Теоретический минимум по №18

Содержание

1 Среднее арифметическое

Определение *Средним арифметическим* n чисел является отношение суммы S этих чисел к их количеству.

$$m = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \frac{S}{n}$$

Во многих задачах намного удобнее работать с суммами чисел, чем со средними арифметическими. Выразив сумму из формулы выше, получим

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = mn,$$

то есть сумма чисел равна произведению их количества и их среднего арифметического.

Факт 1 Любой член произвольной арифметической прогрессии равен среднему арифметическому соседних членов.

Доказательство
Пусть b разность прогрессии, тогда

$$a_{k-1} = a_k - b, \quad a_{k+1} = a_k + b \quad \Rightarrow \quad \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2} = \frac{(a_k - b) + (a_k + b)}{2} = a_k$$

Факт 2 Пусть имеется набор из n чисел со средним арифметическим, равным m. Тогда после добавления в набор числа, **меньшего**, чем m, среднее арифметическое чисел набора **уменьшится**.

Доказательство
Обозначим добавленное число через a. Сумма чисел исходного набора равна mn, тогда сумма чисел набора после добавления равна $mn + a$. Нужно доказать, что неравенство

$$m > \frac{mn + a}{n + 1}$$

выполняется для любого $a < m$. Равносильными переходами получаем

$$m(n+1) > mn + a \quad \Leftrightarrow \quad mn + m > mn + a \quad \Leftrightarrow \quad m > a$$

что является верным неравенством.

Факт 3 Пусть имеется набор из n чисел со средним арифметическим, равным m. Тогда после добавления в набор числа, **большего**, чем m, среднее арифметическое чисел набора **увеличится**.

Доказательство
Аналогично предыдущему.

2 Идея минимальной суммы

Задача ЕГЭ, 2017 (*18*)
На доске написано 100 различных натуральных чисел, причем известно, что сумма этих чисел равна 5120.
а) Может ли оказаться, что на доске написано число 230?
б) Может ли оказаться, что на доске нет числа 14?
в) Какое наименьшее количество чисел, кратных 14, может быть на доске?

Ответ

а) Нет, не может

б) Нет, не может

в) 4

Решение

Известно, что сумма первых n последовательных натуральных чисел равна

$$S_n = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Когда в задаче сказано что-то о сумме некоторых чисел, можно попробовать рассмотреть наименьшую из возможных сумм этих чисел.

а) Рассмотрим наименьшую возможную сумму S, содержащую число 230. Она состоит из наименьших 99 натуральных чисел и числа 230.

$$S = S_{99} + 230 = \frac{99 \cdot 100}{2} + 230 = 5180 > 5130$$

Следовательно, получаем противоречие.

б) Допустим, число 14 не написано на доске, возьмем 100 минимальных натуральных чисел, которые еще доступны. Их сумма равна

$$S = S_{101} - 14 = \frac{101 \cdot 102}{2} - 14 = 5137$$

Очевидно, что какие бы числа ни были написаны на доске, их сумма будет не меньше S. Но $S > 5130$, следовательно, получаем противоречие.

в) В пункте б) мы доказали, что как минимум одно число, кратное 14, написано на доске. Допустим, на доске оказалось написано ровно два числа a и b, кратных 14. Тогда сумма на доске не меньше, чем $S + a + b$, где S — наименьшая возможная сумма 98 различных натуральных чисел, ни одно из которых не кратно 14. Фактически она равна сумме наименьших 98 различных натуральных чисел, не кратных 14. Ее легко посчитать (семь наименьших чисел, кратных 14, это 14, 28, 42, 56, 70, 84, 98)

$$S = \frac{105 \cdot 106}{2} - (14 + 28 + 42 + 56 + 70 + 84 + 98) = 5173 > 5120 \quad \Rightarrow \quad S + a + b > 5120$$

Получаем противоречие.

Допустим, на доске оказалось написано ровно три числа a, b и c, кратных 14. Тогда сумма на доске не меньше, чем $S + a + b + c$, где S — наименьшая возможная сумма 97 различных натуральных чисел, ни одно из которых не кратно 14. Фактически она равна сумме наименьших 97 различных натуральных чисел, не кратных 14. Ее легко посчитать (семь наименьших чисел, кратных 14, это 14, 28, 42, 56, 70, 84, 98)

$$S = \frac{104 \cdot 105}{2} - (14 + 28 + 42 + 56 + 70 + 84 + 98) = 5068$$

Это на 52 меньше, чем сумма в условии, но $a+b+c \geqslant 14+28+42 = 84$. Снова получаем, что $S+a+b+c > 5120$. Таким образом мы доказали, что чисел, кратных 14, должно быть хотя бы 4.

Приведем пример, когда на доске написано четыре числа, кратных 14 (14, 28, 42 и 56): 1, 2, …, 69, 71, …, 83, 85, …, 97, 99, 100, 101, 102, 119. Их сумма равна

$$S = \frac{102 \cdot 103}{2} - (70 + 84 + 98) + 119 = 5120$$

3 Инвариант

Инвариант — это некоторая величина или свойство, которое не меняется при каких-то преобразованиях или действиях, то есть что-то, что постоянно сохраняется.

Решим несколько вспомогательных задач.

1. Дана таблица 2×2. Изначально в ней записаны числа 1, 2, 3 и 4, как показано на картинке. Разрешается к любым двум числам, расположенным в соседних по стороне клетках, прибавить по единице. Может ли после некоторых действий сумма чисел в таблице стать равной 101?

1	2
4	3

Ответ

Нет, не может

Решение

Изначально сумма чисел в таблице равна $1 + 2 + 3 + 4 = 10$. После любого разрешенного действия сумма чисел в таблице увеличивается на 2, так как за одно действие мы можем прибавить по единице ровно к двум числам.

Таким образом, сумма чисел в таблице всегда будет четна, то есть никогда не будет нечетной, в том числе никогда не будет равна 101.

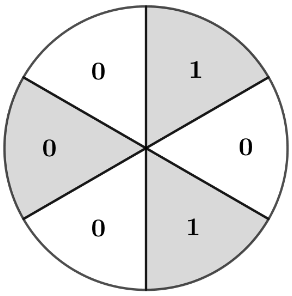
2. Круг разделен на 6 секторов, в которых по часовой стрелке стоят числа 1, 0, 1, 0, 0, 0. Разрешается прибавлять по единице к любым числам, стоящим в двух соседних секторах. Можно ли сделать все числа равными?

Ответ

Нет, нельзя

Решение

Закрасим в черный цвет сектора, которые расположены через один, начиная с сектора с числом 1. Получим такую раскраску:



Тогда сумма чисел, стоящих в черных секторах, изначально равна 2, а в белых секторах — 0. Следовательно, разность между суммами чисел в черных секторах и белых секторах равна 2.

Так как за один ход мы добавляем по единице одновременно в два соседних сектора, то есть по единице в черный и белый сектора, то разность между этими суммами по-прежнему будет равна 2.

Заметим, что если в какой-то момент окажется, что все числа стали равными, то разность между суммами чисел в черных и белых секторах должна равняться 0. Но мы доказали, что эта разность всегда равна 2, следовательно, числа во всех секторах нельзя сделать равными.

3. На острове живут 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. При встрече два хамелеона разного цвета одновременно меняют свой цвет на третий. Может ли случиться, что через некоторое время все хамелеоны станут одного цвета?

Ответ

Нет, не может

Решение

Предположим, что может, тогда распределение по цветам будет таким в некотором порядке:

$$45,\ 0,\ 0$$

Тогда будем следить за разностью между количеством бурых и количеством серых хамелеонов. Изначально она равна 2, то есть не кратна 3, а в конце равна 0, 45 или -45, то есть кратна 3.

Заметим, что за каждую операцию разность либо не меняется (если встретились серый и бурый), либо увеличивается на 3 (если встретились серый и малиновый), либо уменьшается на 3 (если встретились бурый и малиновый).

Тогда остаток при делении на 3 нашей разности не меняется и не может стать нулем. Следовательно, все хамелеоны не могут стать одного цвета.

Задача ЕГЭ, 2022 *(18)*

Есть три коробки: в первой коробке 64 камня, во второй — 77 камней, а в третьей коробке камней нет. За один ход берут по одному камню из любых двух коробок и кладут в оставшуюся. Сделали некоторое количество таких ходов.

а) Может ли в первой коробке оказаться 64 камня, во второй — 59 камней, а в третьей — 18 камней?

б) Может ли в третьей коробке оказаться 141 камень?

в) В первой коробке оказался 1 камень. Какое наибольшее число камней может оказаться в третьей коробке?

Ответ

а) Да, может

б) Нет, не может

в) 138

Решение

Заметим, что пункт б) этой задачи очень сильно похож на предыдущую задачу про хамелеонов, поэтому начнем с него.

б) Рассмотрим разность чисел камней во второй и первой коробках. Пусть в первой сейчас a камней, во второй b камней. Тогда разность равна $b - a$.

Если мы переложим два камня в первую коробку, то разность будет равна

$$(b-1)-(a+2)=b-a-3$$

Если мы переложим два камня во вторую коробку, то разность будет равна

$$(b+2)-(a-1)=b-a+3$$

Если мы переложим два камня в третью коробку, то разность будет равна

$$(b-1)-(a-1)=b-a$$

Мы получили, что после любой операции разность либо изменяется на 3, либо остается прежней, то есть после любых операций разность должна измениться на число, кратное 3.

Тогда если в третьей коробке после некоторых операций могли оказаться все $64+77+0=141$ камень, то в конце разность между количеством камней во второй и в первой коробках должна быть равна $0-0=0$.

Изначально разность была равна $77-64=13$, значит, она изменилась на $13-0=13$. Однако 13 не делится на 3, значит, в третьей коробке не мог оказаться 141 камень.

а) Покажем, как переместить ровно три камня из второй коробки в третью:

$$(64;77;0)\to(63;76;2)\to(62;75;4)\to(64;74;3)$$

За 6 раз такими операциями мы можем переместить 18 камней из второй коробки в третью. Значит, могло оказаться так, что в первой коробке лежат 64 камня, во второй — 59 камней, а в третьей — 18 камней.

в) Аналогично пункту б) мы можем доказать, что разность между любыми двумя коробками может измениться только на число, кратное 3.

Тогда посмотрим на изначальную разность между второй и первой коробками. Она равна $77-64=13$. По условию в первой коробке оказался 1 камень.

Найдем наименьшее количество $b\geqslant 0$ камней, которое могло оказаться во второй коробке. Так как разность изменяется на число, кратное 3, то имеем:

$$b-1=13+3k,\ k\in\mathbb{Z}\quad\Rightarrow\quad b=14+3k\quad\underset{b\geqslant 0}{\Rightarrow}\quad b\geqslant 2$$

Тогда в третьей коробке может быть не более $141-1-2=138$ камней.

Покажем, как можно добиться 138 камней ровно. Сначала научимся перемещать по 3 камня в третью коробку из каждой другой:

$$(64;77;0)\to(63;76;2)\to(62;75;4)\to(64;74;3)\to(63;73;5)\to(62;72;7)\to(61;74;6)$$

Заметим, что для того, чтобы можно было проделать такие операции, в первых двух коробках должно быть хотя бы 3 и 5 камней. Тогда мы можем делать такие операции, пока не дойдем до ситуации $(4;17;120)$.

Теперь будем перекладывать по 3 камня из второй коробки в третью:

$$(4;17;120)\to(4;14;123)\to(4;11;126)\to(4;8;129)\to(4;5;132)$$

Окончательно имеем:

$$(4;5;132)\to(3;4;134)\to(2;3;136)\to(4;2;135)\to(3;1;137)\to(2;0;139)\to(1;2;138)$$

4 Принцип крайнего

Под *принципом крайнего* в математике принято понимать рассуждения, в которых фигурируют объекты с экстремальными свойствами: самый большой, самый длинный, самый правый, и так далее. Эти свойства выбираются исходя из задачи. Собственно, именно в искусстве выбора таких свойств и состоит основная сложность таких задач.

Для начала рассмотрим следующую задачу.

4. На шахматной доске 8×8 стоит несколько ладей. Докажите, что какая-то из ладей бьет не более двух других.

Решение

Рассмотрим самую левую ладью, а если таких несколько — из них самую нижнюю. Рассматриваемая ладья, во-первых, не бьет ни одной фигуры слева от себя, иначе была бы более левая ладья, а также не бьет ни одной фигуры снизу, иначе мы бы выбрали ладью ниже. Поэтому такая ладья бьет не более двух других: сверху и справа.

Как видим, существование ладьи, бьющей не более двух других, вызывает вопросы, а вот существование самой левой ладьи, а из левых ладей — самой нижней, не вызывает никакого удивления. Тем самым мы искусно подменяем понятия и доказываем, что описанная выше ладья подходит под условие задачи.

А вот другой пример, где крайний объект выбирается по-другому. Общее правило выбора крайнего свойства такое: надо понять, где с большими шансами может находиться подходящий объект, а затем аккуратно сформулировать свойства такого объекта.

5. По кругу выписаны несколько чисел, каждое равно полусумме двух соседних. Докажите, что все числа равны.

Решение

Рассмотрим самое большое из выписанных чисел. Если таких несколько, то рассмотрим любое. Обозначим это число через b, а его соседей — через a и c. Тогда по условию $2b = a + c$. Но в силу выбора b мы имеем два неравенства: $b \geqslant a$ и $b \geqslant c$. Поэтому равенство $2b = a + c$ возможно только в случае, когда $a = b = c$. Продолжая рассуждения для числа c и его соседей b и d получаем, что следующее число d также равно наибольшему числу. Таким образом мы получим, что все числа равны между собой.

Разумеется, в данном случае отлично подходит и самое маленькое из чисел.

В следующем примере можно воспользоваться полуинвариантом, а можно решить задачу короче с помощью принципа крайнего. Рассмотрим именно второе решение.

6. Новая футбольная схема тренера Г. предлагает игрокам всегда при получении мяча делать пас ближнему, а самим не двигаться с места. Докажите, что если изначально все попарные расстояния между игроками различны, то рано или поздно какие-то двое будут передавать мяч друг другу.

Решение

Из всех игроков, до которых дошел мяч, выберем двух человек A и B, между которыми расстояние наименьшее. Тогда рано или поздно до кого-то из этих двух, в силу их выбора, дойдет мяч. В этот момент мяч будет переходить только от A к B и обратно: ведь из всех, до кого доходит мяч, у игрока A минимальное расстояние именно до B, и то же верно для игрока B по отношению к A. Значит, именно эти двое и будут передавать мяч друг другу.

Вот так можно выбирать объекты с экстремальными свойствами и за счет этого решать задачи. При это следует помнить, что здесь очень важно четко формулировать свойства рассматриваемого объекта, тогда решение будет следовать буквально из этих свойств.

5 Десятичная запись числа

Очень часто в задачах на теорию чисел приходится работать с одной или несколькими цифрами числа. Чтобы записать число, мы используем цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 — всего их десять.

Каждое число мы можем разложить на сумму разрядов, например, рассмотрим число 378:

$$378 = 3 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 8 \cdot 1$$

Научимся обозначать неизвестные нам числа в такой записи. Пусть есть двузначное число $\overline{ab}$. Черта сверху в этой записи обозначает то, что a и b — цифры такого двузначного числа, то есть $\overline{ab} = 10a + b$.

Сразу можно заменить, что так как число $\overline{ab}$ — двузначное, то $a \neq 0$.

Покажем, как можно представлять m-значное число n в таком виде:

$$n = \overline{a_{m-1} \ldots a_1 a_0} = a_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \ldots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$$

Таким образом, a_0 обозначает количество единиц числа n, a_1 — количество десятков числа n, a_2 — количество сотен и так далее.

7. У важного бизнесмена Пети есть сейф с паролем. К сожалению, этот пароль Петя забыл. Помнит он только, что это семизначное число, три первые цифры которого одинаковые, остальные четыре цифры также одинаковые. Сумма всех цифр этого пароля — число двузначное, первая цифра которого совпадает с первой цифрой пароля, а последняя — с последней. Помогите Пете подобрать пароль и открыть сейф.

Ответ

3337777

Решение

Так как первые три цифры пароля одинаковы, как и последние четыре, то обозначим этот пароль через $\overline{xxxyyyy}$.

Сумма цифр этого числа равна $3x + 4y$, и по условию это равно $\overline{xy}$. Значит, имеем равенство

$$3x + 4y = 10x + y \quad \Leftrightarrow \quad 3y = 7x$$

Так как 3 и 7 — взаимно простые числа, то y делится на 7. При этом цифра y равна 0 или 7.

Если $y = 0$, то x тоже равен 0, но тогда число $\overline{xy}$ не двузначное.

Если $y = 7$, то $x = 3$ и пароль 3337777 подходит.

Задача ЕГЭ, 2022 *(18)*

С трехзначным числом производят следующую операцию: вычитают из него сумму его цифр, а затем получившуюся разность делят на 3.

а) Может ли в результате такой операции получиться число 201?

б) Может ли в результате такой операции получиться число 251?

в) Сколько различных чисел может получиться в результате такой операции из чисел от 600 до 999 включительно?

Ответ

а) Да, может

б) Нет, не может

в) 40

Решение

Пусть взяли число $\overline{abc}$. Тогда из него получилось

$$\frac{\overline{abc} - (a + b + c)}{3} = \frac{100a + 10b + c - a - b - c}{3} = \frac{99a + 9b}{3} = 33a + 3b$$

а) Если в результате получилось число 201, то имеет место равенство

$$33a + 3b = 201 | : 3$$
$$11a + b = 67$$

Достаточно подобрать такие <u>цифры</u> a и b, чтобы равенство $11a + b = 67$ выполнялось. Пусть $a = 6$ и $b = 1$, тогда

$$11 \cdot 6 + 1 = 66 + 1 = 67$$

Цифра c ни на что не влияет, пусть $c = 0$, тогда $\overline{abc} = 610$:

$$\frac{610 - (6 + 1 + 0)}{3} = \frac{610 - 7}{3} = \frac{603}{3} = 201$$

б) Мы доказали, что результат будет равен $33a+3b$, если изначальное число равнялось $\overline{abc}$. Таким образом, должно выполняться равенство

$$33a+3b=251$$

$$3\cdot(11a+b)=251$$

Заметим, что число 251 не делится на 3 по признаку делимости, так как сумма цифр этого числа равна $2+5+1=8$, а 8 не кратно 3.

Таким образом, левая часть равенства делится на 3, а правая — не делится, следовательно, в результате не могло получиться 251.

в) Заметим, что получившееся число не зависит от последней цифры исходного числа, поэтому достаточно найти количество различных чисел, получающихся из чисел, делящихся на 10. Рассмотрим числа

$$100a+10b \quad \text{и} \quad 100x+10y,$$

где a, b, x и y — цифры и $a\neq 0$, $x\neq 0$. В результате операции из них получатся числа

$$33a+3b \quad \text{и} \quad 33x+3y$$

Разность этих чисел равна

$$33(a-x)+3(b-y)$$

Если $a\neq x$, то эта разность не может быть равной нулю, поскольку $|3(b-y)|\leqslant 27$.

Если $a=x$, то разность может быть равной нулю только при $b=y$, то есть если исходные числа совпадают.

Значит, в результате операции из различных трехзначных чисел, делящихся на 10, получаются различные числа.

Среди чисел от 600 до 999 ровно 40 чисел делятся на 10. Следовательно, в результате операции из чисел от 600 до 999 может получиться 40 различных чисел.

6 Основная теорема арифметики, НОД и НОК

6.1 Необходимые определения и ОТА

Определение Натуральное число p является *простым*, если оно имеет ровно два различных делителя: 1 и p.

NB Заметим, из данного определения следует, что число 1 **не является** простым. К тому же число 2 является **единственным четным простым** числом.

Определение *Наибольшим общим делителем* (НОД) двух чисел m и n называется наибольшее натуральное число, на которое делятся и m, и n. Допустимые обозначения: НОД(m,n); (m,n).

Аналогом слова «делится» является значок $\vdots$, то есть запись $a \vdots b$ означает, что a делится на b. Например, из определения выше очевидно, что $m \vdots (m,n)$ и $n \vdots (m,n)$.

Определение *Наименьшим общим кратным* (НОК) двух чисел m и n называется наименьшее натуральное число, которое делится и на m, и n. Допустимые обозначения: НОК(m,n); $[m,n]$.

Иными словами НОК — это наименьшее натуральное k такое, что $k \vdots m$ и $k \vdots n$.

Теорема *(Основная теорема арифметики или ОТА)*

Любое натуральное число $n>1$ единственным образом представимо в виде произведения степеней простых множителей, то есть

$$n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots p_k^{\alpha_k},\ \text{где } p_1<p_2<\ldots<p_k \text{ — простые числа, } \alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k \text{ — натуральные.}$$

Например, число 60 раскладывается так:

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

Менее формально можно сказать, что по ОТА любое натуральное число, кроме 1, раскладывается на простые множители единственным образом.

NB Разложение числа по ОТА, записанное выше, также называют *каноническим*.

Определение Два числа a и b называются *взаимно простыми*, если в их разложениях нет ни одного общего простого множителя. Очевидно, что данное определение взаимно простых эквивалентно следующему:

Определение Два числа a и b называются *взаимно простыми*, если их НОД равен 1.

6.2 Задачи на ОТА

8. Существует ли натуральное число с произведением цифр 2310?

Ответ

Не существует

Решение

Разложим число 2310 на простые множители, получим $2310 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$.

Допустим, что существует некоторое простое число, произведение цифр которого равно 2310, тогда, как видно по разложению на простые множители, произведение цифр должно делиться на 11. Однако ни одна ненулевая цифра не делится на 11, значит, такое невозможно.

NB Заметим, что нам было важно, что 11 является простым и не может быть разложено на более мелкие множители, следовательно, одна из цифр должна быть кратна 11, что приводит к противоречию.

9. Сколько существует пар простых чисел, которые отличаются друг от друга на 15?

Ответ

Единственная пара 2 и 17

Решение

Уже было замечено, что 2 — единственное четное простое число. Воспользуемся этим.

Пусть мы имеем $p_1 + 15 = p_2$. Допустим, p_1 нечетно, тогда левая часть равенства четна, следовательно, p_2 — некоторое четное простое, большее 15. Получаем противоречие. Остается случай, когда p_1 четно, то есть фактически равно 2. Получаем пару 2 и 17.

10. Разделите числа 2, 4, 6, 10, 22, 25, 40, 66 на две группы так, чтобы произведения в двух группах были равны. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ

Единственный допустимый способ:

$\mathrm{I}: \ 22 \cdot 6 \cdot 25 \cdot 2 \cdot 4$

$\mathrm{II}: \ 66 \cdot 10 \cdot 40$

Решение

Разложим каждое из чисел на простые множители:

$$\begin{aligned} 2 &= 2, & 4 &= 2^2 \\ 6 &= 2 \cdot 3, & 10 &= 2 \cdot 5 \\ 22 &= 2 \cdot 11, & 25 &= 5^2 \\ 40 &= 2^3 \cdot 5, & 66 &= 2 \cdot 3 \cdot 11 \end{aligned}$$

Заметим, что равенство произведений чисел в группах равносильно тому, что наборы простых множителей в них одинаковые. Будем постепенно формировать группы.

Числа 22 и 66 — единственные, содержащие в разложении множитель 11, следовательно, они должны быть помещены в разные группы. Для удобства назовем I группу с числом 22 и II группу с числом 66.

$$\text{I}:\ 2\cdot 11$$
$$\text{II}:\ 2\cdot 3\cdot 11$$

Заметим, что из оставшихся чисел только 6 содержит в разложении 3, причем группа II уже содержит 3, а I не содержит. Значит, число 6 должно оказаться в I группе.

$$\text{I}:\ (2\cdot 11)\cdot(2\cdot 3)$$
$$\text{II}:\ 2\cdot 3\cdot 11$$

Посмотрим на множитель 5. 10 и 40 содержат его в первой степени, 25 — во второй, следовательно, в одной из групп должно оказаться число 25, а в другой — пара чисел 10 и 40. Чтобы понять, что в какой группе, рассмотрим простой множитель 2. Во все числа в совокупности 2 входит в 10 степени, значит, итоговая степень 2 в каждой из групп должны быть равна 5. Пара 10 и 40 содержит 2 в 4 степени, если мы поместим ее в первую группу, степень двойки в ней составит уже $2+4=6$, то есть превысит 5. Остается единственный допустимый способ расположения по группам чисел, кратных 5.

$$\text{I}:\ (2\cdot 11)\cdot(2\cdot 3)\cdot\left(5^2\right)$$
$$\text{II}:\ (2\cdot 3\cdot 11)\cdot(2\cdot 5)\cdot\left(2^3\cdot 5\right)$$

Остались числа 2 и 4, их располагаем единственным подходящим способом в группу I, получаем итоговое разбиение. Заметим, что нигде не было альтернатив, мы просто «восстанавливали» ситуацию, то есть способ является единственным по построению.

$$\text{I}:\ (2\cdot 11)\cdot(2\cdot 3)\cdot\left(5^2\right)\cdot 2\cdot\left(2^2\right)=22\cdot 6\cdot 25\cdot 2\cdot 4$$
$$\text{II}:\ (2\cdot 3\cdot 11)\cdot(2\cdot 5)\cdot\left(2^3\cdot 5\right)=66\cdot 10\cdot 40$$

11. Прямоугольник с целыми длинами сторон разбит на двенадцать квадратов со следующими длинами сторон: 2, 2, 3, 3, 5, 5, 7, 7, 8, 8, 9, 9. Каков периметр прямоугольника?

Ответ

90

Решение

Найдем площадь S прямоугольника, она равна сумме площадей квадратов, на которые он разбит

$$S=2\cdot\left(2^2+3^2+5^2+7^2+8^2+9^2\right)=2\cdot(4+9+25+49+64+81)=464$$

Разложим на простые, получим $464=2^4\cdot 29$. Площадь равна произведению сторон, рассмотрим все возможные способы представления числа 464 в виде произведения двух множителей, пользуясь его разложением: $1\cdot 464$; $2\cdot 232$; $4\cdot 116$; $8\cdot 58$; $16\cdot 29$. Заметим, что в каждом представлении, кроме последнего, один из множителей меньше 9, то есть одна из сторон такого прямоугольника меньше 9. Это противоречит тому, что такой прямоугольник в своем разбиении содержит квадрат со стороной 9, значит, единственный возможный вариант достигается при длинах сторон 16 и 29. Периметр в таком случае равен 90.

6.3 Важные факты про НОК и НОД

Факт 1 a и b — натуральные числа. Их НОД обозначим (a, b), НОК обозначим $[a, b]$. Тогда выполняется соотношение

$$a \cdot b = (a, b) \cdot [a, b],$$

то есть произведение НОК и НОД равно произведению чисел.

Доказательство

Возьмем произвольное простое число p и докажем, что оно содержится в разложениях на простые левой и правой частей в одинаковой степени. Из этого будет сразу следовать равенство.

Пусть степень вхождения p в разложение на простые множители числа a равна α, в разложение b — β (α и β могут быть равны нулю). Тогда степень вхождения p в левую часть равна $\alpha + \beta$.

Степень вхождения p в (a, b) равна $\min(\alpha, \beta)$. Действительно, больше она быть не может, так как в этом случае одно из чисел не будет делиться на НОД, что противоречит определению, меньше она быть не может, так как возникает противоречие с максимальностью НОД. По аналогичным соображениям степень вхождения p в $[a, b]$ равна $\max(\alpha, \beta)$.

Итого имеем, что в левую часть p входит в степени $\alpha + \beta$, а в правую в степени $\min(\alpha, \beta) + \max(\alpha, \beta)$, но очевидно, что $\alpha + \beta = \min(\alpha, \beta) + \max(\alpha, \beta)$ для любых α и β. Следовательно для любого простого p верно, что оно входит в разложения обеих частей в равной степени, значит, равенство выполняется.

Факт 2 a и b — натуральные числа, их НОД равен d. Тогда $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$, то есть такие числа взаимно просты.

Доказательство

Допустим противное, пусть $\left(\dfrac{a}{d}, \dfrac{b}{d}\right)$ делится на некоторое простое p. Тогда $\dfrac{a}{d} \vdots p$ и $\dfrac{b}{d} \vdots p$. Положим $d_1 = p \cdot d$. Тогда $a \vdots d_1$, $b \vdots d_1$, $d_1 > d$, получили противоречие с тем, что d — НОД a и b.

6.4 Формула для количества делителей числа

Лемма Пусть натуральное число n имеет канонический вид

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots p_k^{\alpha_k}, \text{ где } p_1 < p_2 < \ldots < p_k \text{ — простые числа, } \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \text{ — натуральные.}$$

Тогда общее количество D_n различных делителей числа n выражается формулой

$$D_n = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1)$$

Доказательство

Определим произвольный делитель d числа n как некоторое число, в разложение которого каждый простой множитель входит в степени не большей, чем степень вхождения этого простого множителя в разложение числа n. Это можно записать так

$$d = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots p_k^{\beta_k}, \text{ где } 0 \leqslant \beta_1 \leqslant \alpha_1,\ 0 \leqslant \beta_2 \leqslant \alpha_2,\ \ldots,\ 0 \leqslant \beta_k \leqslant \alpha_k$$

Таким образом, набор соответствующих β единственным образом задает делитель. Посчитаем количество таких наборов. Есть $\alpha_i + 1$ способов выбрать b_i из набора $0, 1, \ldots, \alpha_i$, каждое b_i выбирается независимо, перемножив, получаем нужную формулу.

6.5 Определения НОК и НОД для произвольного количества чисел

Определение *Наибольшим общим делителем* для набора из n чисел называется наибольшее натуральное число, на которое делится каждое число из набора.

Определение *Наименьшим общим кратным* для набора из n чисел называется наименьшее натуральное число, которое делится на каждое число из набора.

Задача формата ЕГЭ (*18*)

а) Приведите пример 5 различных натуральных чисел, расставленных по кругу так, что наименьшее общее кратное любых двух соседних чисел равно 105.

б) Можно ли расставить по кругу 8 различных натуральных чисел так, чтобы наименьшее общее кратное любых двух соседних чисел равнялось 300, а наибольший общий делитель любых трех подряд идущих чисел равнялся 1?

в) Какое наибольшее количество различных чисел можно расставить по кругу так, чтобы наименьшее общее кратное любых двух соседних чисел было равно 60?

Ответ

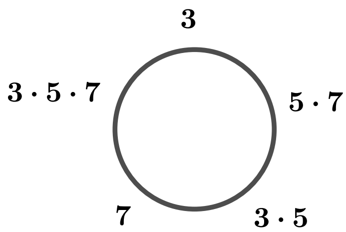
а) 3, 35, 15, 7, 105

б) Нет

в) 8

Решение

а) Разложим 105 на простые множители: $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$. Зная разложение, несложно подобрать нужные 5 чисел, например



б) Допустим, это возможно.

Возьмем произвольные соседние числа a и b, тогда $[a, b] = 300$. По определению $[a, b] \vdots a \quad \Rightarrow \quad 300 \vdots a$, аналогично для b. Значит, каждое число в кругу является делителем числа 300.

Разложим 300 на простые множители, получим $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$. Попробуем выделить среди делителей числа 300 те, которые точно не могут быть использованы.

Сразу можем исключить 1, так как с обеих сторон от нее должно стоять число 300, чтобы не нарушать условие про НОК соседей. Однако числа не могут повторяться.

Далее, рассмотрим делители 300, которые содержат 2 ровно в первой степени. Допустим, некоторое число $2t$, где t нечетно, стоит в кругу. Рассмотрим соседа s числа $2t$. По условию $[s, 2t] = 300 \vdots 4$, причем $2t$ не делится на 4, следовательно, $s \vdots 4$. Аналогично и второй сосед r числа $2t$ также делится на 4. По условию должно выполняться $(s, 2t, r) = 1$, однако $s \vdots 4$, $2t \vdots 2$, $r \vdots 4$, то есть их НОД должен быть четным. Получаем противоречие, значит, ни один из делителей числа 300 вида $2t$, где t нечетно, не мог быть использован.

Выпишем все оставшиеся делители, их 11

$$3,\ \underline{5},\ 2^2,\ 5^2,\ \underline{3 \cdot 5},\ 2^2 \cdot 3,\ \underline{2^2 \cdot 5},\ 3 \cdot 5^2,\ 2^2 \cdot 5^2,\ \underline{2^2 \cdot 3 \cdot 5},\ 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$$

Выделены те делители, которые содержат 5 ровно в первой степени. Их мы можем исключить по соображениям, аналогичным приведенным выше. Заметим, что нам было совершенно несущественно, что именно 2 входит в первой степени, и при замене 2 на произвольное простое число ничего не изменится. Итого, неисключенными остались $11-4=7$ чисел, а по кругу должны быть расставлены 8. Противоречие.

в) Допустим, мы имеем корректную расстановку на некоторое количество чисел. Возьмем произвольные соседние числа a и b, тогда $[a,b]=60$. По определению $[a,b]\,\vdots\, a \quad\Rightarrow\quad 60\,\vdots\, a$, аналогично для b. Значит, каждое число в кругу является делителем числа 60.

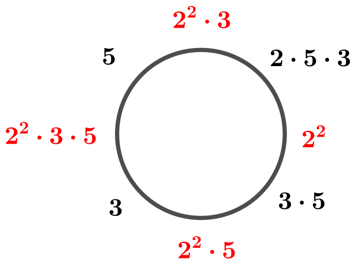
Разложим 60 на простые множители, получим $60=2^2\cdot 3\cdot 5$. Выпишем все его делители

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 2^2,\ 2\cdot 3,\ 2\cdot 5,\ 3\cdot 5,\ 2^2\cdot 3,\ 2^2\cdot 5,\ 2\cdot 3\cdot 5,\ 2^2\cdot 3\cdot 5$$

Получили 12 различных делителей. Проверить себя можно, посчитав количество делителей по формуле: $3\cdot 2\cdot 2=12$.

В каждой паре соседей НОК должен быть равен 60, а значит, кратен 4, следовательно, в каждой паре соседних хотя бы одно из чисел должно быть кратно 4, значит, не должно быть такого, что два числа подряд по кругу не делятся на 4. Получили, что хотя бы половина чисел в кругу кратна 4. Всего в нашем списке 4 числа, кратных 4, а значит общее количество чисел в кругу не превосходит 8.

Построим пример на 8 (красным для удобства восприятия обозначены числа, кратные 4).



7 Остатки

7.1 Что такое остаток?

Рассмотрим на примере остатка при делении на 3. Найдем остаток от 7 при делении на 3. Мы можем вычесть 3 из 7 два раза, таким образом, $7-3-3=1$, то есть 1 — остаток от 7 при делении на 3.

Из этого следует, что остатками при делении на 3 могут являться только числа 0, 1 и 2.

Определение *Остатком* числа a при делении на b называют такое число r, что $0\leqslant r<b$ и $a-r$ делится на b. Имеет место представление $a=kb+r$, где k — *неполное частное.*

Из определения остатка следует, что это целое неотрицательное число, меньшее делителя, то есть при делении, например, на 5 числа могут давать только остатки, равные 0, 1, 2, 3 или 4.

7.2 «Одеваем очки по модулю»

Итак, пусть на доске выписаны числа 0, 1, 2, 3 и так далее. Давайте «оденем очки по модулю» (именно «оденем»). Представим, что такие очки позволяют вместо числа видеть его остаток при делении на определенное число. Тогда если мы «оденем очки по модулю 3», то мы увидим следующее:

Без очков:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	…
В очках по модулю 3:	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	…

Таким образом, на числовой оси остатки располагаются циклично: 0, 1, 2 и так далее.

7.3 Арифметика остатков

Мы знаем, что числа можно складывать, вычитать и умножать. Эти же действия можно делать и с остатками. Важно: делить остатки нельзя!

То есть вместо того, чтобы работать с числами, можно проделывать арифметические операции с их остатками по определенному модулю.

Пример: найдем остаток числа $7 \cdot 5 + 10$ при делении на 3.

Конечно, можно честно посчитать:

$$7 \cdot 5 + 10 = 35 + 10 = 45 = 15 \cdot 3 \quad \Rightarrow \quad 45 \,\vdots\, 3 \quad \Rightarrow \quad \text{остаток} = 0$$

Но если бы числа были большими, то считать не очень хотелось бы. Вместо этого мы можем «одеть очки по модулю 3» и смотреть на остатки чисел: 7 дает остаток 1 при делении на 3, 5 дает остаток 2, 10 дает остаток 1. Тогда

$$1 \cdot 2 + 1 = 3 \,\vdots\, 3 \quad \Rightarrow \quad \text{остаток} = 0$$

8 Сравнения по модулю

8.1 Важнейшие свойства сравнений

Определение Целые числа a и b, разность которых делится на натуральное число m, называют *сравнимыми по модулю* m. Записывают так: $a \equiv b \pmod{m}$.

NB Для неотрицательных чисел определение можно интерпретировать так, что a и b дают равные остатки при делении на m.

Свойства сравнений

Везде ниже все числа целые, модуль m — натуральный.

- Сравнения можно умножать на число

$$a \equiv b \pmod{m} \quad \Rightarrow \quad ak \equiv bk \pmod{m}$$

- Сравнения можно складывать

$$\left.\begin{aligned} a \equiv b \pmod{m} \\ c \equiv d \pmod{m} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad a + c \equiv b + d \pmod{m}$$

- Сравнения можно перемножать

$$\left.\begin{aligned} a \equiv b \pmod{m} \\ c \equiv d \pmod{m} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad ac \equiv bd \pmod{m}$$

- Сравнения можно возводить в степень

$$a \equiv b \pmod{m} \quad \Rightarrow \quad a^k \equiv b^k \pmod{m}$$

8.2 А зачем нам вообще это нужно?

Фактически вышеперечисленные свойства позволяют нам удобнее работать с остатками и делимостью. К примеру, раньше, если нам нужно было вычислить остаток, который дает какое-то сложное выражения (содержащее операции умножения, сложения, вычитания и возведения в степень, скобки, все это в произвольном порядке) при делении на некоторое число, мы бы стали вычислять значение этого выражения и лишь в конце искать остаток результата. Теперь же мы можем заменить все числа на их остатки, что может существенно упростить вычисления, а также заменять результат на его остаток по ходу вычисления. Следующая задача иллюстрирует, что здесь имеется в виду.

12. Докажите, что число $1000 \cdot 1001 \cdot 1002 \cdot 1003 - 24$ делится на 999.

Решение

По сути, нам нужно доказать, что

$$1000 \cdot 1001 \cdot 1002 \cdot 1003 - 24 \equiv 0 \pmod{999}$$

Мы можем заменить любое число на сравнимое с ним по модулю 999, значит,

$$1000 \cdot 1001 \cdot 1002 \cdot 1003 - 24 \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 - 24 \equiv 0 \pmod{999}$$

8.3 Остатки отрицательных чисел

Остановимся чуть подробнее на остатках отрицательных чисел, потому что иногда на первый взгляд то, как они устроены, может показаться неинтуитивным.

Определение Определим *остаток* числа a по модулю m как наименьшее целое неотрицательное число, которое нужно **вычесть** из a, чтобы разность делилась на m.

Можно заметить связь этого определения с определением сравнимых по модулю чисел. По данному только что определению -7 дает остаток 3 по модулю 10, так как из -7 нужно вычесть минимум 3, чтобы разность делилась на 10; -99 дает остаток 1 по модулю 100, а -1 дает остаток $m-1$ по любому модулю m.

13. На какую цифру оканчивается число $9^{2015} + 7^{2016}$?

Ответ

0

Решение

Нам нужно найти, с чем сравнима данная сумма по модулю 10.

$$9 \equiv -1 \pmod{10} \quad \Rightarrow \quad 9^{2015} \equiv (-1)^{2015} \equiv -1 \pmod{10}$$
$$7 \equiv -3 \pmod{10} \quad \Rightarrow \quad 7^{2016} \equiv (-3)^{2016} \equiv 9^{1008} \equiv (-1)^{1008} \equiv 1 \pmod{10}$$

Получили что сумма сравнима с $-1 + 1 = 0$ по модулю 10, а значит, оканчивается нулем. Если какие-то сравнения в цепочках не до конца понятны, рекомендуется обратиться к основным свойствам и проверить по определению.

9 Признаки равноостаточности

9.1 Признаки равноостаточности по модулям 9 и 3

Формулировка: Число и его сумма цифр дают одинаковые остатки при делении на 3/на 9. В частности, число делится на 3/на 9 тогда и только тогда, когда сумма цифр числа делится на 3/на 9.

14. Дано число 237581. Найдите его остаток при делении на 3.

Ответ

2

Решение

Можно начать делить это число в столбик, но это не очень удобно. Вместо этого можно посчитать сумму цифр этого числа и найти ее остаток при делении на 3:

$$2+3+7+5+8+1=(2+8)+(3+7)+(5+1)=10+10+6=26=8\cdot 3+2 \quad \Rightarrow \quad \text{остаток}=2$$

Почему это работает? Рассмотрим число 7581 и рассмотрим его десятичную запись:

$$7581=7\cdot 1000+5\cdot 100+8\cdot 10+1$$

Теперь «оденем очки по модулю 3» и смотрим только на числа 1000, 100 и 10. Тогда

$$\begin{aligned} &10=9+1 \quad \Rightarrow \quad \text{остаток}=1 \\ &100=99+1 \quad \Rightarrow \quad \text{остаток}=1 \\ &1000=999+1 \quad \Rightarrow \quad \text{остаток}=1 \end{aligned}$$

Тогда мы увидим

$$7\cdot 1+5\cdot 1+8\cdot 1+1=7+5+8+1$$

Значит, само число и его сумма цифр дают одинаковые остатки при делении на 3. Для 9 тоже справедливо данное рассуждение, так как 9, 99 и 999 делятся на 9. Даже если число будет состоять из большего количества цифр, то числа 10000, 100000 и далее дают остаток 1 и при делении на 3, и при делении на 9.

Доказательство

Представим число в виде его десятичной записи $\overline{a_k a_{k-1}\ldots a_0}$. Хотим доказать, что

$$\overline{a_k a_{k-1}\ldots a_0}\equiv a_k+a_{k-1}+\ldots+a_0 \pmod 9 \quad \text{и} \quad \overline{a_k a_{k-1}\ldots a_0}\equiv a_k+a_{k-1}+\ldots+a_0 \pmod 3$$

Распишем

$$\overline{a_k a_{k-1}\ldots a_0}=a_k\cdot 10^k+a_{k-1}\cdot 10^{k-1}+\ldots+a_0\cdot 10^0$$

Несложно понять, что для любого целого неотрицательного i верно, что $10^i\equiv 1 \pmod 9$ и $10^i\equiv 1 \pmod 3$. Это следует, например, из свойства сравнений про возведение в степень. Тогда

$$a_k\cdot 10^k+a_{k-1}\cdot 10^{k-1}+\ldots+a_0\cdot 10^0\equiv a_k\cdot 1+a_{k-1}\cdot 1+\ldots+a_0\cdot 1\equiv a_k+a_{k-1}+\ldots+a_0 \pmod 9$$
$$a_k\cdot 10^k+a_{k-1}\cdot 10^{k-1}+\ldots+a_0\cdot 10^0\equiv a_k\cdot 1+a_{k-1}\cdot 1+\ldots+a_0\cdot 1\equiv a_k+a_{k-1}+\ldots+a_0 \pmod 3$$

9.2 Признаки равноостаточности по модулям 8 и 4

Формулировка: Любое натуральное число сравнимо с числом, образованным его последними тремя цифрами, по модулю 8.

Доказательство

Представим число в виде его десятичной записи $\overline{a_k a_{k-1}\ldots a_0}$. Хотим доказать, что

$$\overline{a_k a_{k-1}\ldots a_0}\equiv \overline{a_2 a_1 a_0} \pmod 8$$

Это равносильно следующему

$$\overline{a_k a_{k-1}\ldots a_2 a_1 a_0}-\overline{a_2 a_1 a_0}\equiv 0 \pmod 8 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{a_k a_{k-1}\ldots a_3 000}\equiv 0 \pmod 8$$

Последнее сравнение верно, так как любое число с тремя нулями на конце делится на 1000, а значит, и на 8.

Формулировка: Любое натуральное число сравнимо с числом, образованным его последними двумя цифрами, по модулю 4.

Доказательство этого признака аналогично предыдущему.

9.3 Признак делимости на 11

Формулировка: Число и его знакопеременная сумма цифр, посчитанная справа налево, дают одинаковые остатки при делении на 11.

Пусть дано число 7851. Тогда знакопеременная сумма справа налево равна

$$1-5+8-7=(1+8)-(5+7)=-3$$

Почему работает признак? Рассмотрим десятичную запись числа 7851:

$$7851=7\cdot 1000+8\cdot 100+5\cdot 10+1$$

Теперь поймем, что в «очках по модулю 3» мы можем видеть не только остатки по модулю 3. Например, если мы захотим, то вместо 7 мы можем видеть 4, так как 7 и 4 дают одинаковые остатки при делении на 3. Таким образом, вместо числа 7 мы можем увидеть любое число, дающее такой же остаток при делении на 3, что и 7. Поймем, что такие числа располагаются на расстоянии, кратном 3, друг от друга. Тогда если к числу 7 мы прибавим или вычтем что-то, что делится на 3, мы получим число с таким же остатком.

Теперь посмотрим на число 10 в «очках по модулю 11». Если мы захотим видеть остатки, то увидим 10, но это неудобно. Поэтому мы вычтем 11 из 10, тогда мы увидим число -1, которое дает такой же остаток при делении на 11, что и 10.

Посмотрим на число 100. Так как $100=99+1$, то 100 дает остаток 1 при делении на 11.

Посмотрим на число 1000. Заметим, что $1000=990+10$, значит, 1000 дает остаток 10 при делении на 11, следовательно, вместо него мы может увидеть -1. Тогда

$$7\cdot 1000+8\cdot 100+5\cdot 10+1 \underset{11}{\equiv} 7\cdot(-1)+8\cdot 1+5\cdot(-1)+1=-7+8-5+1$$

Таким образом, если нас просят найти остаток от числа при делении на 11, мы можем искать остаток знакопеременной суммы цифр, записанной справа налево, то есть, например, для числа 7851 нужно вычислить сумму $1-5+8-7$.

Если же у нас спрашивают, делится ли число на 11, то можно просто посчитать разность суммы цифр на четных местах и суммы цифр на нечетных, то есть, например, для числа 27851 можно посчитать либо разность $(1+8+2)-(5+7)$, либо разность $(5+7)-(1+8+2)$.

Задача формата ЕГЭ (*18*)

Назовем натуральное число хорошим, если в нем можно переставить цифры так, чтобы получившееся число делилось на 11.

а) Является ли число 1234 хорошим?

б) Является ли число 12345 хорошим?

в) Найти наибольшее хорошее число, состоящее из различных нечетных цифр.

Ответ

а) Да

б) Нет

в) 9753

Решение

Число делится на 11, если разность суммы цифр в нечетных разрядах и суммы цифр в четных делится на 11.

а) Чтобы число являлось хорошим, нам нужно переставить в нем цифры так, чтобы оно делилось на 11, то есть чтобы разность его суммы цифр в нечетных разрядах и суммы цифр в четных была кратна 11.

Попробуем сделать так, чтобы такая разность была равна 0. Заметим, что

$$(2+3)-(1+4)=0 \,\vdots\, 11$$

Тогда можем составить число 1243, которое по признаку делимости будет кратно 11. Проверим: $1243 = 11 \cdot 113$.

б) Проверим изначальное число 12345:

$$(1+3+5)-(2+4)=9-6=3 \not\vdots\, 11$$

Рассмотрим, какое значение может принимать разность суммы цифр в нечетных разрядах и суммы цифр в четных, если мы можем переставлять только цифры 1, 2, 3, 4 и 5. Пусть a, b, c, d и e — цифры 1, 2, 3, 4 и 5 в каком-то порядке. Тогда число $\overline{abcde}$ делится на 11, если

$$(a+c+e)-(b+d) \,\vdots\, 11$$

Оценим значение этого выражения. Оно максимально, если на нечетных местах стоят три наибольшие цифры, а на четных — две наименьшие, то есть

$$max=(5+4+3)-(2+1)=12-3=9$$

Аналогично оценим минимальное значение. Если на нечетных местах стоят три наименьшие цифры, а на четных — две наибольшие, то разность минимальна, то есть

$$min=(1+2+3)-(4+5)=6-9=-3$$

Значит, если из цифр 1, 2, 3, 4 и 5 можно составить число, которое делится на 11, то разность суммы цифр в нечетных разрядах и суммы цифр в четных должна быть равна 0.

Заметим, что среди цифр 1, 2, 3, 4 и 5 три нечетные цифры (1, 3 и 5) и две четные (2 и 4), значит, как бы мы ни складывали или как бы мы ни вычитали нечетные и четные цифры, главное то, что в нашем наборе нечетное количество нечетных цифр. Следовательно, в итоге

$$(a+c+e)-(b+d)\neq 0$$

Значит, 12345 не является хорошим числом.

в) Докажем, что число, составленное из всех пяти нечетных цифр, не будет делиться на 11. Предположим обратное, пусть такое число можно составить. Тогда оно состоит из пяти различных нечетных цифр, то есть это число является некоторой перестановкой цифр 1, 3, 5, 7 и 9.

Пусть это число $\overline{abcde}$. Тогда воспользуемся идеей из предыдущего пункта и оценим значение этого выражения:

$$max=(9+7+5)-(3+1)=17$$
$$min=(1+3+5)-(7+9)=-7$$

Таким образом, если число $\overline{abcde}$ делится на 11, то разность суммы его цифр на нечетных местах и суммы цифр на четных равна либо 0, либо 11.

Так как в этой разности участвуют только 5 нечетных цифр, то она всегда будет нечетной. Значит, если число $\overline{abcde}$ делится на 11, то разность суммы его цифр на нечетных местах и суммы цифр на четных местах должна быть равна 11.

Пусть $x = a + c + e$, а $y = b + d$. Тогда $x - y = 11$, а $x + y = a + b + c + d + e = 25$. Значит, можем составить систему:

$$\begin{cases} x + y = 25 \\ x - y = 11 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 18 \\ y = 7 \end{cases}$$

Заметим, что y никогда не может быть равно 7, так как y должно быть четным как сумма двух нечетных цифр. Тогда не существует числа, состоящего из всех пяти нечетных цифр, которое делится на 11.

Рассмотрим наибольшее четырехзначное число, состоящее из различных нечетных цифр. Это число 9753. Заметим, что

$$(9 + 3) - (7 + 5) = 0 \quad \Rightarrow \quad 9537 \,\vdots\, 11$$

Значит, число 9753 является хорошим, так как число 9537 кратно 11.

10 Теория игр. Симметричная стратегия

Определение Будем говорить, что у игрока есть *выигрышная стратегия*, если он может выиграть, как бы ни играл соперник. Собственно, сама стратегия будет заключаться в последовательности ответов на все возможные действия соперника.

Определение *Правильной игрой* называют игру, в которой каждый из игроков при наличии у него выигрышной стратегии действует согласно этой стратегии.

Рассмотрим эту стратегию на примере задачи.

15. В двух кучах лежит по 20 конфет. Двое игроков, Крош и Ёжик, по очереди берут любое количество конфет, но только из одной кучи. Начинает Крош. Выигрывает тот, кто берет последнюю конфету. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник?

Ответ

Ёжик

Решение

Приведем стратегию за Ёжика, позволяющую ему победить. Будем играть за Ёжика симметрично, то есть брать то же количество конфет, что и Крош, но из другой кучи. Покажем, почему у Ёжика всегда есть ход согласно этой стратегии.

Заметим, что после хода Ёжика, если он смог сходить, в кучках находится поровну конфет, то есть картинка симметрична. Значит, сколько бы конфет ни взял Крош из одной кучи, Ёжик всегда сможет взять столько же из другой.

Итак, мы доказали, что у Ёжика всегда есть ход согласно стратегии. Значит, Ёжик не может проиграть. Но игра когда-то закончится (например, не позже, чем через 40 ходов, ведь конфет в сумме всего 40, а каждым ходом берется хотя бы одна конфета). Поэтому кто-то все-таки проиграет. Это точно не Ёжик, поэтому проиграет Крош.

Самый главный момент, на который нужно обращать внимание, это независимость действий двух игроков. Играя за Ёжика, мы не можем предполагать, как будет действовать Крош, и ни в коем случае мы не должны оперировать понятиями «выгодно»-«не выгодно», так как этими словами мы обманываем сами себя, не приводя существенную часть доказательства.

Каждый абзац решения последовательно отвечает на свой вопрос: в первом мы привели стратегию, во втором — доказали, что всегда можно сделать ход согласно этой стратегии, в третьем — объяснили, почему в итоге данная стратегия приведет Ёжика к выигрышу. При этом мы **никак** не пытались предугадывать, как же будет играть Крош, так как нам нужно доказать, что Ёжик может выиграть при **любых** действиях его соперника.

В этой задаче мы воспользовались *симметричной стратегией,* то есть стратегией, которая опирается на предыдущий ход оппонента, и в некотором смысле «повторяет» его. Симметрия бывает очень разной, и совсем не обязательно, что симметричной стратегией пользуется второй игрок. Иногда бывает, что на месте первого игрока нужно сначала «подготовиться», а уже начиная со своего второго хода действовать симметрично. Об этом следующая задача.

16. Двое игроков, Крош и Ёжик, по очереди ставят шахматные ладьи на клетки доски 11×11, начинает Крош. Запрещено ставить ладью, если ее бьет одна из ранее поставленных. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник?

Ответ

Крош

Решение

Приведем за Кроша стратегию, позволяющую ему победить. Первым ходом поставим ладью в центральную клетку доски, а дальше будем ходить симметрично относительно этой клетки. Покажем, почему у Кроша всегда есть ход согласно этой стратегии.

Пусть до некоторого момента Крош мог ходить симметрично. Тогда перед ходом Ёжика картинка была симметрична относительно центральной клетки. Если Крош смог поставить ладью, то это значит, что и симметричная клетка до хода Ёжика была свободна и непобита ладьей. Осталось заметить, что ладья не может бить ладью, симметричную себе относительно центра, если она не стоит в центральном столбце или центральной строке. Значит, Крош сможет всегда сходить согласно своей стратегии.

Заметим при этом, что игра закончится не позже, чем через 121 ход, то есть когда все клетки будут заняты. Это значит, что кто-то все-таки проиграет. Мы доказали, что это не Крош, значит, проиграет Ёжик.

Важно обратить внимание на последний абзац. На самом деле мы чаще всего доказываем, что согласно стратегии у игрока, за которого мы играем, всегда будет ход. Это означает, что он **не проиграет**. Чтобы доказать, что он все-таки **выиграет**, нужно еще объяснять, почему игра закончится.