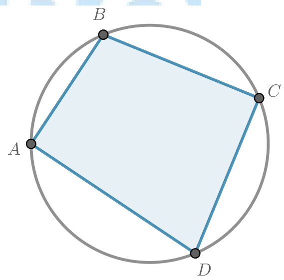
$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$



5.9 Формула Брахмагупты

Дан вписанный четырехугольник $ABCD$, p — его полупериметр. Тогда площадь четырехугольника

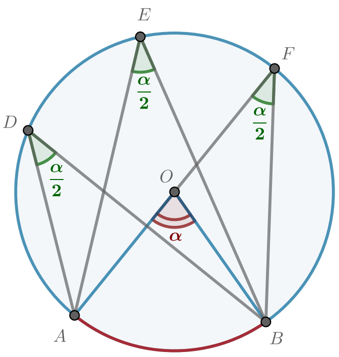
$$S = \sqrt{(p - AB)(p - BC)(p - CD)(p - DA)}$$



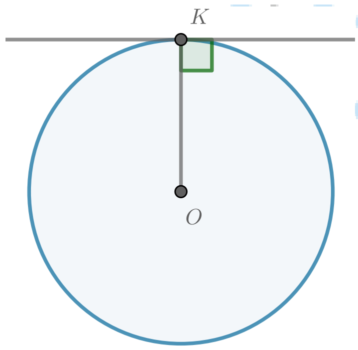
6 Все про окружность и вписанные четырехугольники

6.1 Основные факты про окружность

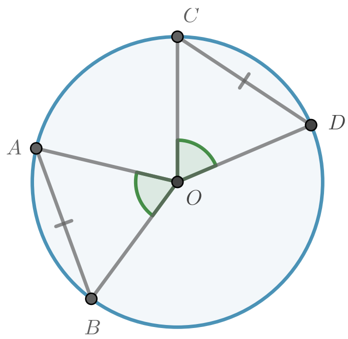
Все вписанные углы, опирающиеся на дугу AB, равны половине центрального угла, опирающегося на эту дугу.



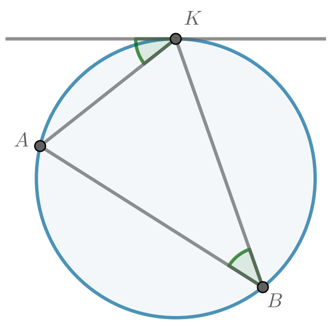
Радиус, проведенный к точке касания, перпендикулярен касательной.



Равные хорды стягивают равные дуги.
Верно обратное: равные дуги стягиваются равными хордами.

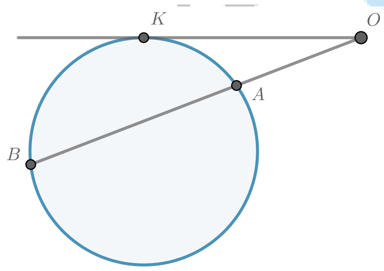


Угол между хордой и касательной равен вписанному углу, опирающемуся на дугу, отсеченную хордой.



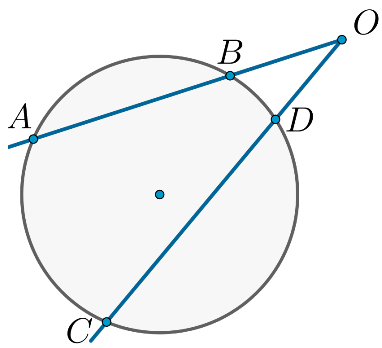
Квадрат касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть.

$$OK^2 = OA \cdot OB$$



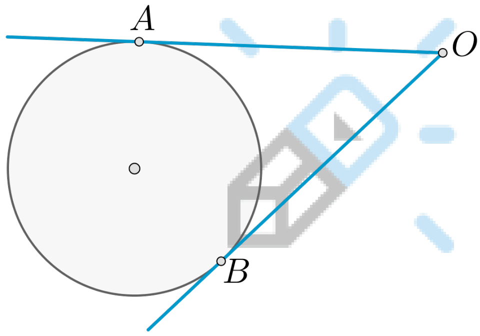
Для данной окружности и точки O вне окружности произведение секущей на ее внешнюю часть — величина постоянная:

$$OA \cdot OB = OC \cdot OD$$



Отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности, равны:

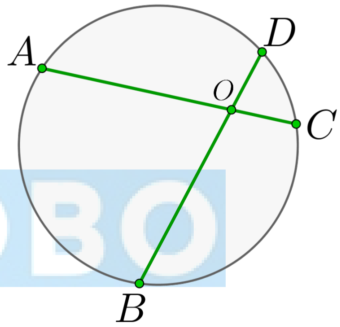
$$OA = OB$$



Произведения отрезков пересекающихся хорд равны:

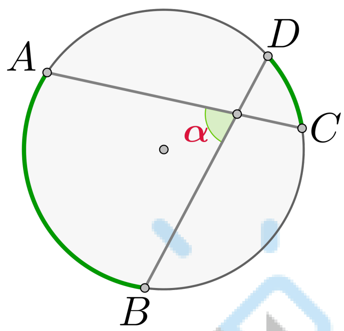
$$AO \cdot OC = BO \cdot OD$$

ШКОЛКОВО



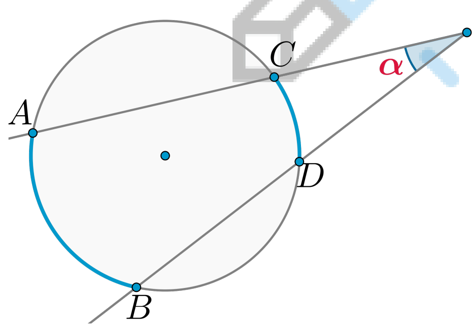
Угол между пересекающимися хордами окружности равен полусумме дуг, заключенных между ними:

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\breve{AB} + \breve{CD}\right)$$



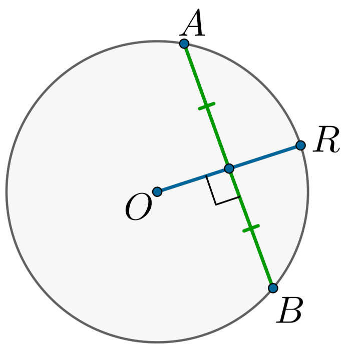
Угол между секущими, проведенными из одной точки к окружности, равен полуразности дуг, заключенных между ними:

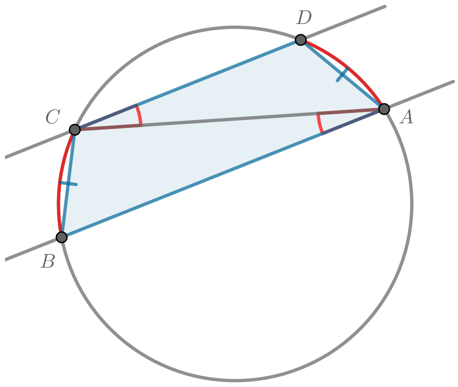
$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\breve{AB} - \breve{CD}\right)$$



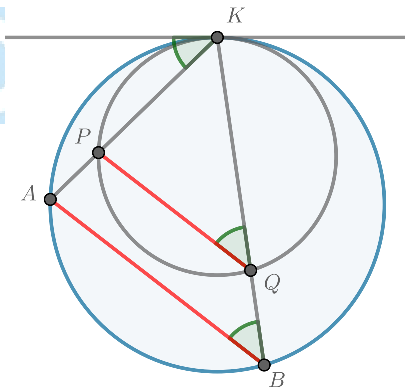
Если радиус перпендикулярен хорде, то он делит ее пополам.
Верно обратное: если радиус делит хорду пополам, то он ей перпендикулярен.

$$OR \perp AB \quad \Leftrightarrow \quad OR \text{ делит } AB \text{ пополам}$$





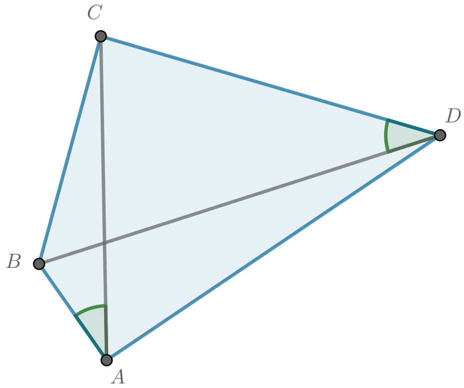
Точки пересечения двух параллельных прямых с окружностью образуют равнобокую трапецию.



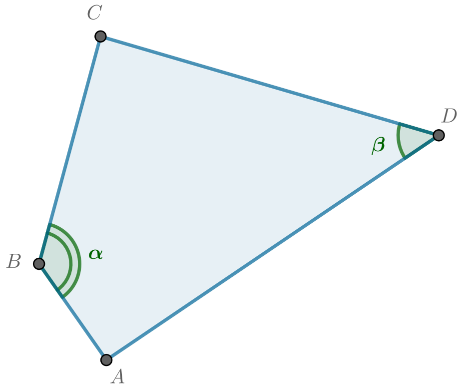
Две окружности касаются внутренним образом в точке K. Хорды KA и KB первой окружности пересекают вторую в точках P и Q соответственно. Тогда $AB \parallel PQ$.

6.2 Признаки вписанности

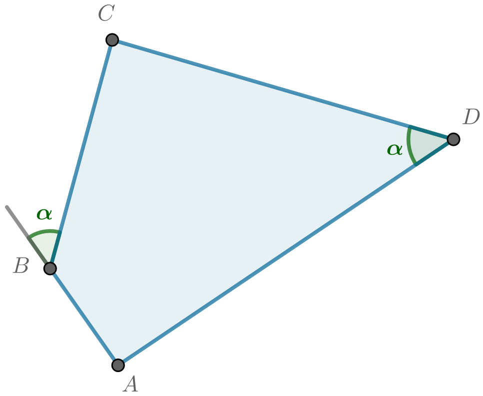
Углы, опирающиеся на одну сторону, равны.



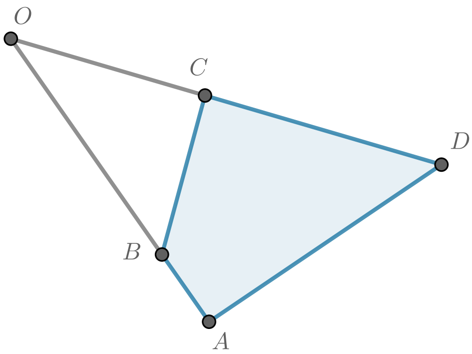
Сумма противолежащих углов $\alpha + \beta = 180°$.



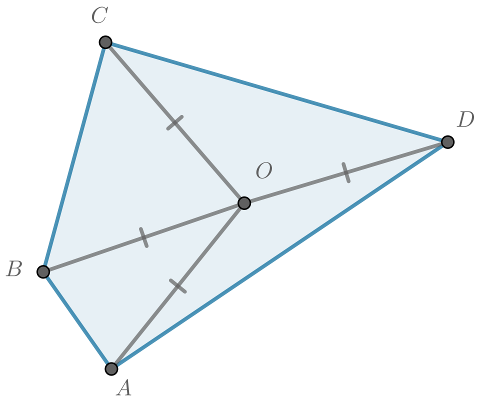
Угол равен смежному с противолежащим.



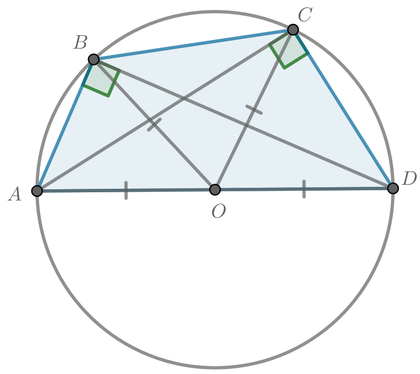
$$OC \cdot OD = OB \cdot OA$$



Явно найдена точка, от которой равноудалены вершины.



Частный случай. Два угла по 90° опираются на одну сторону, являющуюся диаметром.

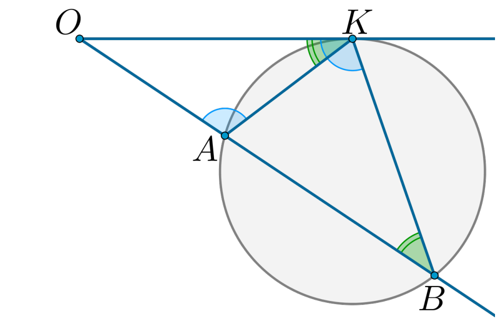


6.3 Подобные треугольники в окружностях

Если OK — касательная, где K — точка касания с окружностью, OB — секущая, A и B — точки пересечения с окружностью, то

$$\triangle OAK \sim \triangle OBK$$

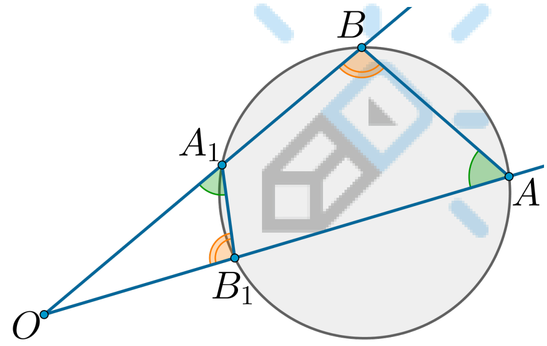
(Следствие: квадрат касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть)



Если OA и OB — секущие, пересекающие повторно окружность в точках B_1 и A_1 соответственно, то

$$\triangle OAB \sim \triangle OA_1B_1$$

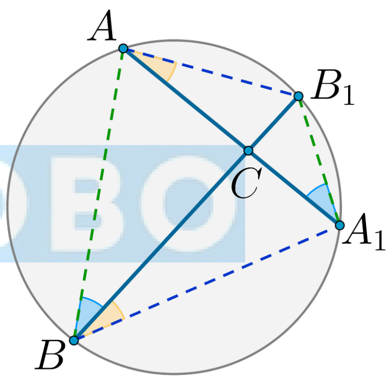
(Следствие: для данной окружности произведение секущей на ее внешнюю часть — величина постоянная)



При пересечении хорд в окружности образуются две пары подобных треугольников:

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C$$
$$\triangle AB_1C \sim \triangle A_1BC$$

(Следствие: произведения отрезков хорд равны)

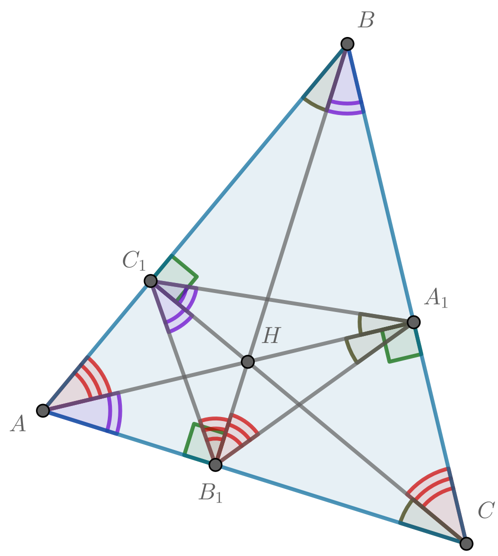


ШКОЛКОВО

7 Высота треугольника и ортоцентр

7.1 Элементарные свойства ортоцентра

H — *ортоцентр* треугольника ABC, треугольник $A_1B_1C_1$ называют *ортотреугольником.*



Свойство 1 Четырехугольники $AC_1HB_1, BA_1HC_1, CB_1HA_1$ являются вписанными.

Действительно, в каждом из них противолежащие углы по $90°$, а значит их сумма $180°$.

Свойство 2 Четырехугольники $ABA_1B_1, BCB_1C_1, CAC_1A_1$ являются вписанными.

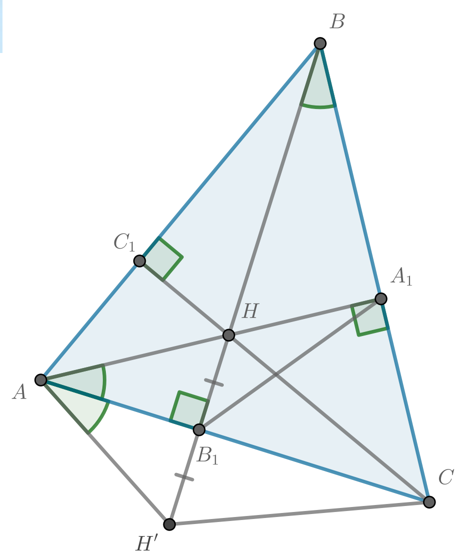
Из треугольника BCB_1: $\angle B_1BC = 90° - \angle C$. Из треугольника ACA_1: $\angle CAA_1 = 90° - \angle C$. Тогда $\angle B_1BA_1 = \angle B_1AA_1 \Rightarrow ABA_1B_1$ — вписанный. Аналогично для других двух.

Свойство 3 H — инцентр $A_1B_1C_1$.

Докажем, что B_1H — биссектриса. Из вписанности B_1HA_1C: $\angle A_1CH = \angle A_1B_1H$. Из вписанности AC_1HB_1: $\angle HAC_1 = \angle HB_1C_1$. По второму пункту $\angle A_1CH = \angle HAC_1 \Rightarrow$ все четыре угла равны, и B_1H — биссектриса. Аналогично для C_1H и A_1H.

7.2 Лемма об отражении ортоцентра 1

Свойство 4 Точка симметричная ортоцентру треугольника относительно стороны лежит на описанной окружности треугольника.



Доказательство

Пусть H' — точка симметричная ортоцентру H относительно стороны AC треугольника ABC. Докажем, что четырехугольник $ABCH'$ вписанный, что равносильно утверждению леммы.

$\triangle AHB_1 = \triangle AH'B_1$ из симметрии $\Rightarrow \angle H'AB_1 = \angle B_1AH$. При этом $\angle B_1AH = \angle B_1AA_1 = \angle B_1BA_1$ из вписанности четырехугольника ABA_1B_1. Тогда в $ABCH' : \angle H'AC = \angle H'BC \Rightarrow$ он вписанный.

NB В этой и следующей лемме случаи прямоугольных и тупоугольных треугольников не разбираются отдельно. Несложно убедиться, что они устроены практически аналогично.

7.3 Лемма об отражении ортоцентра 2

Точка симметричная ортоцентру треугольника относительно середины стороны лежит на описанной окружности треугольника, причем выполняются свойства (пусть это точка H_B, а симметрию провели относительно середины M стороны AC треугольника ABC):

Свойство 5 H_B диаметрально противоположна вершине B треугольника.

Свойство 6 Пусть O — центр описанной окружности треугольника. Тогда $BH = 2OM$.

Свойство 7 $\angle ABH = \angle CBO$ (говорят, что точки O и H *изогональны*, то есть симметричны относительно биссектрисы угла $\angle ABC$).

Доказательство

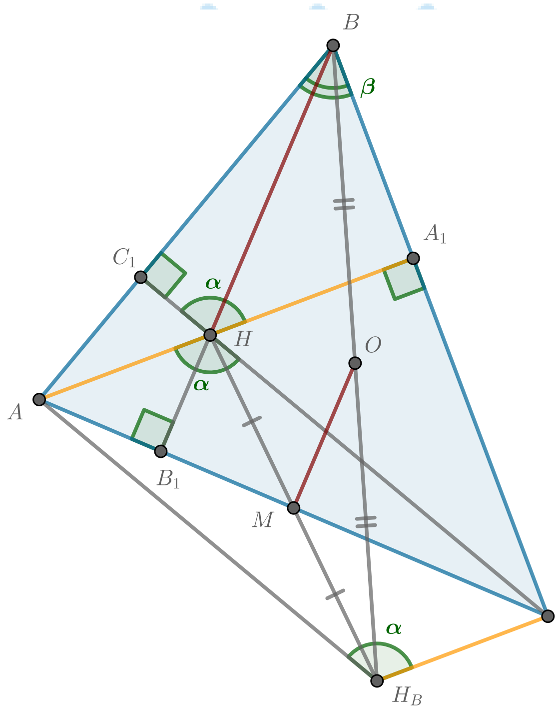
Сразу оговоримся, что точка O пока просто середина отрезка BH_B, мы пока не знаем, что она является центром описанной окружности.

Пусть $\angle ABC = \beta, \angle CH_BA = \alpha$. Из симметрии $AHCH_B$ — параллелограмм $\Rightarrow \angle CH_BA = \angle AHC = \alpha$. $\angle AHC = \angle A_1HC_1 = \alpha$ как вертикальные. BA_1HC_1 — вписанный $\Rightarrow$ $\angle A_1HC_1 + \angle C_1BA_1 = 180^\circ = \alpha+\beta = \angle CH_BA + \angle ABC \Rightarrow ABCH_B$ — вписанный, то есть H_B лежит на описанной окружности треугольника ABC.

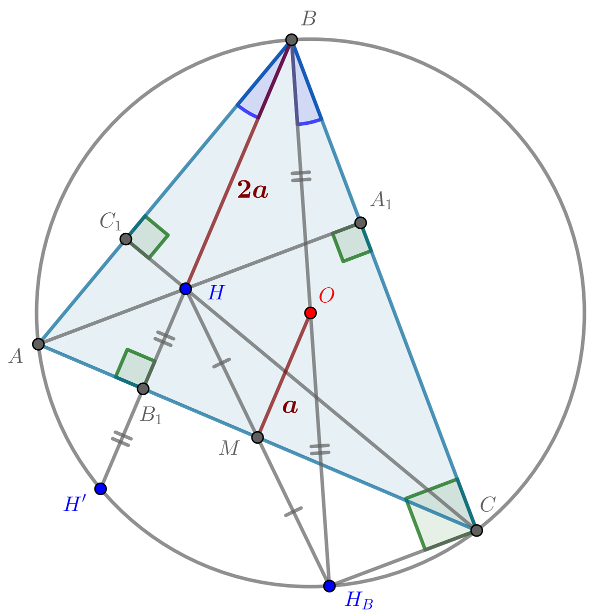
Свойство 5 $AHCH_B$ — параллелограмм $\Rightarrow$ $AA_1 \parallel H_BC$, причем $AA_1 \perp BC \Rightarrow H_BC \perp BC$. Получили, что $\angle BCH_B = 90^\circ$, значит, BH_B — диаметр, и O действительно является центром описанной окружности треугольника ABC.

Свойство 6 $OM = \frac{1}{2}HB$ как средняя линия в треугольнике HBH_B.

Свойство 7 $\angle CAB = \angle CH_BB$ из вписанности, $\angle BB_1A = \angle BCH_B = 90^\circ$ по пункту 1 $\Rightarrow \angle ABB_1 = \angle H_BBC$.

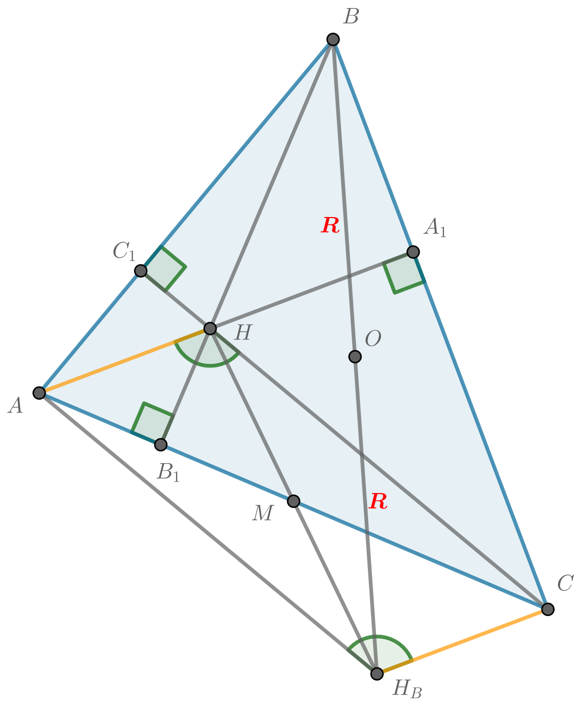


Картинка для запоминания двух лемм



Свойство 8

Доказать, что в треугольнике ABC с ортоцентром H и радиусом описанной окружности R выполняется $AH^2 + BC^2 = 4R^2$.



Решение

Воспользуемся 2й леммой, обозначения оставим те же. $AHCH_B$ — параллелограмм $\Rightarrow$ $AH = H_B$. $OB = OH_B = R$. Запишем теорему Пифагора для треугольника BCH_B

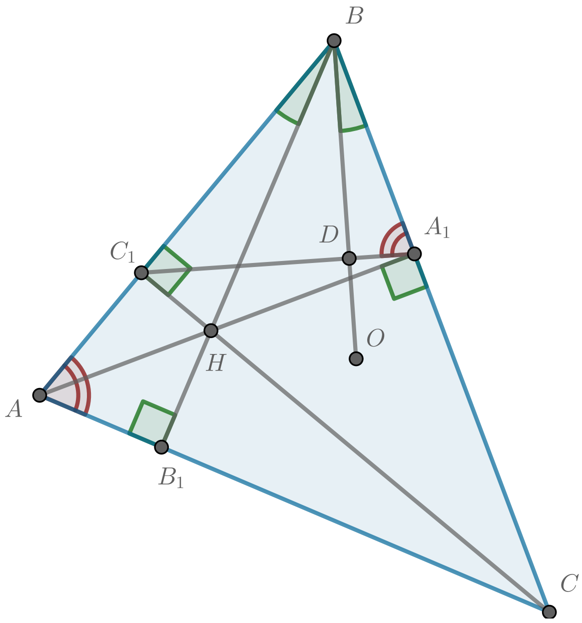
$$BH_B^2 = BC^2 + CH_B^2 \Rightarrow 4R^2 = BC^2 + AH^2$$

Свойство 9

В треугольнике ABC проведены высоты CC_1 и AA_1, O — центр описанной окружности. Доказать, что $OB \perp C_1A_1$.

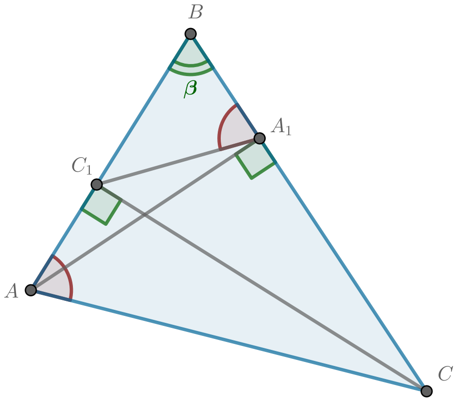
Решение

Пусть B_1 — основание третьей высоты, D — точка пересечения C_1A_1 и OB. По пункту 3) второй леммы $\angle ABH = \angle CBO \Rightarrow \angle ABB_1 = \angle A_1BD$. По одному из элементарных свойств AC_1A_1C — вписанный $\Rightarrow \angle CAC_1 = \angle BA_1C_1$. Посмотрим на треугольники ABB_1 и A_1BD: $\angle ABB_1 = \angle A_1BD$, $\angle B_1AB = \angle BA_1D \Rightarrow \angle A_1DB = \angle AB_1B = 90°$, что и требовалось доказать.



Свойство 10

A_1 и C_1 — основания высот из вершин A и C соответственно треугольника ABC. Тогда $\triangle BA_1C_1 \sim \triangle BAC$ с коэффициентом $\cos\beta$, где $\angle ABC = \beta$.



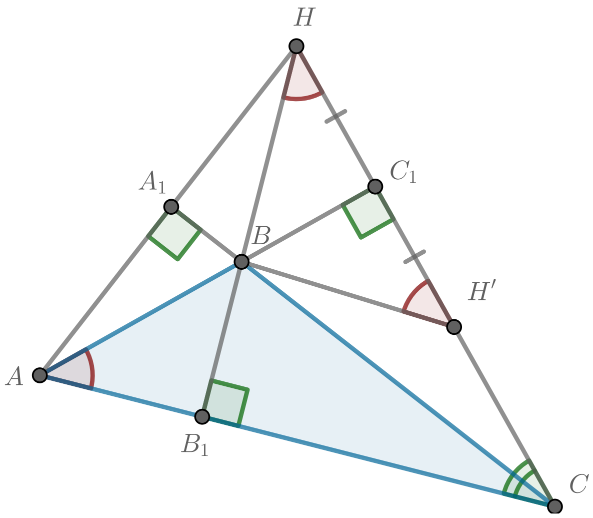
Доказательство

Как мы уже знаем, четырехугольник AC_1A_1C вписанный $\Rightarrow$ $\angle CAC_1 = \angle BA_1C_1$. Угол B общий, значит $\triangle BA_1C_1 \sim \triangle BAC$ по двум углам с коэффициентом $\frac{BA_1}{BA} = \cos\beta$ (из прямоугольного треугольника ABA_1).

Бонус (*один из случаев леммы 1 для тупоугольного треугольника*)

Обозначения ровно те же, что и в лемме. Нужно доказать, что четырехугольник $ABH'C$ — вписанный.

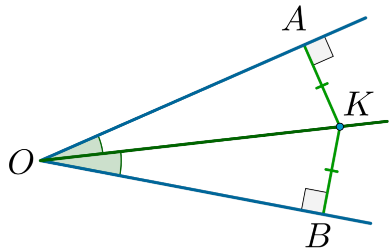
Из треугольника AC_1C : $\angle CAC_1 = 90° - \angle C$. Из треугольника CHB_1 : $\angle B_1HC = 90° - \angle C = \angle CAC_1$. Причем из симметрии $\angle BHC_1 = \angle C_1H'B$. Тогда $\angle CAB = \angle C_1H'B \Rightarrow ABH'C$ — вписанный.



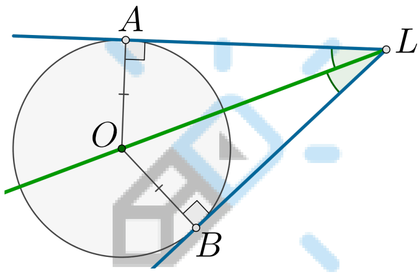
8 Биссектрисы и инцентр

8.1 Основные свойства биссектрисы

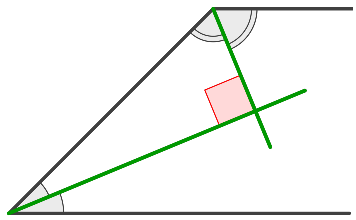
Каждая точка биссектрисы угла равноудалена от его сторон. Верно и обратное: если точка равноудалена от сторон угла, то она лежит на его биссектрисе.



Если окружность вписана в угол, то ее центр лежит на биссектрисе этого угла.

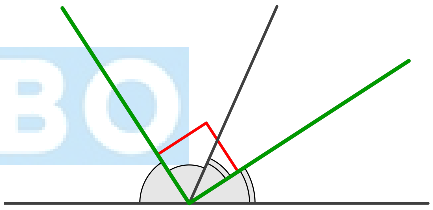


Биссектрисы односторонних углов при параллельных прямых взаимно перпендикулярны.



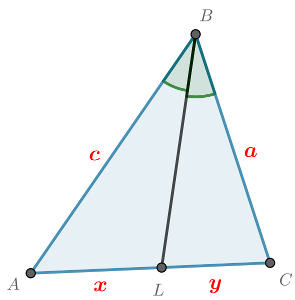
ШКОЛКОВО

Биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны.



Пусть BL — биссектриса в треугольнике ABC. Тогда

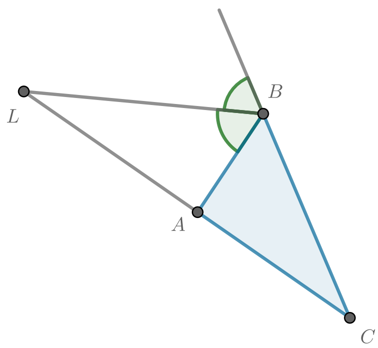
$$\frac{AB}{BC} = \frac{AL}{LC}$$



$$\frac{c}{a} = \frac{x}{y}$$

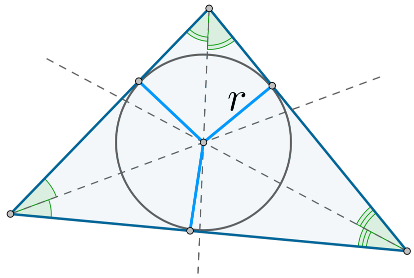
Пусть BL — внешняя биссектриса в треугольнике ABC. Тогда

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AL}{LC}$$

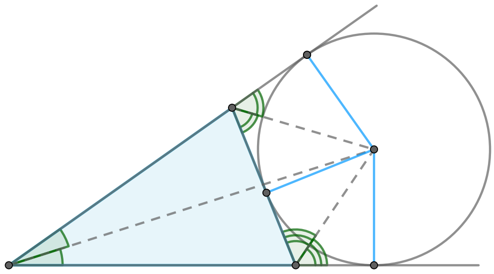


8.2 Вписанная и вневписанные окружности треугольника

Центр окружности, вписанной в треугольник, лежит на пересечении биссектрис углов треугольника.
Заметим, что в общем случае точка касания окружности со стороной треугольника не совпадает с точкой пересечения биссектрисы со стороной треугольника.

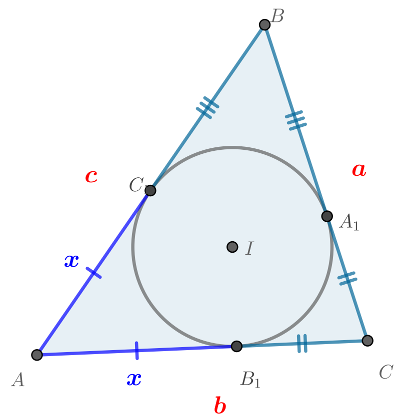


Центр вневписанной окружности треугольника лежит на пересечении внутренней биссектрисы угла треугольника, в который вписана окружность, и внешних биссектрис двух других углов.



Нужно доказывать!
Пусть A_1, B_1 и C_1 — точки касания вписанной окружности со сторонами $BC = a$, $CA = b$ и $AB = c$ треугольника соответсвенно. Обозначим $AB_1 = AC_1 = x$, p — полупериметр треугольника, тогда

$$x = \frac{b+c-a}{2} = p - a$$



Доказательство:

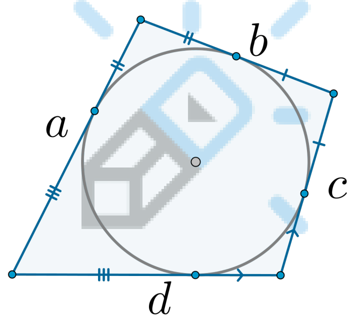
$$\begin{cases} AB = AB_1 + BC_1 \\ BC = BC_1 + CA_1 \\ AC = AB_1 + CA_1 \end{cases} \Rightarrow \quad AB_1 = \frac{AB + AC - BC}{2} = p - a$$

8.3 Описанный четырехугольник

Центр вписанной в четырехугольник (многоугольник) окружности лежит на пересечении биссектрис его углов.

1. Если в четырехугольник можно вписать окружность, то суммы противоположных сторон четырехугольника равны.
2. Если суммы противоположных сторон четырехугольника равны, то в него можно вписать окружность.

$$a + c = b + d$$

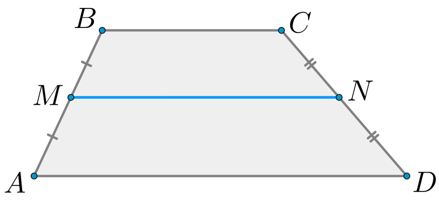


9 Все о трапеции

9.1 Средняя линия трапеции

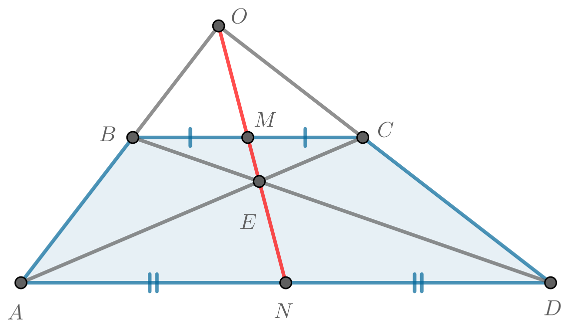
Средняя линия трапеции — отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции. Он параллельна основаниям трапеции и равна их полусумме:

$$MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$$



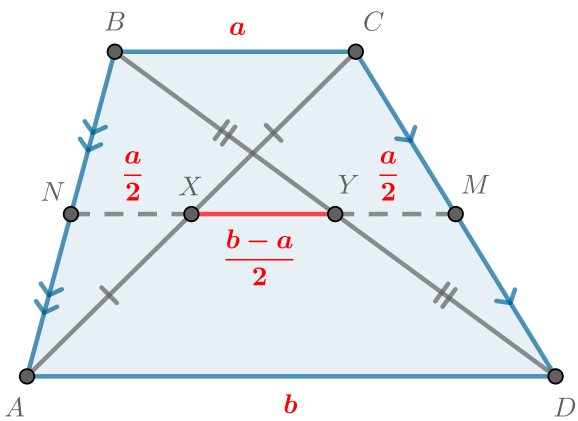
9.2 Замечательное свойство трапеции

Середины M и N оснований трапеции, точка O пересечения диагоналей и точка P пересечения продолжений боковых сторон трапеции лежат на одной прямой.

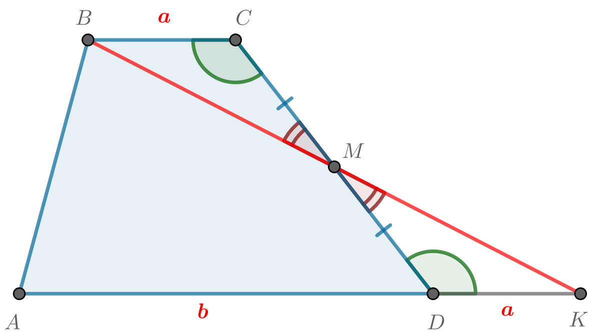


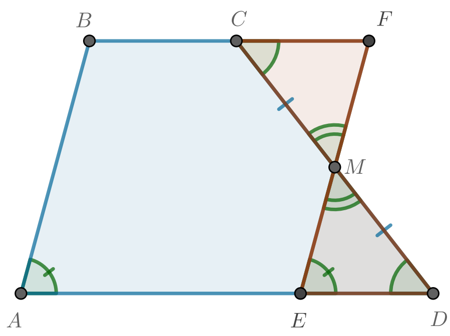
9.3 Отрезок, соединяющий середины диагоналей

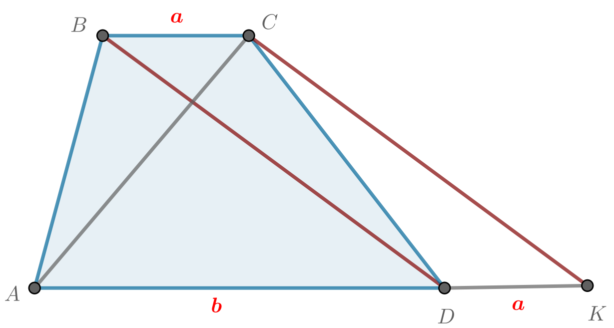
Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции равен полуразности оснований.

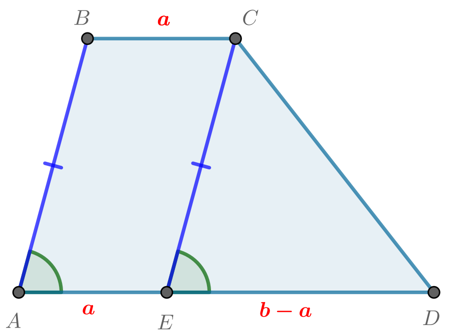


9.4 Дополнительные построения в трапеции









ШКОЛКОВО

9.5 Нетривиальный факт про трапецию

Произвольная прямая параллельная основаниям трапеции пересекает AB, AC, BD и CD в точках P, Q, R и S соответственно. Тогда $PQ = RS$.

Доказательство:

$\triangle APQ \sim \triangle ABC$ по двум углам($\angle A$ общий, $\angle PQA = \angle BCA$ из параллельности) с коэффициентом $k_1 = \frac{AP}{AB}$. Аналогично $\triangle DSR \sim \triangle DCB$ с коэффициентом $k_2 = \frac{DS}{DC}$.

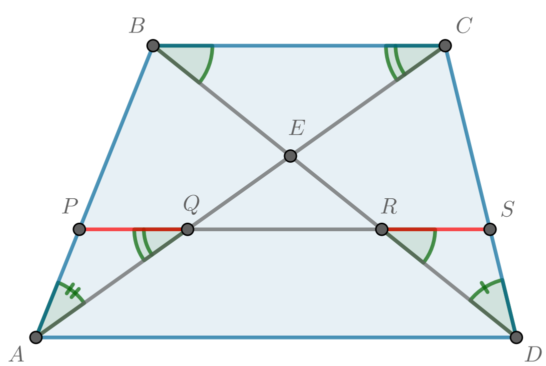
Из первого подобия: $PQ = BC \cdot k_1$.

Из второго подобия: $RS = BC \cdot k_2$.

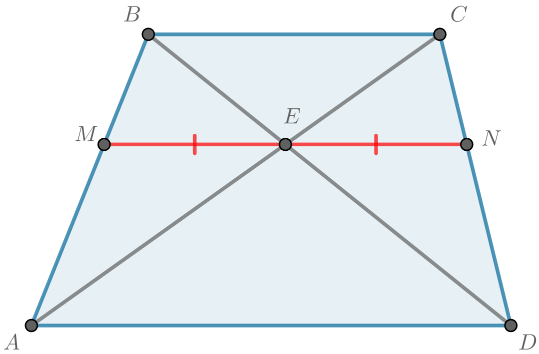
По теореме о пропорциональных отрезках:

$$\frac{BP}{AP} = \frac{CS}{SD} \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \frac{BP}{AP} = \frac{CS}{SD} + 1:$$

$$\frac{AP + BP}{AP} = \frac{CS + SD}{SD} \Rightarrow \frac{AB}{AP} = \frac{CD}{SD} \Rightarrow k_1 = k_2 \Rightarrow PQ = RS.$$



Следствие: в трапеции с основаниями BC и AD через точку E пересечения диагоналей проведена прямая параллельно основаниям. Она пересекает боковые стороны в точках M и N. Тогда $EM = EN$.

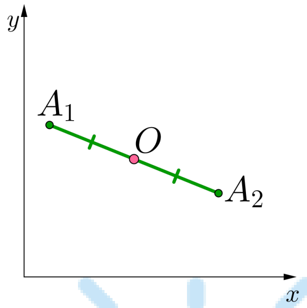


ШКОЛКОВО

10 Метод координат

10.1 Длина и координаты середины отрезка

Если $A_1\,(x_1; y_1)$ и $A_2\,(x_2; y_2)$,
O — середина отрезка A_1A_2, то верны следующие формулы:

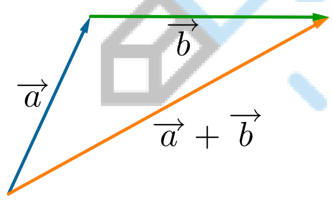


$$A_1A_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

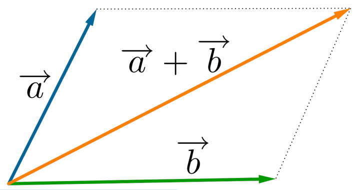
$$O\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

10.2 Правила треугольника и параллелограмма

Правило треугольника суммы векторов: отложить вектор $\overrightarrow{b}$ от конца вектора $\overrightarrow{a}$, тогда $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ будет равен вектору, начало которого совпадает с началом вектора $\overrightarrow{a}$, а конец совпадает с концом вектора $\overrightarrow{b}$.



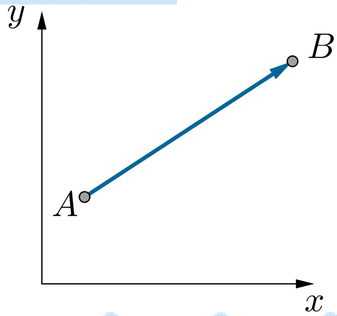
Правило параллелограмма суммы векторов: отложить вектор $\overrightarrow{b}$ от начала вектора $\overrightarrow{a}$, построить на данных векторах параллелограмм. Тогда $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ — вектор, совпадающий с диагональю параллелограмма, начало которого совпадает с началом векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$.



ШКОЛКОВО

10.3 Координаты и модуль вектора

Пусть даны точки $A\,(x_1; y_1)$ и $B\,(x_2; y_2)$.
Тогда вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты:



$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$$

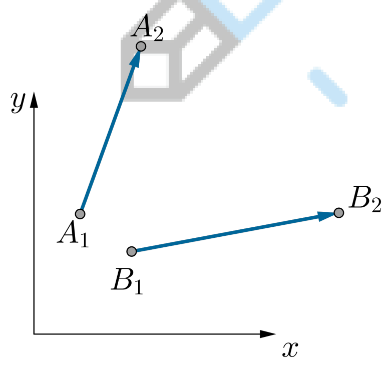
Если $\overrightarrow{AB} = \{a, b\}$, то его длина вычисляется по формуле:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

10.4 Скалярное произведение векторов

Пусть даны два вектора: $\overrightarrow{A_1A_2} = \{x_1; y_1\}$ и $\overrightarrow{B_1B_2} = \{x_2; y_2\}$.
Тогда сумма этих векторов имеет координаты:

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} = \{x_1 + x_2; y_1 + y_2\}$$



Скалярное произведение этих векторов можно вычислить по одной из двух формул:

$$\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{B_1B_2}\right) = |\overrightarrow{A_1A_2}| \cdot |\overrightarrow{B_1B_2}| \cdot \cos\angle(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{B_1B_2})$$

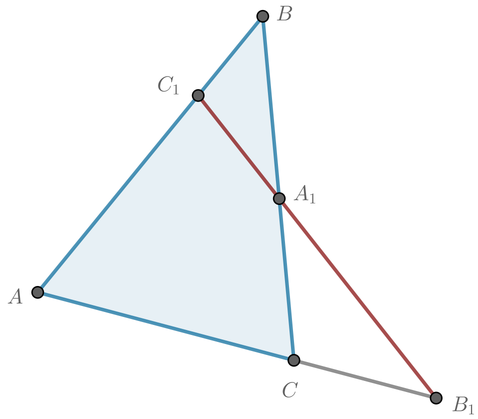
$$\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{B_1B_2}\right) = x_1x_2 + y_1y_2$$

11 Счетные теоремы планиметрии

11.1 Теорема Менелая

Если прямая пересекает стороны AB и BC в точках C_1 и A_1 соответственно, а также продолжение стороны AC в точке B_1, то выполнено следующее соотношение:

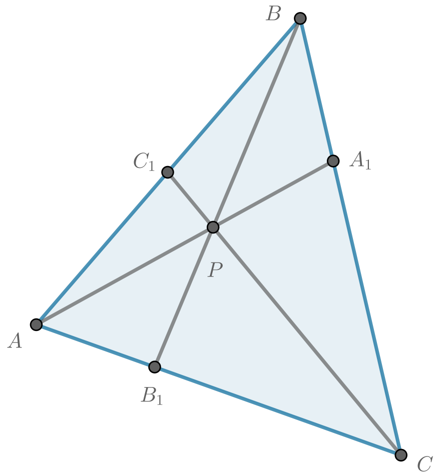
$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$



11.2 Теорема Чевы

Если AA_1, BB_1 и CC_1 — чевианы, пересекающиеся в одной точке, то для них выполнено следующее соотношение:

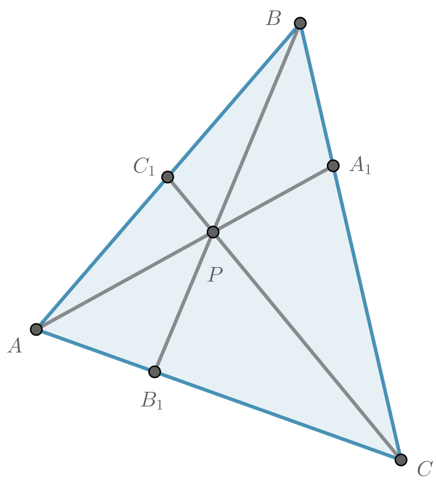
$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$



11.3 Теорема Ван-Обеля

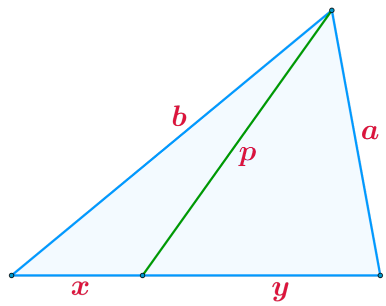
Если AA_1, BB_1 и CC_1 — чевианы, пересекающиеся в одной точке, то для них выполнено следующее соотношение:

$$\frac{BP}{PB_1} = \frac{BC_1}{C_1A} + \frac{BA_1}{A_1C}$$



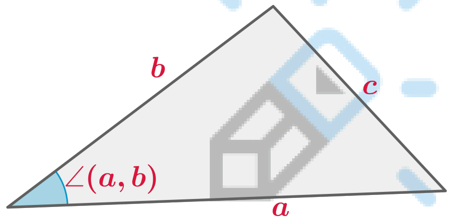
11.4 Теорема Стюарта

$$p^2 = a^2 \cdot \frac{x}{x+y} + b^2 \cdot \frac{y}{x+y} - xy$$



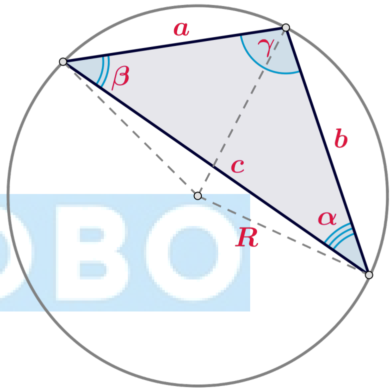
11.5 Теорема косинусов

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \angle(a, b)$$



11.6 Теорема синусов

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

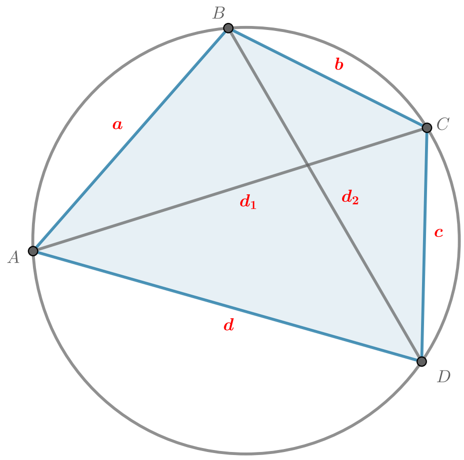


ШКОЛКОВО

11.7 Теорема Птолемея

Во вписанном четырехугольнике произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон.

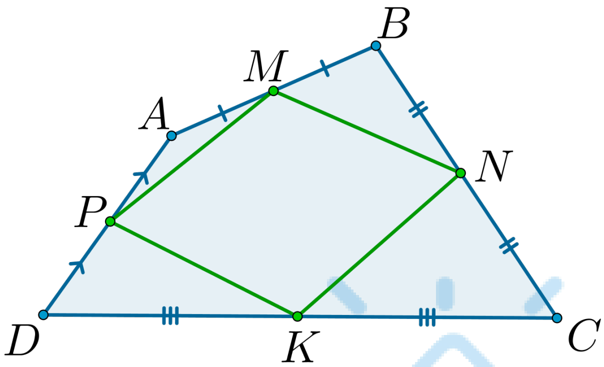
$$d_1 d_2 = ac + bd$$



12 Крутые факты планиметрии

12.1 Параллелограмм Вариньона

Середины сторон выпуклого четырехугольника являются вершинами параллелограмма.
$PMNK$ – параллелограмм.

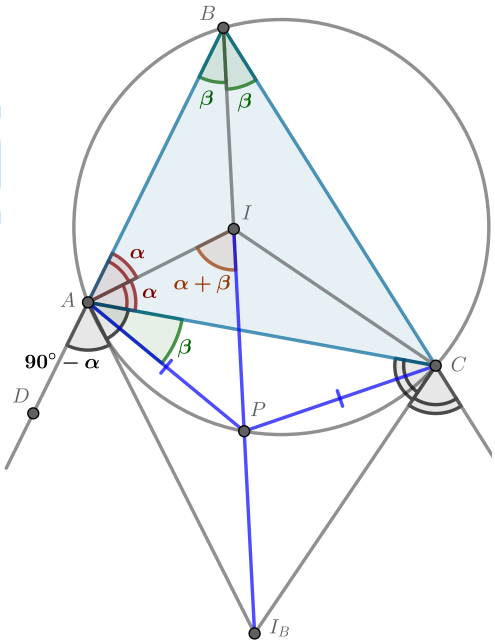


12.2 Лемма о трезубце

В треугольнике ABC биссектриса угла B пересекает описанную окружность в точке P. I — центр вписанной окружности, I_B — центр вневписанной окружности, касающейся стороны AC треугольника. Тогда P равноудалена от точек A, C, I, I_B.

Доказательство

BP — биссектриса $\Rightarrow$ P — середина соответствующей дуги AC $\Rightarrow$ она равноудалена от концов дуги, значит, $\boldsymbol{PA = PC}$. Обозначим $\frac{1}{2}\angle A = \alpha$, $\frac{1}{2}\angle B = \beta$. $\angle PAC = \angle PBC = \beta$, т.к. опираются на дугу PC. $\angle AIP = \angle IAB + \angle ABI = \alpha + \beta$ как внешний в треугольнике ABI. Получили в треугольнике $AIP : \angle PAI = \angle PAC + \angle CAI = \alpha + \beta = \angle AIP \Rightarrow \boldsymbol{AP = PI}$.
Центр вневписанной окружности I_B является пересечением внешних биссектрис, значит, $\angle DAI_B = \frac{1}{2}(180° - \angle CAB) = \frac{1}{2}(180° - 2\alpha) = 90° - \alpha = \angle I_BAC$.
Тогда $\angle I_BAI = \angle I_BAC + \angle CAI = (90° - \alpha) + \alpha = 90°$.
$\angle I_BAP = \angle I_BAI - \angle PAI = 90° - (\alpha + \beta)$.
Из треугольника $AII_B : \angle II_BA = 90° - \angle AII_B = 90° - (\alpha + \beta)$.
Получили $\angle I_BAP = \angle II_BA \Rightarrow \boldsymbol{PA = PI_B}$.



12.3 Прямая Симсона

Дан треугольник ABC. Из точки P опущены перпендикуляры PA_1, PB_1, PC_1 на прямые BC, AC, AB соответственно. Точка P лежит на описанной окружности треугольника $\Leftrightarrow$ точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.

NB При доказательстве будем считать, что P лежит внутри одного из острых углов треугольника, не умаляя общности, будем считать A таким углом. В дальнейшем мы будем пользоваться данной теоремой только для доказанных случаев, но важно понимать, что верна также общая формулировка, приведенная выше.

Доказательство

$\Rightarrow$) Пусть P лежит на меньшей дуге BC описанной окружности. Докажем, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.

Напомним, что мы считаем, что угол $\angle A = \alpha$ — острый. Обсудим расположение точек A_1, B_1 и C_1. A_1 лежит на отрезке BC, т.к. дуга, на которой лежит P, меньше полуокружности.

Пусть C_1, не умаляя общности, лежит на продолжении AB. Тогда B_1 лежит на AC.

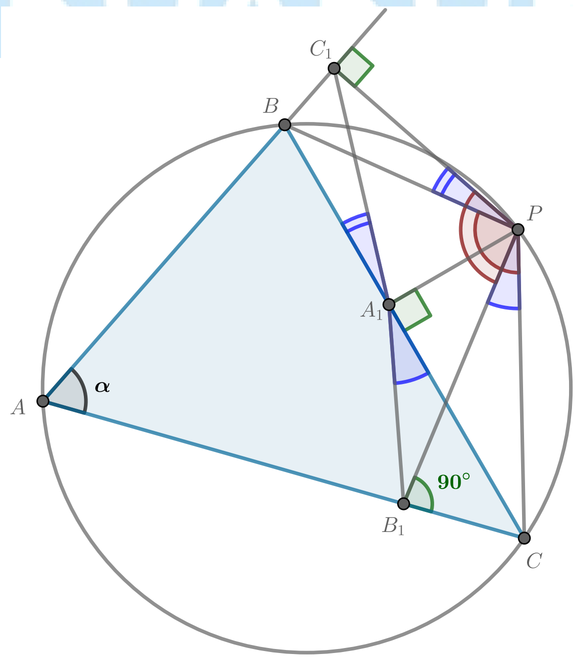
Докажем от противного. Пусть B_1 лежит на продолжении AC за точку C. $ABPC$ — вписанный $\Rightarrow \angle BPC = 180° - \angle CAB = 180° - \alpha$. AC_1PB_1 также вписанный, т.к. $\angle PB_1A + \angle PC_1A = 90° + 90° = 180°$, поэтому $\angle C_1PB_1 = 180° - \angle B_1AC_1 = 180° - \alpha = \angle BPC$. При этом мы предположили, что обе точки лежат на продолжениях, тогда $\angle BPC$ лежит полностью внутри $\angle C_1PB_1 \Rightarrow \angle BPC < \angle C_1PB_1$. Получили противоречие.

Теперь порядок точек на картинке фиксирован.

BC_1PA_1 вписанный, т.к. $\angle BC_1P + \angle BA_1P = 90° + 90° = 180°$. Из вписанности $\angle C_1PB = \angle C_1A_1B$.

B_1CPA_1 вписанный, т.к. $\angle CB_1P = \angle CA_1P = 90°$. Из вписанности $\angle CPB_1 = \angle CA_1B_1$.

Выше было доказано, что $\angle C_1PB_1 = 180° - \alpha = \angle BPC$. $\angle C_1PB = \angle C_1PB_1 - \angle BPB_1 = \angle BPC - \angle BPB_1 = \angle B_1PC$. Тогда все четыре уголка, обозначенные синим на картинке, равны между собой, в частности $\angle C_1A_1B = \angle B_1A_1C$. BA_1C — одна прямая, тогда и $C_1A_1C_1$ тоже одна прямая.



$\Leftarrow$) Пусть для некоторой точки P точки A_1, B_1, C_1 оказались на одной прямой. Докажем, что точка P лежит на описанной окружности, т.е. четырехугольник $ABPC$ — вписанный.

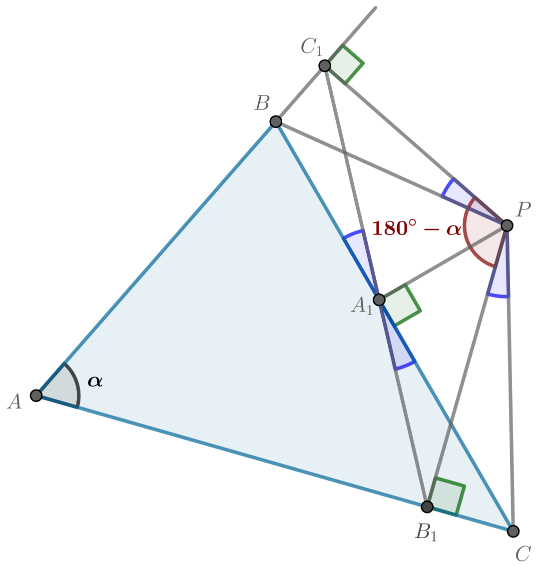
BC_1PA_1 вписанный, т.к. $\angle BC_1P + \angle BA_1P = 90° + 90° = 180°$. Из вписанности $\angle C_1PB = \angle C_1A_1B$.

B_1CPA_1 вписанный, т.к. $\angle CB_1P = \angle CA_1P = 90°$. Из вписанности $\angle CPB_1 = \angle CA_1B_1$.

Также $\angle B_1A_1C = \angle C_1A_1B$ как вертикальные, тогда все четыре уголка, обозначенные синим на картинке, равны между собой, в частности $\angle C_1PB = \angle B_1P_1C$.

Пусть $\angle CAB = \alpha$. AC_1PB_1 также вписанный, т.к. $\angle PB_1A + \angle PC_1A = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, поэтому $\angle C_1PB_1 = 180^\circ - \angle B_1AC_1 = 180^\circ - \alpha$.

$180^\circ - \alpha = \angle C_1PB_1 = \angle C_1PB + \angle BPB_1 = \angle B_1PC + \angle BPB_1 = \angle BPC$. Тогда в четырехугольнике $ABPC$: $\angle CAB + \angle BPC = 180^\circ \Rightarrow$ точка P лежит на описанной окружности ABC.



ШКОЛКОВО