Теория по графике для №18 от «Школково»

Содержание

1 Окружность

1.1 Уравнение окружности и траектория движения центра окружности

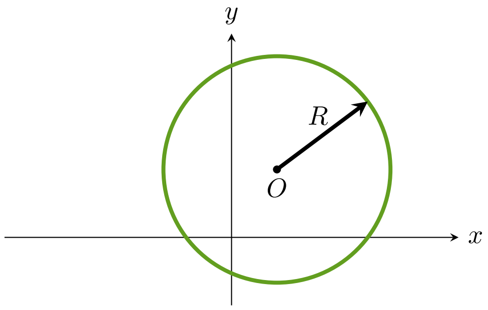
Рассмотрим уравнение

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a \quad (*)$$

При $a < 0$ это уравнение задает пустое множество, так как сумма квадратов двух выражений неотрицательна, то есть $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \geqslant 0$, следовательно, не может быть равна отрицательному числу.

При $a = 0$ это уравнение задает на координатной плоскости xOy единственную точку $O(x_0; y_0)$.

При $a > 0$ это уравнение задает окружность с центром в точке $O(x_0; y_0)$ и радиусом $R = \sqrt{a}$.



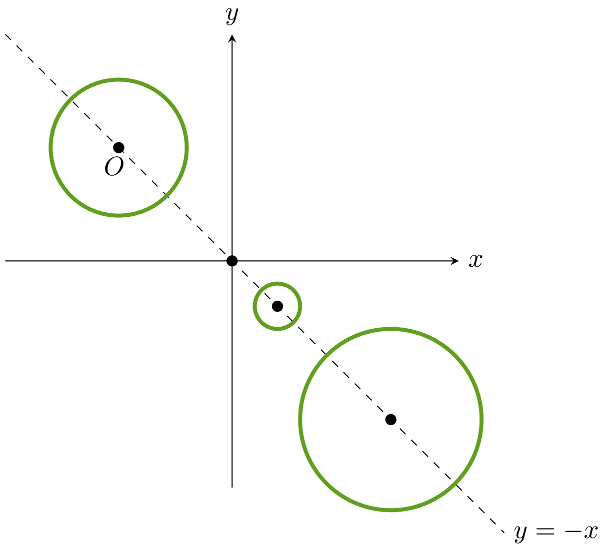
Рассмотрим несколько примеров.

• Пусть дано уравнение $x^2 - 6x + y^2 - 8y = 0$. В этом уравнении есть слагаемые x^2 и y^2, причем взятые с одинаковым знаком, следовательно, это уравнение можно привести к виду $(*)$. Для этого выделим полные квадраты:

$$(x^2 - 6x + 9) - 9 + (y^2 - 8y + 16) - 16 = 0$$
$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$$

Следовательно, это уравнение задает окружность с центром в точке $O(3; 4)$ и радиусом $R = 5$.

• $(x - 2a)^2 + (y + 2a)^2 = a^2$. Данное уравнение при $a = 0$ задает точку $O(0; 0)$, а при $a \neq 0$ задает окружность с центром в точке $O(2a; -2a)$ и радиусом $R = \sqrt{a^2} = |a|$. Заметим, что центр окружности, как и радиус, зависит от параметра. Центр окружности имеет координаты $x_0 = 2a$ и $y_0 = -2a$, следовательно, движется по прямой $y = -x$. При изменении a от $-\infty$ до $+\infty$ центр окружности движется по прямой слева направо, причем чем ближе центр окружности к началу координат (то есть чем ближе a по модулю к значению 0), тем меньше радиус окружности.

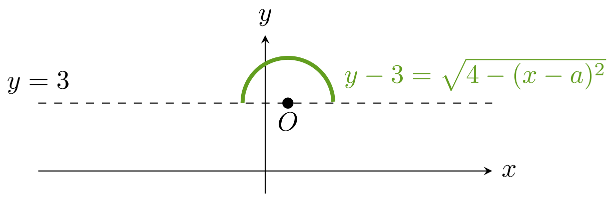


1.2 Уравнение верхней и нижней полуокружностей

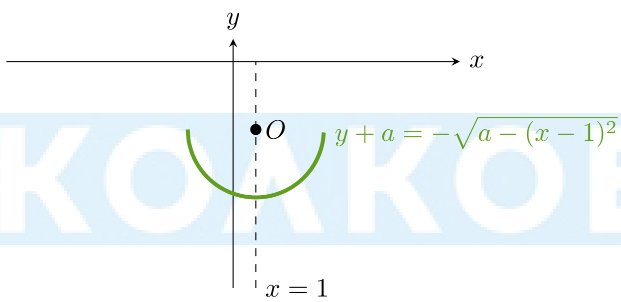
• Пусть $y-3=\sqrt{4-(x-a)^2}$. Это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} y-3\geqslant 0\\ (x-a)^2+(y-3)^2=4 \end{cases}$$

Следовательно, оно задает верхнюю полуокружность с центром в точке $O(a;3)$ и радиусом $R=2$. Центр полуокружности «скользит» по прямой $y=3$.



• Пусть $y+a=-\sqrt{a-(x-1)^2}$. Это уравнение при $a<0$ задает пустое множество, при $a=0$ задает точку $O(1;0)$, при $a>0$ задает нижнюю полуокружность с центром в точке $O(1;-a)$ и радиусом $R=\sqrt{a}$. Заметим, что при изменении a от 0 до $+\infty$ радиус полуокружности увеличивается, а центр полуокружности «скользит» по прямой $x=1$ при $y<0$ сверху вниз.



2 Пучок прямых

2.1 Откуда берется пучок прямых

Рассмотрим функцию $f(x)=a(x-2)+1$. Несложно видеть, что она линейна относительно x, и графиком такой функции при любом фиксированном значении параметра a будет прямая.

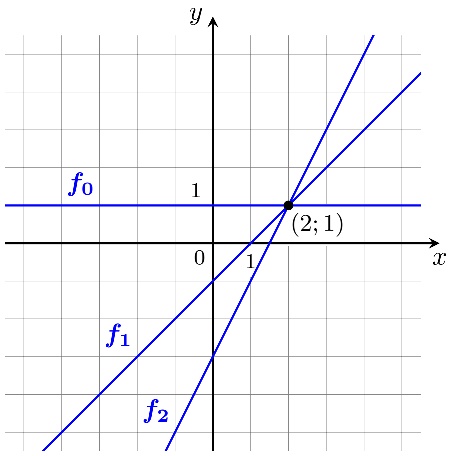
Теперь попробуем понять, как устроено всё **семейство** (то есть множество функций, которые могут быть получены при всех возможных значениях a) функций такого вида. Уже ясно, что это будет некоторое множество прямых на плоскости, но мы хотим знать больше. Построим графики трех функций

$$f_0(x)=0\cdot(x-2)+1=1;$$
$$f_1(x)=1\cdot(x-2)+1=x-1;$$
$$f_2(x)=2\cdot(x-2)+1=2x-3,$$

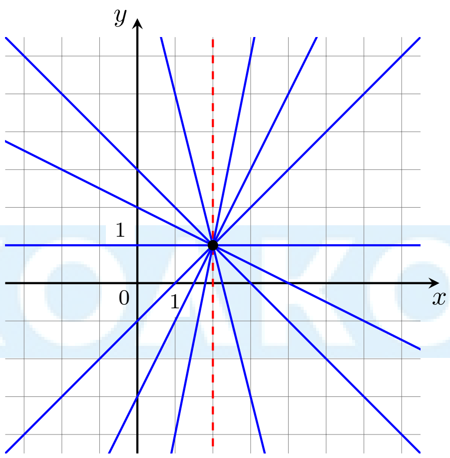
полученных подставлением соответствующего значения параметра a.

Замечаем, что все три прямые проходят через точку $(2;1)$. Докажем теперь, что любая прямая нашего семейства проходит через эту точку. Для этого подставим $x=2$ в нашу функцию, получим

$$f(2)=a(2-2)+1=1$$



То есть $f(2) = 1$ **независимо** от значения параметра a, и любая прямая нашего семейства проходит через точку $(2; 1)$. Так мы поняли, что наша функция с параметром задает **пучок прямых** на плоскости. Также важно отметить, что единственная прямая, которая проходит через точку $(2; 1)$, но не будет реализована — это вертикальная прямая $x = 2$.



2.2 Задача из ЕГЭ 2022

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \dfrac{xy^2 - 3xy - 3y + 9}{\sqrt{x+3}} = 0 \\ y = ax \end{cases}$$

имеет три решения.

Решение

Заметим, что уравнение $y = ax$ задает пучок прямых, проходящих через точку $(0; 0)$, причем каждому значению a соответствует ровно одна прямая этого пучка. Другими словами, параметр a отвечает за угол наклона прямой из пучка.

Система уравнений в нашей задаче означает то, что нам нужно изобразить на плоскости множество S решений первого уравнения, изобразить пучок прямых и посмотреть, при каких значениях параметра a прямая из пучка имеет ровно 3 точки пересечения с множеством S.

Решим первое уравнение. Сначала найдем ОДЗ:

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} \neq 0 \\ x + 3 \geqslant 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x > -3$$

Тогда при условии $x > -3$ дробь равна 0, если ее числитель равен 0, то есть

$$\begin{aligned}
&xy^2 - 3xy - 3y + 9 = 0\\
&xy \cdot (y-3) - 3 \cdot (y-3) = 0\\
&(y-3)(xy-3) = 0\\
&\left[\begin{aligned} &y = 3\\ &y = \frac{3}{x},\ \text{где } x \neq 0 \end{aligned}\right.
\end{aligned}$$

Заметим, что мы можем делить на x, так как $x = 0$ не является решением системы. Проверим это. Если $x = 0$, то

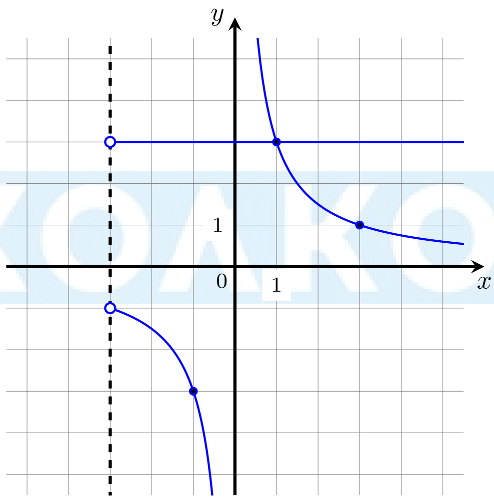
$$y = ax = a \cdot 0 = 0.$$

Тогда

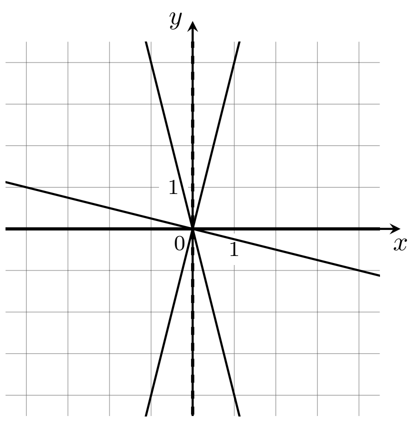
$$\frac{xy^2 - 3xy - 3y + 9}{\sqrt{x+3}} = \frac{0 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 9}{\sqrt{0+3}} = \frac{9}{\sqrt{3}} \neq 0$$

Значит, $x = 0$ не является решением системы и мы можем считать, что $x \neq 0$.

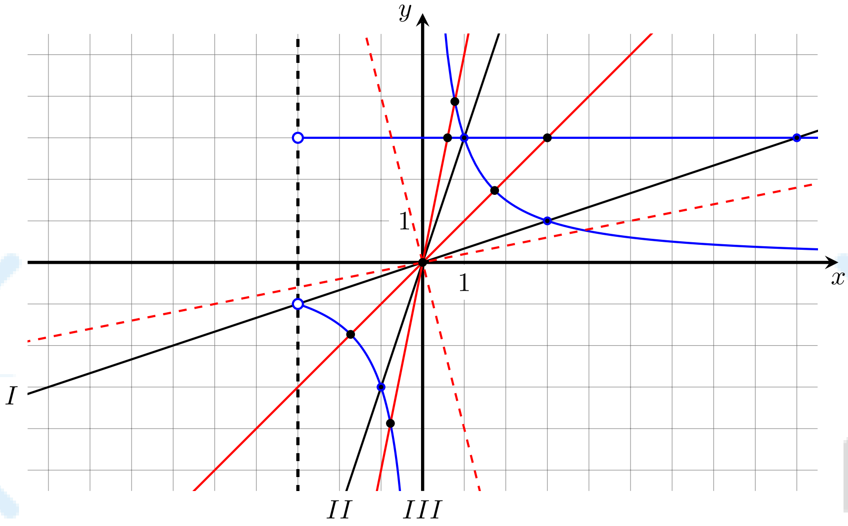
Изобразим множество S решений первого уравнения, учитывая ОДЗ:



Итак, подробнее рассмотрим пучок прямых, который задается уравнением $y = ax$. В это уравнение можно подставить любые значения параметра a и получить все возможные прямые, проходящие через точку $(0;0)$, кроме одной — прямой $x = 0$.



Теперь найдем такие прямые из пучка, которые пересекают множество S ровно в трех точках.



- Начнем с прямой I. Она имеет только две точки пересечения с S — $(3;1)$ и $(9;3)$, то есть не подходит нам.

- Вращать прямую из положения I по часовой стрелке до горизонтального положения не имеет смысла, так как у таких прямых тоже будет две точки пересечения с S.

- Горизонтальная прямая, совпадающая с осью абсцисс, точно не подойдет, так как множество S не имеет общих точек с ней.

- Тогда будем вращать прямую из положения I против часовой стрелки. Пока мы не получим прямую II, наша прямая будем иметь ровно три точки пересечения с множеством S.

- Прямая II имеет только две точки пересечения с S — $(-1;-3)$ и $(1;3)$, то есть не подходит нам.

- Продолжим вращать прямую из положения II против часовой стрелки, пока мы не получим вертикальную прямую — прямую III. До этого момента наша прямая будем иметь ровно три точки пересечения с множеством S.

- Прямые пучка, которые лежат во II и IV четвертях, нам точно не подойдут, так как из множества S в этих четвертях лежит только часть горизонтальной прямой, то есть три решения получить нельзя.

Значит, нам нужно найти такие значения параметра a, при которых мы получим все прямые от I до II и от II до III.

Прямая I проходит через точки $(0;0)$ и $(3;1)$, а значит ее угловой коэффициент равен $\frac{1}{3}$.

Прямая II проходит через точки $(0;0)$ и $(1;3)$, а значит ее угловой коэффициент равен 3.

Далее все просто — от прямой II мы можем увеличивать значение a до бесконечности, приближаясь, но не доходя до вертикальной прямой III.

Значит, итоговый ответ: $a \in \left(\dfrac{1}{3}; 3\right) \cup (3; +\infty)$.

2.3 Задача про пучок прямых и полуокружность

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$ax + \sqrt{-7 - 8x - x^2} = 2a + 3$$

имеет единственное решение.

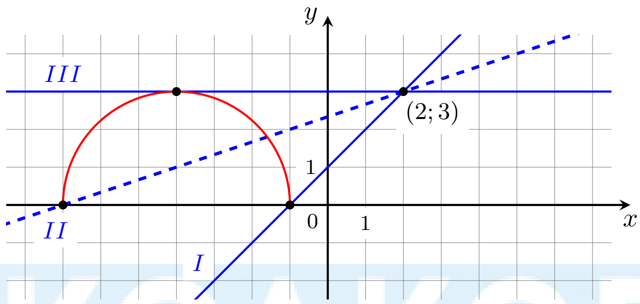
Решение

Преобразуем уравнение $$\sqrt{-7-8x-x^2} = -a(x-2)+3$$

Справа получили пучок прямых через точку $(2;3)$. Преобразуем левую часть

$$y = \sqrt{-7-8x-x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y^2 = -7-8x-x^2 \\ y \geqslant 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y^2 + x^2 + 8x + 16 = 9 \\ y \geqslant 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x+4)^2 + y^2 = 3^2 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

Это полуокружность, лежащая в верхней полуплоскости, с центром $(-4;0)$ и радиусом 3. Построим графики.



Очевидно, что положения прямой пучка **не** между I и III нам не подходят, потому что в таком случае прямые не пересекают полуокружность. Между положениями I и II, не включая положение II, будет ровно одна точка пересечения. Между положениями II и III, включая положение II, будет две точки пересечения. В положении III будет одна точка пересечения. Осталось найти значения a, соответствующие положениям I, II и III.

Положению III соответствует $a = 0$, так как радиус окружности равен расстоянию от точки $(2;3)$ до оси Ox, то есть касательная к полуокружности параллельна оси Ox.

В положении II прямая проходит через точку $(-7;0)$. Найдем a, подставив эту пару в уравнение прямой

$$-a(-7-2)+3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -\frac{1}{3}$$

В положении I прямая проходит через точку $(-1;0)$. Найдем a, подставив эту пару в уравнение прямой

$$-a(-1-2)+3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -1$$

Тогда ответ: $a \in \left[-1; -\frac{1}{3}\right) \cup \{0\}$.

3 Корыто

3.1 Упрощенная задача

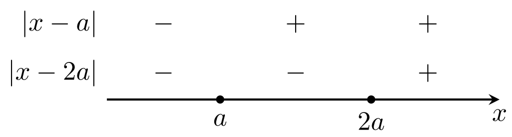
При каких положительных значениях параметра a уравнение

$$|x-a|+|x-2a|=a^2-a$$

имеет решения?

Решение

Обозначим $f(x)=|x-a|+|x-2a|$. Чтобы построить график функции f, сначала приведем ее к кусочно заданному виду, раскрыв модули. Первый модуль раскрывается с плюсом при $x\geqslant a$, с минусом при $x<a$. Второй модуль раскрывается с плюсом при $x\geqslant 2a$, с минусом при $x<2a$. Таким образом, мы понимаем, что знаки раскрытия модулей зависят только от положения x относительно нулей модулей — точек a и $2a$. По условию $a>0$, тогда выполняется $a<2a$, и схематично правило раскрытия модулей можно изобразить следующим образом:



Раскроем модули в зависимости от принадлежности x к одному из трех промежутков:

1. $x\in(-\infty;a) \quad\Rightarrow\quad f(x)=-(x-a)-(x-2a)=-2x+3a$
2. $x\in[a;2a] \quad\Rightarrow\quad f(x)=(x-a)-(x-2a)=a$
3. $x\in(2a;+\infty) \quad\Rightarrow\quad f(x)=(x-a)+(x-2a)=2x-3a$

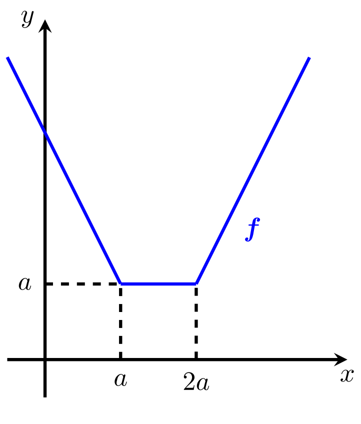
Резюмируя, получим

$$f(x)=|x-a|+|x-2a|=\begin{cases}-2x+3a, & x<a\\ a, & a\leqslant x\leqslant 2a\\ 2x-3a, & x>2a\end{cases}$$

Видим, что на промежутках 1 и 3 функция f линейная, а на промежутке 2 — константа. Таким образом, на первом промежутке функция убывает, так как угловой коэффициент $-2<0$; на втором ее график параллелен оси абсцисс, а на третьем функция возрастает, так как угловой коэффициент $2>0$. Найдем значения f в точках излома. Заметим, что неважно, к какому из промежутков относить точки излома!

$$(a)=a=-2a+3a,\quad f(2a)=a=2\cdot 2a-3a$$

Наконец построим график нашего «корыта»



В правой части уравнения имеем константу $a^2 - a$, ей соответствует горизонтальная прямая $y = a^2 - a$. Очевидно, что уравнение имеет решения, то есть имеет пересечения с корытом, только когда эта прямая проходит не ниже дна корыта. Это условие описывается неравенством

$$a^2 - a \geqslant a \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - 2a \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$$

Пересекая с условием, что a положительно, получаем ответ: $a \in [2; +\infty)$.

3.2 Задача из ЕГЭ 2021

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$a|x+1| + (1-a)|x-1| + 2 = 0$$

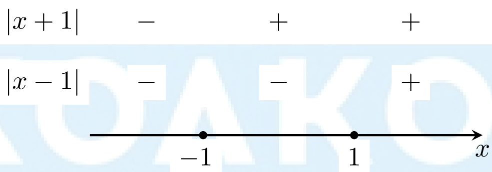
имеет ровно два различных корня.

Решение

Преобразуем исходное уравнение к виду

$$f(x) = a|x+1| + (1-a)|x-1| = -2$$

Рассмотрим случаи раскрытия модулей, чтобы привести функцию к кусочно-заданному виду:



Раскроем модули в зависимости от принадлежности x к одному из трех промежутков:

1. $x \geqslant 1 \quad \Rightarrow \quad f(x) = a \cdot (x+1) + (1-a) \cdot (x-1) = x + 2a - 1$
2. $x \in [-1; 1) \quad \Rightarrow \quad f(x) = a \cdot (x+1) - (1-a)(x-1) = x \cdot (2a-1) + 1$
3. $x < -1 \quad \Rightarrow \quad f(x) = -a \cdot (x+1) - (1-a) \cdot (x-1) = -x - 2a + 1$

Резюмируя, получим

$$f(x) = a|x+1| + (1-a)|x-1| = \begin{cases} -x - 2a + 1, & x < -1 \\ (2a-1)x + 1, & -1 \leqslant x < 1 \\ x + 2a - 1, & x \geqslant 1 \end{cases}$$

Найдем координаты точек излома функции f :

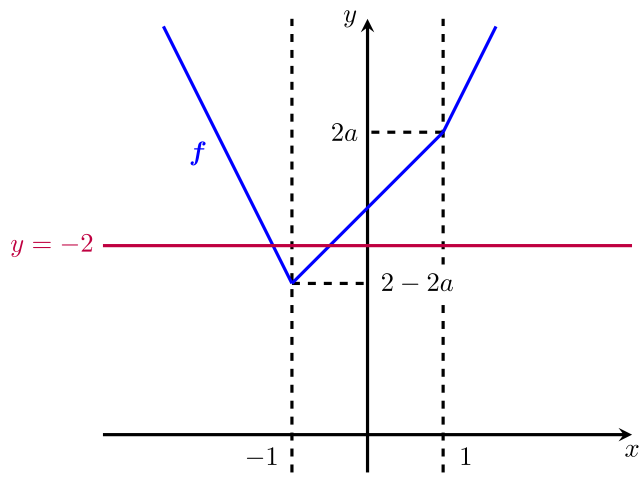
$$f(1) = x + 2a - 1 = 1 + 2a - 1 = 2a$$
$$f(-1) = (2a-1)x + 1 = (2a-1)(-1) + 1 = -2a + 1 + 1 = 2 - 2a$$

Мы получили, что на первом промежутке функция линейная возрастающая, на третьем — линейная убывающая. На втором промежутке $[-1; 1]$ функция также линейная. Более того, коэффициент при x зависит от параметра a, поэтому заранее мы не знаем, убывает или возрастает наша функция на втором промежутке. Рассмотрим три возможных случая.

- Функция возрастает на отрезке $[-1;1]$, то есть

$$2a-1>0 \quad \Leftrightarrow \quad a>\frac{1}{2}$$

В этом случае график примет следующий вид (оси изображены для удобства, мы не знаем, как график будет располагаться относительно них и не пользуемся этим):



Таким образом, уравнение будет иметь ровно два различных решения, если горизонтальная прямая $y=-2$ проходит выше левой точки излома графика, то есть

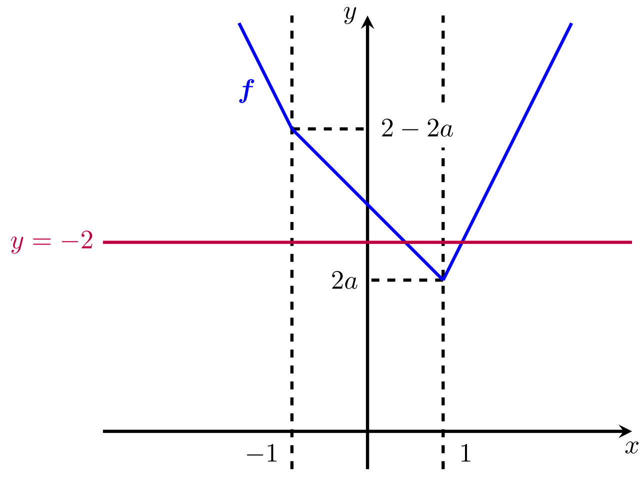
$$-2>-2a+2 \quad \Leftrightarrow \quad a>2$$

Пересекая с условием $a>\frac{1}{2}$, получаем $a\in(2;+\infty)$.

- Функция убывает на отрезке $[-1;1]$, то есть

$$2a-1<0 \quad \Leftrightarrow \quad a<\frac{1}{2}$$

В этом случае график примет следующий вид (оси изображены для удобства, мы не знаем, как график будет располагаться относительно них и не пользуемся этим):



Таким образом, уравнение будет иметь ровно два различных решения, если горизонтальная прямая $y=-2$ проходит выше правой точки излома графика, то есть $-2>2a \quad \Leftrightarrow \quad a<-1$.

Пересекая с условием $a < \dfrac{1}{2}$, получаем $a \in (-\infty; -1)$.

- Коэффициент при x зануляется, то есть $2a - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{2}$. Подставив это значение параметра в исходное уравнение, получим
$$\frac{1}{2}|x+1| + \frac{1}{2}|x-1| = -2$$
Левая часть этого уравнения неотрицательна, так как является суммой двух модулей, а правая отрицательна. Значит, при таком значении a уравнение не имеет решений, и это значение a нам не подходит.

Объединив найденные значения a, получим ответ: $a \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

4 Объединение двух кусков парабол

4.1 Общая теория

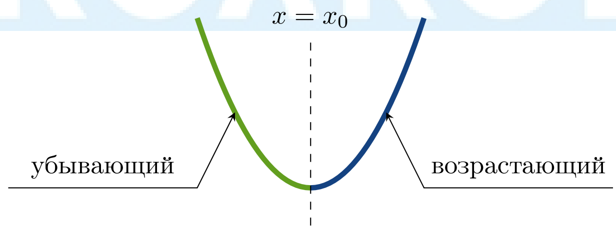
Рассмотрим функцию $f(x) = 3x^2 + (4+2a)x - 8|x| - (a^2 + 4a)$.

Раскроем $|x|$. Получим

$$f(x) = \begin{cases} f_1 = 3x^2 + (2a+12)x - (a^2+4a), & x < 0 \\ f_2 = 3x^2 + (2a-4)x - (a^2+4a), & x \geqslant 0 \end{cases}$$

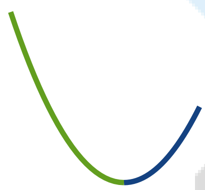
Таким образом, графиком функции $y = f(x)$ является объединение части параболы $y = f_1(x)$ при $x < 0$ (то есть левой части) и части параболы $y = f_2(x)$ при $x \geqslant 0$ (то есть правой части). Причем заметим, что параболы $y = f_1$ и $y = f_2$ пересекаются при $x = 0$, то есть эти части парабол «сходятся» в одной точке.

Рассмотрим произвольную параболу:

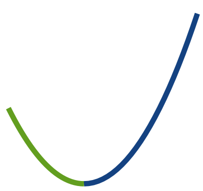


Вертикальная прямая $x = x_0$, проходящая через вершину параболы, делит ее на два куска: убывающий и возрастающий.

Следовательно, мы можем взять две различные левые части:



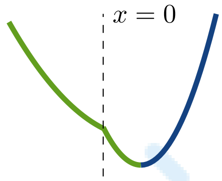
Кроме того, можем взять две различные правые части:



Обозначим за x_1 абсциссу вершины параболы $y = f_1$, за x_2 — абсциссу вершины параболы $y = f_2$.

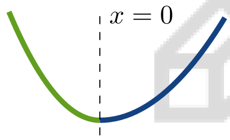
Комбинируя какую-то левую часть с какой-то правой частью, мы получим, что график функции $y = f(x)$ может принимать один из четырех видов ниже.

Взяли убывающий кусок левой части и убывающе-возрастающий кусок правой части:



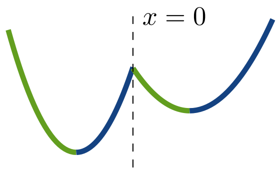
В этом случае $x = 0 < x_1$ и $x = 0 < x_2$.

Взяли убывающий кусок левой части и возрастающий кусок правой части:



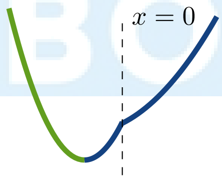
В этом случае $x = 0 < x_1$ и $x = 0 > x_2$.

Взяли убывающе-возрастающий кусок левой части и убывающе-возрастающий кусок правой части:



В этом случае $x = 0 > x_1$ и $x = 0 < x_2$.

Взяли убывающе-возрастающий кусок левой части и возрастающий кусок правой части:



В этом случае $x = 0 > x_1$ и $x = 0 > x_2$.

4.2 Задача из сборника Ященко 2023, вариант 1

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(a - x)^2 + 4a + 1 = (2x + 1)^2 - 8|x|$$

имеет ровно четыре различных решения.

Решение

Перепишем уравнение в виде

$$3x^2 + (4 + 2a)x - 8|x| - (a^2 + 4a) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} f_1 = 3x^2 + (2a + 12)x - (a^2 + 4a) = 0, x < 0 \\ f_2 = 3x^2 + (2a - 4)x - (a^2 + 4a) = 0, \quad x \geqslant 0 \end{array}\right.$$

График полученной совокупности представляет собой объединение части параболы $y = f_1$, соответствующей $x < 0$, и части параболы $y = f_2$, соответствующей $x \geqslant 0$. Следовательно, может получиться одна из четырех картинок:

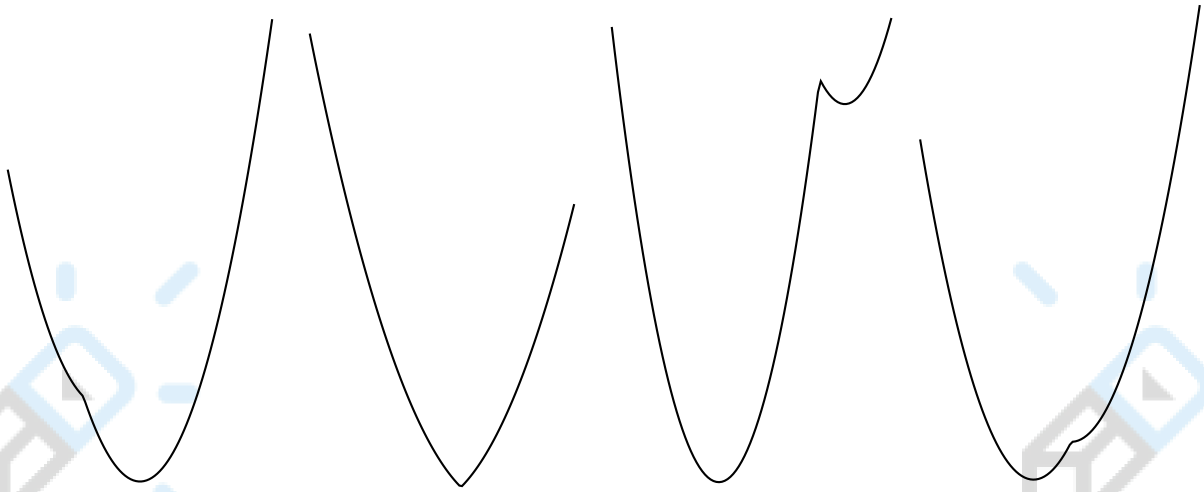
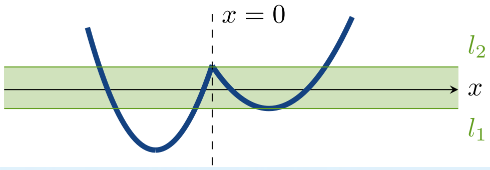


рис. 1 рис. 2 рис. 3 рис. 4

Где бы ни находилась ось абсцисс на рис. 1, рис. 2 и рис. 4, график будет иметь максимум две точки пересечения с этой осью. Следовательно, исходное уравнение будет иметь максимум два корня. Нам подходит только рис. 3.



Этот рисунок задается следующим условием: $x_1 < 0 < x_2$.

Ось абсцисс должна находиться в промежутке между прямой l_1 и прямой l_2. Это значит, что обе параболы должны пересекать ось абсцисс (тогда ось абсцисс будет находиться выше l_1) и значение $f_1(0) = f_2(0)$ должно быть положительно (тогда ось абсцисс будет ниже прямой l_2). Следовательно, дискриминанты $D_1 > 0$ и $D_2 > 0$ и $f_1(0) = f_2(0) > 0$.

В итоге получаем следующую систему:

$$\begin{cases} x_1 < 0 < x_2 \\ D_1 > 0 \\ D_2 > 0 \\ f_1(0) = f_2(0) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 - a < 0 < 2 - a \\ 16(a+3)^2 > 0 \\ 16(a+1)^2 > 0 \\ -(a^2 + 4a) > 0 \end{cases}$$

Решим систему и получим ответ: $a \in (-4; 0) \backslash \{-3; -1\}$.

5 Отрезок

5.1 Уравнение отрезка

Рассмотрим уравнение

$$\sqrt{x^2 + (y-12)^2} + \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = \sqrt{a^2 + 144}$$

Выясним, какой график на плоскости xOy оно задает. Вспомним, каким выражением задается расстояние между двумя точками на плоскости. Если у нас имеются две точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, то расстояние между ними равно

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Вернемся к нашему уравнению. Рассмотрим точки $A(0;12)$, $B(a;0)$ и $M(x;y)$. Тогда имеем:

$$MA = \sqrt{x^2 + (y-12)^2}$$
$$MB = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$
$$AB = \sqrt{a^2 + 144}$$

Следовательно, исходное уравнение имеет вид

$$MA + MB = AB$$

Это равенство говорит нам о том, что сумма длин отрезков MA и MB равна длине отрезка AB. Из точек A, B и M точки A и B фиксированы (да, одна координата точки B зависит от параметра, но при зафиксированном значении параметра точка B имеет конкретное фиксированное положение на плоскости xOy), а вот координаты точки M не определены на плоскости. Следовательно, нам нужно понять, где может находиться на плоскости точка M, чтобы сумма расстояний от нее до точек A и B была равна длине отрезка AB. Множество положений точки M как раз и задаст тот график, который описывается нашим уравнением.

Есть три принципиально различных положения точки M относительно двух точек A и B :

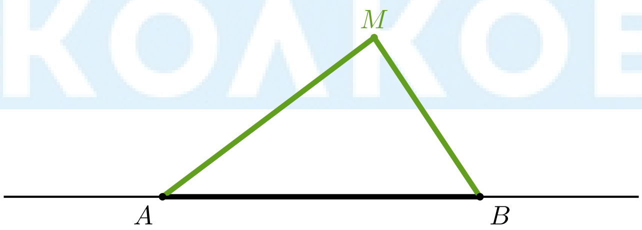
— точка M может находиться вне прямой AB;

— точка M может находиться на прямой AB, но вне отрезка AB;

— точка M может находиться на отрезке AB.

Эти три ситуации мы и рассмотрим по отдельности и определим, может ли точка M находиться в каждом из таких положений или нет.

• Пусть M не лежит на прямой AB.



Тогда точки A, B и M образуют треугольник AMB. Мы знаем, что в любом треугольнике сумма длин двух сторон больше длины третьей стороны. Следовательно, для $\triangle AMB$ верно неравенство

$$MA + MB > AB$$

Это неравенство противоречит нашему равенству $MA + MB = AB$. Следовательно, точка M не может лежать вне прямой AB.

• Пусть M лежит на прямой AB, но вне отрезка AB.

Без ограничения общности можно считать, что точка M лежит на продолжении отрезка AB за точку A. Тогда по свойству длин отрезков мы получаем

$$MB - MA = AB$$

Это равенство также не соответствует нашему равенству $MA + MB = AB$. Следовательно, точка M не может лежать на прямой AB вне отрезка AB.

• Пусть точка M лежит на отрезке AB.

Тогда по свойству длин отрезков мы получаем, что

$$MA + MB = AB$$

Мы получили в точности то равенство, которое и имели. Учитывая, что мы взяли точку M в произвольном месте на отрезке AB, получаем, что наше равенство задает множество точек M, «путешествующих» по отрезку AB (естественно, точка M может совпасть с любой из точек A или B).

Иными словами, это значит, что уравнение

$$\sqrt{x^2 + (y-12)^2} + \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = \sqrt{a^2 + 144}$$

задает множество точек $M(x; y)$ отрезка AB, где $A(0; 12)$, $B(a; 0)$.

5.2 Задача из сборника Шестакова по параметрам

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + (y-4)^2 = 16 \\ \sqrt{x^2 + (y-12)^2} + \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = \sqrt{a^2 + 144} \end{cases}$$

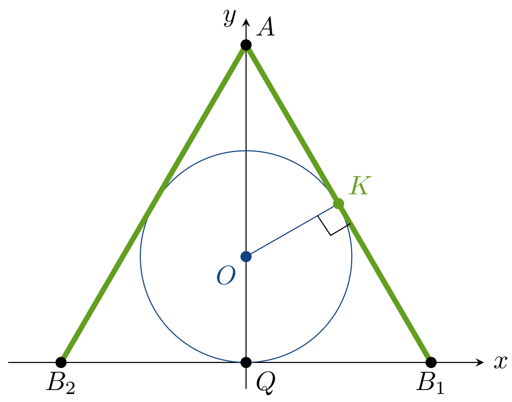
имеет единственное решение.

Решение

Первое равенство задает окружность с центром в точке $O(0; 4)$ и радиусом $R = 4$.

Рассмотрим второе уравнение. Пусть имеются точки $A(0; 12)$, $B(a; 0)$, $M(x; y)$. Тогда второе уравнение имеет вид $AM + MB = AB$, следовательно, оно задает множество точек M, находящихся на отрезке AB. Заметим, что конец B отрезка движется по оси абсцисс при изменении значений параметра a.

Следовательно, необходимо, чтобы отрезок имел одну точку пересечения с окружностью. Так как окружность симметрична относительно оси ординат, а точка A лежит на оси ординат, то положения AB_1 и AB_2 отрезка, когда он касается окружности, симметричны относительно оси ординат. Тогда если положению AB_1 соответствует $a = a_1$, то положению AB_2 соответствует $a = -a_1$. Рассмотрим только случай $a > 0$.



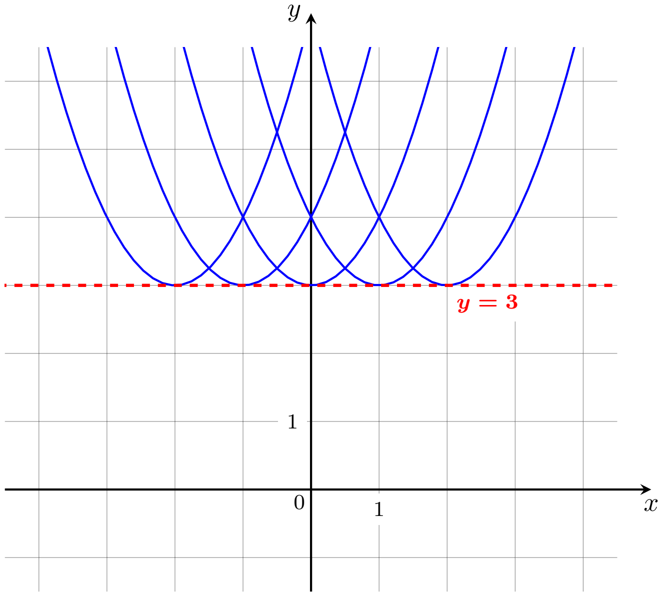
Так как $\triangle AQB_1 \sim \triangle AKO$, то имеем отношение подобия:

$$\frac{QB_1}{OK} = \frac{AQ}{AK} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{4} = \frac{12}{\sqrt{8^2 - 4^2}} = \frac{12}{4\sqrt{3}} \quad \Leftrightarrow \quad a = 4\sqrt{3}$$

Ответ: $a \in \{\pm 4\sqrt{3}\}$.

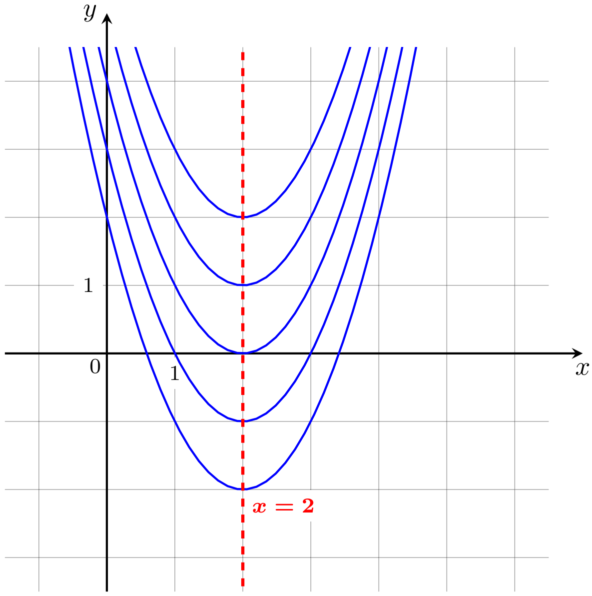
6 Траектории движения

Рассмотрим параболу $f(x) = (x-a)^2 + 3$. Мы знаем, что если парабола представлена в таком виде, то ее вершина имеет координаты $(a; 3)$. При этом параметр a может принимать произвольное значение, следовательно, вершина параболы может оказаться в любой точке горизонтальной прямой $y = 3$, так как ордината вершины зафиксирована и равна 3, а абсцисса может быть любой.



Множество парабол, заданных таким образом, называют **семейством**, а прямую, по которой движется вершина — **траекторией**.

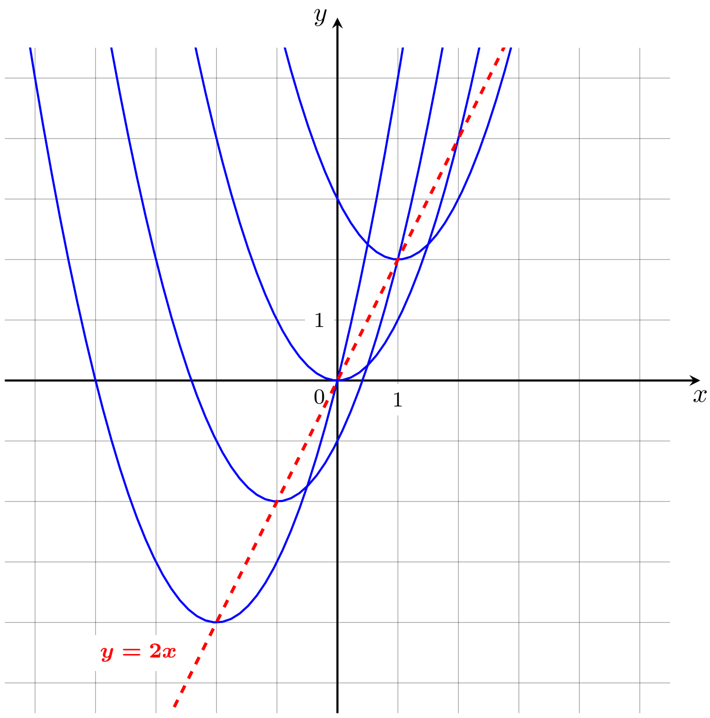
Аналогичная ситуация имеет место для параболы $f(x) = (x-2)^2 + a$, разница лишь в том, что теперь траектория будет вертикальной прямой.



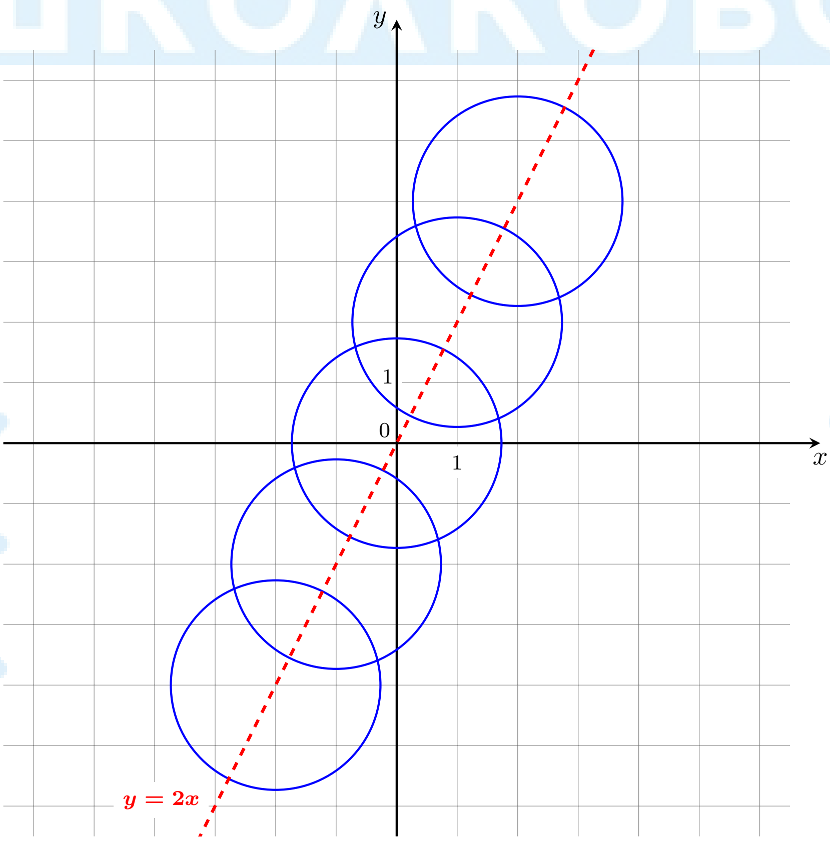
Рассмотрим еще одну ситуацию. Пусть парабола имеет вид $f(x) = (x-a)^2 + 2a$. В этом случае на роль вершины подойдут все точки плоскости вида $(a; 2a)$, то есть все такие точки $(x_0; y_0)$, координаты которых удовлетворяют соотношению

$$\begin{cases} x_0 = a \\ y_0 = 2a \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad y_0 = 2x_0$$

Получили, что в этом случае траекторией вершины будет прямая $y = 2x$ плоскости, и график будет выглядеть следующим образом:



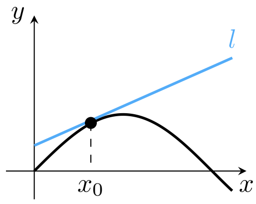
Для окружности вида $(x-a)^2 + (y-2a)^2 = 3$ ситуация будет аналогичной — центр $O(a; 2a)$ окружности будет двигаться по прямой $y = 2x$.



7 Касание прямой и параболы

7.1 Касание прямой и графика некоторой функции

Пусть дана некоторая прямая l, уравнение которой записано в виде $y = kx + b$, и некоторая функция, заданная как $y = f(x)$. Прямая l касается графика функции f в некоторой точке $x = x_0$, если в некоторой окружности этой точки прямая не имеет других общих точек с графиком функции f, а также график функции f в некоторой окружности точки $x = x_0$ находится по одну сторону от прямой. Выглядит это так:



Условие того, что прямая $y = kx + b$ касается графика функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$, можно задать с помощью следующей системы:

$$\begin{cases} f(x_0) = kx_0 + b \\ f'(x_0) = k \end{cases}$$

7.2 Касание прямой и параболы

Рассмотрим условия касания прямой и параболы. Этот случай отличается от общего случая тем, что задать условие на касание прямой с параболой можно двумя способами.

Пусть дана система ($a \neq 0$)

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = kx + n \end{cases}$$

При этом требуется записать условия, при которых система имеет единственное решение.

Это равносильно тому, что требуется записать условия, при которых прямая $y_1 = kx + n$ касается параболы $y_2 = ax^2 + bx + c$. Существуют два способа.

• **1 способ.** Условие касание прямой и графика произвольной функции можно записать с помощью производной. Если x_0 — абсцисса точки касания прямой и параболы, то выполнена система

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) = y_2'(x_0) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} kx_0 + n = ax_0^2 + bx_0 + c \\ k = 2ax_0 + b \end{cases}$$

Выразив x_0 из второго уравнения и подставив в первое, мы получим уравнение, в котором будут участвовать только a, b, c, k, n.

• **2 способ.** Так как графиком $y_1 = kx + n$ является невертикальная прямая, то условие касания прямой и параболы равносильно условию наличия единственной точки пересечения прямой и параболы. Для этого необходимо потребовать, чтобы имело единственное решение уравнение

$$y_1 = y_2 \quad \Leftrightarrow \quad kx + n = ax^2 + bx + c$$

Так как уравнение квадратное, то дискриминант этого уравнения должен быть равен нулю. Так мы получим уравнение, в котором будут участвовать только a, b, c, k, n.

Замечание: аналогичная ситуация также обстоит и с гиперболой, ее график задается функцией $y = \dfrac{a}{x+b} + c$. В случае прямой и гиперболы также можно пользоваться вторым способом, то есть задавать касание с помощью требования единственного решения от равенства двух функций .

7.3 Задача на касание прямой и параболы, решаемая с помощью производной

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}\log_3(y-3)-2\log_9 x=0\\(x+a)^2-2y-5a=0\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение

Систему можно переписать в виде
$$\begin{cases}y=x+3\\x>0\\y=\frac{1}{2}(x+a)^2-\frac{5}{2}a\end{cases}$$

График $y=\frac{1}{2}(x+a)^2-\frac{5}{2}a$ представляет собой параболу $y=\frac{1}{2}x^2$, вершина которой сдвинута в точку $O\left(-a;-\frac{5}{2}a\right)$, то есть движется по прямой $y=\frac{5}{2}x$ справа налево при увеличении a.

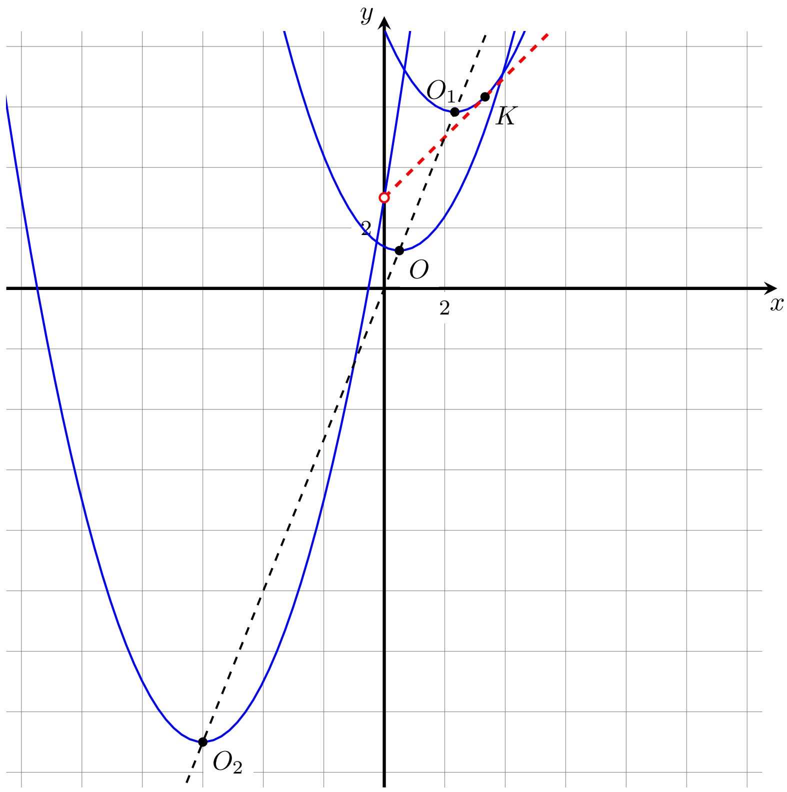
Действительно, для того, чтобы найти траекторию движения параболы, необходимо связать между собой абсциссу x и ординату y точки O. Так как $x=-a$, $y=-\frac{5}{2}a$, то $y=\frac{5}{2}x$. При увеличении a абсцисса $x=-a$ уменьшается, следовательно, движение по прямой $y=\frac{5}{2}x$ происходит справа налево.

Рассмотрим систему
$$\begin{cases}y=x+3\\x>0\end{cases}$$

Ее графиком является луч k прямой с началом в точке $(0;3)$, находящийся в I четверти. Заметим, что положение луча не зависит от параметра.

Таким образом, требуется найти те a, при которых луч k имеет точки пересечения с параболой. Так как прямая и парабола могут иметь максимум две точки пересечения, то требуется найти те a, при которых луч k имеет 1 или 2 точки пересечения с параболой.

Граничные положения параболы, при которых она имеет хотя бы одну общую точку с лучом k, показаны на рисунке (параболы с вершинами в точках O_1 и O_2):



Действительно, пусть a меняется от $-\infty$ до $+\infty$. Тогда сначала парабола находится выше луча и не имеет с ним общих точек. Затем, когда вершина параболы находится в точке O_1, она касается луча в точке K. Далее парабола имеет две точки пересечения с лучом, затем одну (например, парабола с вершиной O на рисунке) до тех пор, пока вершина параболы не окажется в точке O_2, когда правая ветвь параболы будет проходит через начало луча — точку $(0;3)$.

«Положение O_1»: парабола касается луча в точке K. Запишем условие касания параболы $y=\frac{1}{2}(x+a)^2-\frac{5}{2}a$ и прямой $y_k=x+3$ в точке $K(x_0;y_0)$:

$$\begin{cases} y(x_0)=y_k(x_0) \\ y'(x_0)=y_k'(x_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\left(x_0+a\right)^2-\frac{5}{2}a=x_0+3 \\ x_0+a=1 \end{cases}$$

$$a=-\frac{7}{3}$$

«Положение O_2»: парабола правой ветвью проходит через точку $(0;3)$:

$$3=\frac{1}{2}(0+a)^2-\frac{5}{2}a$$

$$a^2-5a-6=0$$

$$a=-1;6$$

Для правой ветви выбираем $a=6$, так как абсцисса $x=-a$ точки O_2 в этом случае отрицательна, то есть $-a<0$, откуда $a>0$.

Ответ: $a\in\left[-\dfrac{7}{3};6\right)$.

7.4 Задача на касание прямой и параболы, решаемая через дискриминант

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$|x^2+2x-3|-2a=|x-a|+3$$

имеет ровно три различных корня.

Решение

Рассмотрим функции $f_1=\left|(x+1)^2-4\right|$, $f_2=|x-a|+3+2a$. Тогда уравнение имеет вид $f_1=f_2$, следовательно, необходимо, чтобы графики этих функций имели три точки пересечения.

График $f_1=\left|(x+1)^2-4\right|$ (назовем его «птичка») строим последовательно так:

$$x^2\xrightarrow{\text{сдвиг на 1 влево и на 4 вниз}}(x+1)^2-4\xrightarrow{\text{отражение нижней части наверх}}\left|(x+1)^2-4\right|$$

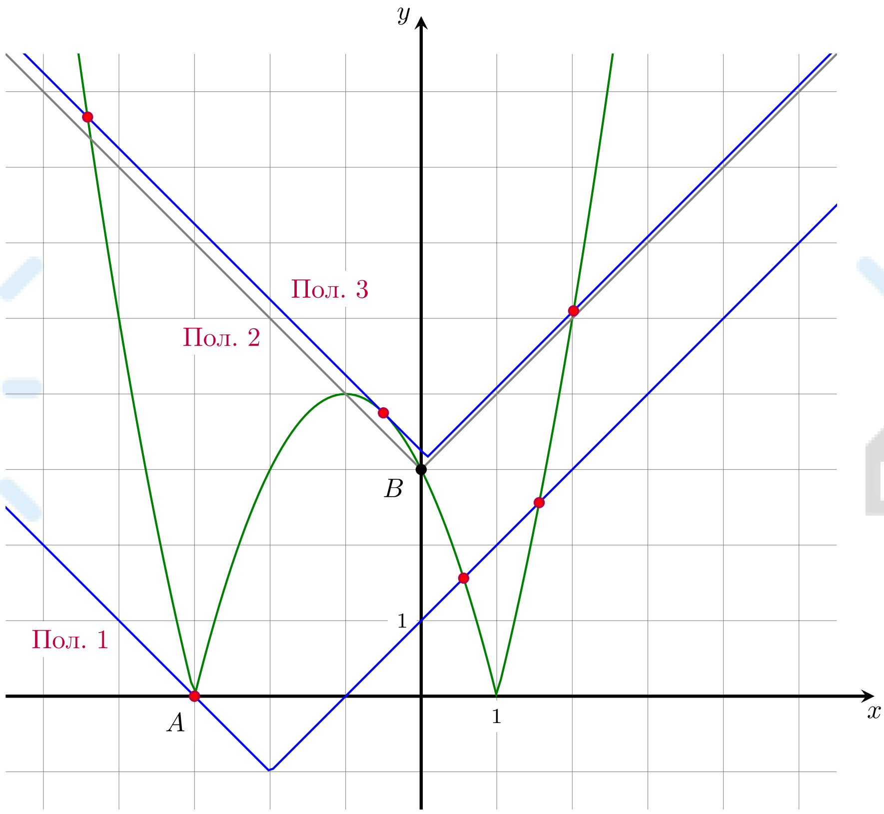
Вершина уголка f_2 — точка $O(a;2a+3)$, следовательно, она движется по прямой $y=2x+3$.

Рассмотрим граничные положения уголка.

Положение 1. Точно три точки пересечения: если левая ветвь уголка проходит через точку $A(-3;0)$.

Положение 2. Возможно, три точки пересечения: если вершина уголка находится в точке $B(0;3)$ (точка пересечения птички с траекторией движения уголка).

Положение 3. Возможно, три точки пересечения: если левая ветвь уголка касается центральной части птички $y=\left|-(x+1)^2+4\right|$.



Исследуем эти три положения. Левая ветвь уголка имеет вид $f_{left} = -x + 3a + 3$, $x < a$.

1. Координаты точки $A(-3; 0)$ удовлетворяют уравнению $f_{left} = -x + 3a + 3$:

$$0 = 3 + 3a + 3$$
$$a = -2$$

2. Координаты точек $O(a; 2a+3)$ и $B(0; 3)$ совпадают, то есть $a = 0$. Тогда точно есть две точки пересечения (с ветвями птички) и одна с центральной частью птички (то есть уже три общие точки). Значит, надо проверить, есть ли еще точки пересечения с центральной частью птички, которая задается уравнением $f_c = -(x+1)^2 + 4$, $-3 < x < 1$.

   При $a = 0$ левая ветвь уголка задается уравнением $f_{left,0} = -x + 3$, $x < 0$, следовательно, необходимо найти количество решений системы

$$\begin{cases} y = -x + 3, \;\; x < 0 \\ y = -(x+1)^2 + 4, \;\; -3 < x < 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$$

   Таким образом, есть общая точка с абсциссой $x = -1$ и всего точек пересечения четыре, значит, это положение нам не подходит. Двигая уголок выше вплоть до касания (положения 3), мы получаем также четыре точки пересечения .

3. Запишем условие касания центральной части птички $f_c = -(x+1)^2 + 4$, $-3 < x < 1$, и левой ветви уголка $f_{left} = -x + 3a + 3$, $x < a$. Тогда имеем:

$$f_c = f_{left}$$
$$-(x+1)^2 + 4 = -x + 3a + 3$$
$$x^2 + x + 3a = 0$$

Дискриминант уравнения должен быть равен нулю:

$$D = 1 - 4 \cdot 3a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{12}$$

Заметим, что в этом случае корень $x = -\frac{1}{2}$ удовлетворяет условиям $-3 < x < 1$ и $x < a = \frac{1}{12}$.

Двигая уголок выше, мы получаем две точки пересечения.

Ответ: $a \in \left\{-2; \frac{1}{12}\right\}$.

8 Касание прямой и окружности

8.1 Касание в общем виде

Пусть дана система $(R > 0)$

$$\begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \\ ax + by + c = 0 \end{cases}$$

и требуется записать условия, при которых система имеет единственное решение.

Это равносильно тому, что требуется записать условия, при которых прямая $l : ax + by + c = 0$ касается окружности $C : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ с центром в точке $O(x_0; y_0)$ радиуса R.

Существует четыре способа.

• С помощью формулы расстояния от точки $O(x_0; y_0)$ до прямой $l : ax + by + c = 0$:

$$\rho(O, l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Этот способ основывается на определении касательной к окружности: если расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу окружности, то прямая является касательной к окружности.

• Геометрический способ, в котором нам понадобится тригонометрия, угловой коэффициент прямой (и знание о том, что он равен тангенсу угла наклона прямой), свойства прямоугольного треугольника и его высоты, проведенной к гипотенузе.

Этот способ основывается на том, что радиус, проведенный в точку касания окружности и касательной, перпендикулярен касательной.

• Через уравнение. Выразив x или y из уравнения прямой $ax+by+c = 0$ и подставив в уравнение окружности $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, мы получим уравнение, от которого требуется единственность решения.

• Через производную. Пусть мы знаем две вещи:

1) прямая касается верхней или нижней полуокружности;

2) прямая не является вертикальной, то есть можно выразить y через x.

Тогда можно записать уравнение, задающее нужную полуокружность:

$$\begin{aligned} &\text{верхняя:} \quad y = f(x) = \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2} + y_0 \\ &\text{нижняя:} \quad y = f(x) = -\sqrt{R^2 - (x - x_0)^2} + y_0 \end{aligned}$$

Далее можно задать условия касания графика функции $y = f(x)$ и прямой l, записанной в виде $y_l = -\frac{1}{b}(ax+c)$, в точке $K(x; y)$:

$$\begin{cases} f(x) = y_l(x) \\ f'(x) = y_l'(x) \end{cases}$$

8.2 Задача на касание прямой и окружности, решаемая через формулы расстояния

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

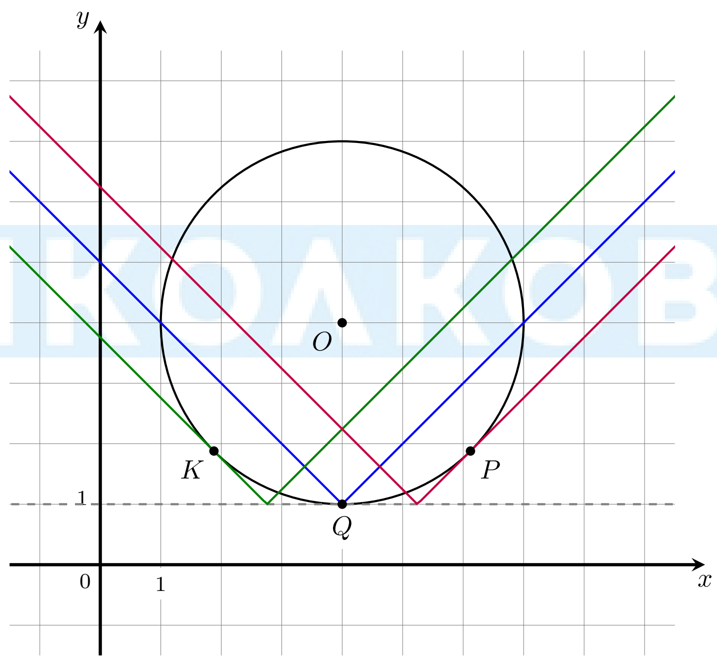
$$\begin{cases} (x-4)^2+(y-4)^2=9 \\ y=|x-a|+1 \end{cases}$$

имеет три различных решения.

Решение

Первое уравнение задает окружность с центром $O(4;4)$ и радиусом $R=3$. Второе уравнение задает уголок, вершина которого движется по прямой $y=1$ (заметим, что эта прямая касается окружности). Причем при изменении a от $-\infty$ до $+\infty$ уголок движется слева направо. Три общие точки будут в следующих положениях:

- касание в точке K левой ветви уголка и окружности;
- вершина уголка находится в точке Q касания окружности и прямой $y=1$;
- касание в точке P правой ветви уголка и окружности.



Если прямая касается окружности, то условие на это можно задать с помощью формулы расстояния от точки до прямой: в случае окружности это расстояние должно быть равно радиусу окружности. Для центра окружности $(x_0;y_0)$ радиусом R и прямой l, задаваемой уравнением $Ax+By+C=0$, получим

$$\rho(O,l)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=R$$

Следовательно, так как левая ветвь уголка задается уравнением $y_{left}=-x+a+1$, то есть $y_{left}+x-a-1=0$, правая ветвь уголка задается уравнением $y_{right}=x-a+1$, то есть $y_{right}-x+a-1=0$, то получаем

$$K: \quad 3=\frac{|4+4-a-1|}{\sqrt{2}} \quad\Leftrightarrow\quad a=7\pm3\sqrt{2}$$

$$P: \quad 3=\frac{|-4+4+a-1|}{\sqrt{2}} \quad\Leftrightarrow\quad a=1\pm3\sqrt{2}$$

Для точки K нужно выбрать меньшее значение параметра (так как существует еще одно положение, когда левая ветвь касается окружности, и оно правее нужного нам положения), для точки P — большее значение параметра (по аналогичным причинам). Вершина уголка находится в точке $Q(4;1)$, если $a=4$.

Ответ: $a \in \left\{7-3\sqrt{2};\ 4;\ 1+3\sqrt{2}\right\}$

8.3 Задача на касание прямой и окружности, решаемая через геометрию

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^4+y^2=a^2 \\ x^2+y=|a+1| \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения.

Решение

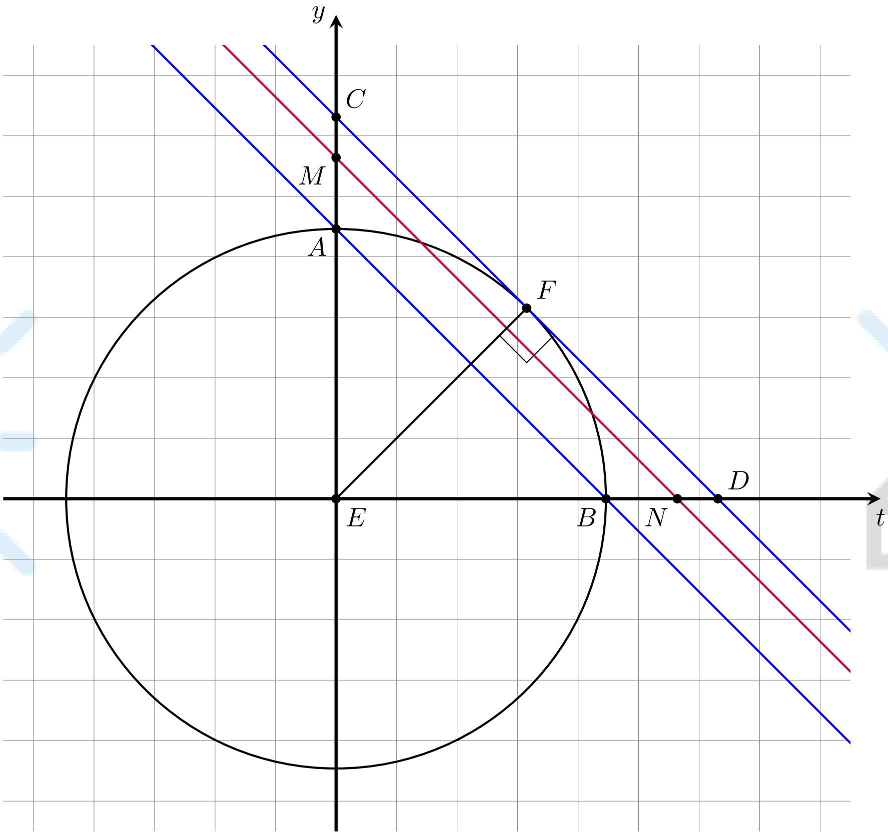
Пусть $x^2=t$, тогда $t<0$ не дает решений x, $t=0$ дает одно решение $x=0$, $t>0$ дает два различных решения x. Система примет вид

$$\begin{cases} t^2+y^2=a^2 \\ t+y=|a+1| \end{cases}$$

Первое уравнение задает либо точку, либо окружность. Случай с точкой не подходит, потому как тогда система максимум может иметь одно решение (одно решение, если точка удовлетворяет второму уравнению, и не имеет решений в противном случае).

Тогда нужно рассмотреть только случай, когда первое уравнение задает окружность с радиусом $R=|a|$, $a\neq 0$, а второе — прямую, задаваемую уравнением $y=-t+|a+1|$. Окружность и прямая могут иметь 0, 1 или 2 точки пересечения. Следовательно, чтобы после обратной замены мы получили четыре решения, необходимо, чтобы прямая имела с окружностью две точки пересечения, абсциссы t которых положительны.

Нам подходят все прямые между AB и CD. Обозначим такие прямые как MN.



Выше прямой AB : $|a+1| = EM > EA = R = |a|$.

Действительно, прямая l : $y = -t + |a+1|$ пересекает ось ординат в точке $(0; |a+1|)$, то есть для произвольной прямой MN отрезок $EM = |a+1|$. Заметим также, что прямая AB проходит через точки пересечения окружности с положительными полуосями координат, то есть $EA = R = |a|$. Так как прямая MN находится выше прямой AB, то $EM > EA$. Отсюда $|a+1| > |a|$.

Ниже прямой CD : $|a+1| = EM < EC = CD : \sqrt{2} = 2EF : \sqrt{2} = R\sqrt{2} = |a|\sqrt{2}$.

Действительно, как мы уже сказали выше, $EM = |a+1|$. Рассмотрим $\triangle ECD$. Он прямоугольный и равнобедренный, следовательно, $CD = EC\sqrt{2}$. Отрезок EF — радиус окружности, проведенный в точку касания F, то есть высота треугольника ECD, проведенная к гипотенузе. Следовательно, она является и медианой. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы, отсюда $CD = 2EF$. Но EF — радиус, следовательно, $EF = R = |a|$. Так как прямая MN находится ниже прямой CD, то $EM < EC$. Отсюда $|a+1| < |a|\sqrt{2}$.

Следовательно,

$$|a| < |a+1| < |a|\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad a^2 < (a+1)^2 < 2a^2$$

$$\begin{cases} (a+1)^2 > a^2 \\ (a+1)^2 < 2a^2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a > -\dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} a < 1-\sqrt{2} \\ a > 1+\sqrt{2} \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ: $a \in \left(-0{,}5; 1-\sqrt{2}\right) \cup \left(1+\sqrt{2}; +\infty\right)$.

8.4 Задача на касание прямой и окружности, решаемая через уравнение

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2a(x+2y) = 5 - 5a^2 \\ y + \dfrac{1}{2}x = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение

Преобразуем первое уравнение:

$$x^2 + y^2 - 2a(x+2y) = 5 - 5a^2$$
$$x^2 + y^2 - 2ax - 4ay + a^2 + 4a^2 = 5$$
$$(x-a)^2 + (y-2a)^2 = 5$$

Оно задает окружность с центром в точке $O(a; 2a)$ и радиусом $\sqrt{5}$. Второе уравнение системы задает прямую $y = -0{,}5x$. Система будет иметь единственное решение в том случае, если прямая и окружность касаются друг друга. Выразим x из уравнения прямой, получим $x = -2y$, и подставим в исходное уравнение окружности. Получим уравнение

$$(-2y)^2 + y^2 - 2a(-2y + 2y) = 5 - 5a^2$$
$$y^2 = 1 - a^2$$

Это уравнение должно иметь единственное решение, что выполняется, если правая часть равна нулю:

$$1 - a^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm 1$$

Ответ: $a \in \{-1; 1\}$

Замечание: для этого способа рисунок не обязателен.

8.5 Задача на касание прямой и окружности, решаемая через производную

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + (y-a)^2 = 4 \\ y = ax - 2a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение

Первое уравнение системы задает окружность с центром в точке $(0; a)$ радиуса $R = 2$. Второе уравнение задает пучок прямых, проходящих через точку $(2; 0)$.

Прямая может касаться как верхней, так и нижней полуокружностей. Определим те a, при которых прямая $y = ax - 2a$ касается каждой из этих частей, через производную.

Верхняя полуокружность задается уравнением

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2} + a$$

Касание с ней задается системой

$$\begin{cases} f(x) = y(x) \\ f'(x) = y'(x) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sqrt{4-x^2} + a = ax - 2a \\ -\dfrac{2x}{2\sqrt{4-x^2}} = a \end{cases}$$

Подставив a из второго уравнения в первое, получаем:

$$\sqrt{4-x^2} = -\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{3x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$4 - x^2 = -x^2 + 3x$$

$$x = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Нижняя полуокружность задается уравнением

$$g(x) = -\sqrt{4-x^2} + a$$

Касание с ней задается системой

$$\begin{cases} g(x) = y(x) \\ g'(x) = y'(x) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -\sqrt{4-x^2} + a = ax - 2a \\ \dfrac{2x}{2\sqrt{4-x^2}} = a \end{cases}$$

Подставив a из второго уравнения в первое, получаем:

$$-\sqrt{4-x^2} = \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} - \frac{3x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$-4 + x^2 = x^2 - 3x$$

$$x = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Ответ: $a \in \left\{-\dfrac{2}{\sqrt{5}}; \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right\}$.

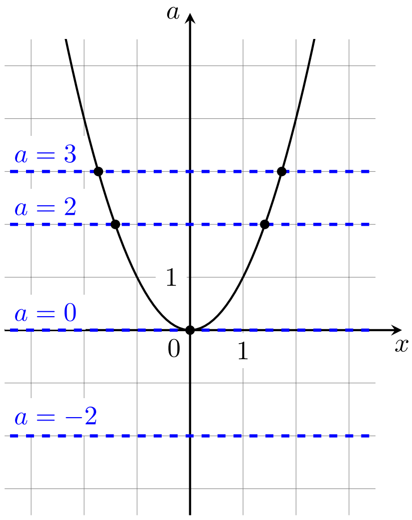
Замечание: для этого способа рисунок не обязателен.

9 Метод xOa

9.1 Суть метода

Рассмотрим уравнение $x^2 = a$. Мы понимаем, что оно имеет два решения при $a > 0$, одно — при $a = 0$ и не имеет решения при $a < 0$.

Давайте рассмотрим параметр a как функцию от x. Тогда в системе координат xOa мы получим такой график:



На самом деле мы изобразили на плоскости множество точек — решений уравнения $x^2 = a$, значит, если прямая $a = \text{const}$ пересекает полученный нами график в двух точках, то при данном a уравнение $x^2 = a$ имеет ровно два решения. Аналогично с одним пересечением и отсутствием пересечений.

9.2 Задача на метод xOa

Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\frac{x^2-(3a-1)\,x+2a^2-2}{x^2-3x-4}=0$$

имеет единственное решение.

Решение

Преобразуем исходное уравнение:

$$\frac{x^2-(3a-1)\,x+2a^2-2}{x^2-3x-4}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x^2-(3a-1)\,x+2a^2-2=0\\ x^2-3x-4\neq 0\end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

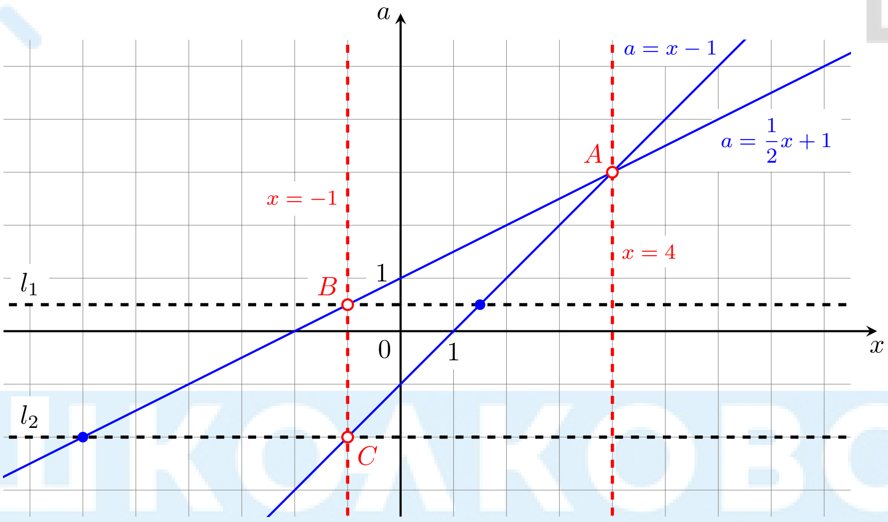
$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases} (x-(2a-2))\,(x-(a+1))=0\\ (x-4)\,(x+1)\neq 0\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \left[\begin{aligned} &x=2a-2\\ &x=a+1\end{aligned}\right.\\ x\neq 4\\ x\neq -1\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \left[\begin{aligned} &a=\tfrac{1}{2}x+1\\ &a=x-1\end{aligned}\right.\\ x\neq 4\\ x\neq -1\end{cases}$$

Будем рассматривать параметр a как переменную. Построим в системе координат xOa множество S решений системы. Если некоторая точка плоскости с координатами $(x_0; a_0)$ принадлежит этому множеству S, то для исходной задачи это означает, что если параметр a принимает значение a_0, то x_0 будет одним из решений системы. Нас просят найти все такие значения a_0 параметра a, при каждом из которых ровно одна из точек вида $(x_0; a_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$ принадлежат множеству решений S, изображенному на плоскости xOa. Фактически это равносильно тому, что горизонтальная прямая $a = a_0$ имеет ровно одну точку пересечения с множеством S.

Построим на плоскости множества решений каждого из уравнений внутренней совокупности, объединим их, а затем исключим точки, удовлетворяющих условиям $x = 4$ и $x = -1$.

- Множеством решений первого уравнения совокупности являются точки прямой $a = \dfrac{1}{2}x + 1$.
- Множеством решений второго уравнения совокупности являются точки прямой $a = x - 1$.
- Третье условие $x \neq 4$ задает всю плоскость за исключением точек прямой $x = 4$.
- Четвертое условие $x \neq -1$ задает всю плоскость за исключением точек прямой $x = -1$.

Построим графики.



Множество S решений системы является объединением всех точек синих прямых за исключением точек A, B и C, выделенных красным и принадлежащих красным прямым.

Прямые $a = \frac{1}{2}x + 1$, $a = x - 1$ и $x = 4$ пересекутся точке $A = (4; 3)$. Прямые $a = \frac{1}{2}x + 1$ и $x = -1$ пересекутся точке $B = \left(-1; \frac{1}{2}\right)$. Прямые $a = x - 1$ и $x = -1$ пересекутся точке $C = (-1; -2)$.

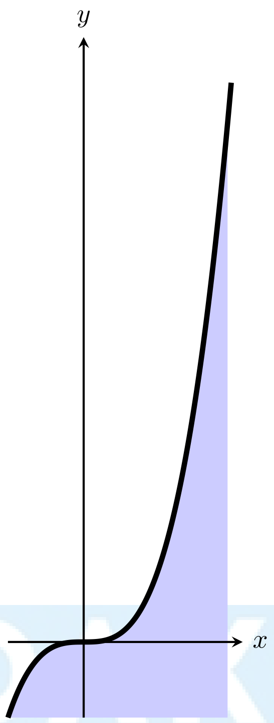
Заметим, что горизонтальные прямые, которые проходят через точку A, не будут иметь точек пересечения с S, а значит, не подойдут нам; горизонтальные прямые, которые проходят через одну из точек B или C, будут иметь ровно одну точку пересечения с S, а значит, подойдут нам. Остальные горизонтальные прямые будут иметь две точки пересечения с S и нам не подойдут. Значит, нам подходят только прямые $l_1 : a = \frac{1}{2}$ (прямая через B) и $l_2 : a = -2$ (прямая через C). Ответ: $a \in \left\{\dfrac{1}{2}; -2\right\}$.

10 Метод областей

10.1 Что задает неравенство вида $y < f(x)$ или $y > f(x)$?

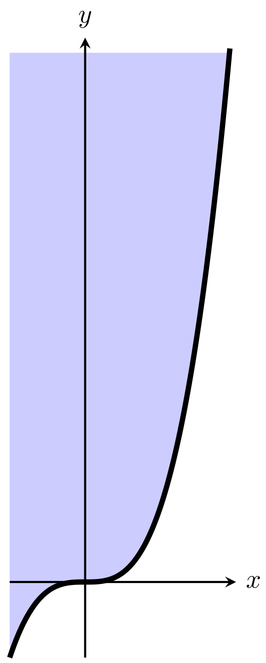
Рассмотрим два неравенства: $y < f(x)$ и $y > f(x)$, где $f(x)$ — некоторая функция плоскости xOy.

• Первое неравенство $y < f(x)$ задает на координатной плоскости xOy множество точек $(x_0; y)$, ордината которых $y < y_0$, где $(x_0; y_0)$ — точка на графике $y = f(x)$ (то есть верно $y_0 = f(x_0)$).



На рисунке изображено множество решений неравенства $y < x^3$ на некотором промежутке.

• Второе неравенство $y > f(x)$ задает на координатной плоскости xOy множество точек $(x_0; y)$, ордината которых $y > y_0$, где $(x_0; y_0)$ — точка на графике $y = f(x)$ (то есть верно $y_0 = f(x_0)$).



На рисунке изображено множество решений неравенства $y > x^3$ на некотором промежутке.

10.2 Пример задачи на метод областей

Найдите все a, при которых система неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{(x-2a)^2+(y-a)^2} \leqslant \dfrac{|a|}{6\sqrt{5}} \\ x-2y \geqslant 1 \end{cases}$$

имеет решения.

Решение

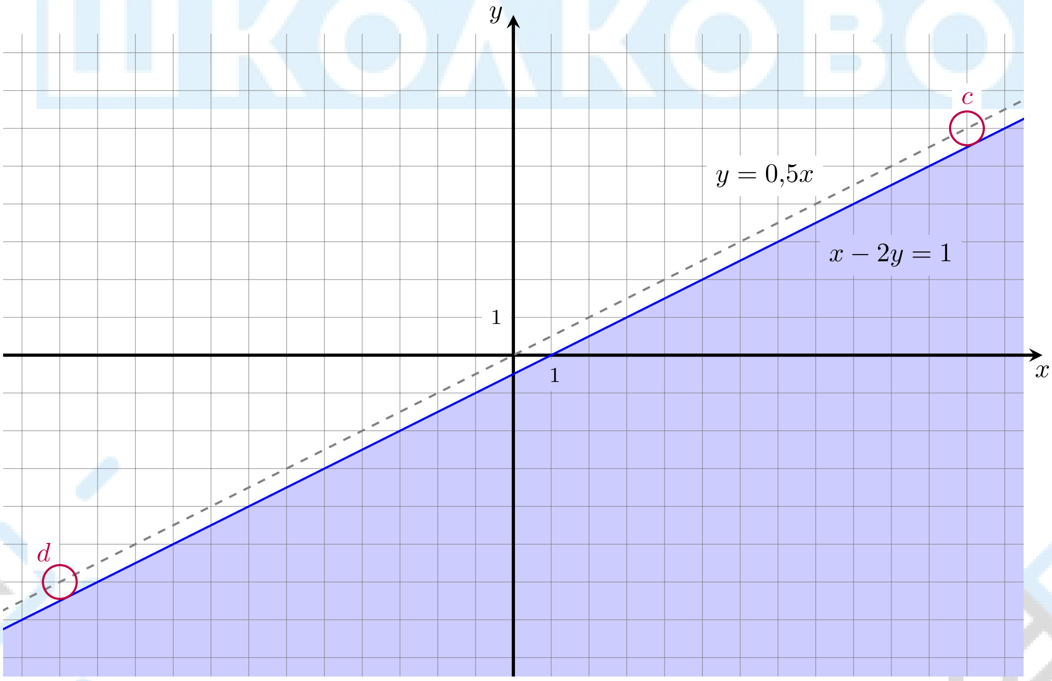
Первое неравенство при $a=0$ задает точку $(0;0)$, не удовлетворяющую второму неравенству, следовательно, этот случай нам не подходит. При $a\neq 0$ первое неравенство равносильно

$$(x-2a)^2+(y-a)^2 \leqslant \left(\frac{|a|}{6\sqrt{5}}\right)^2$$

Оно задает круг с центром в $O(2a;a)$ (который движется по прямой $y=0,5x$) и радиусом $R=\dfrac{|a|}{6\sqrt{5}}$. Заметим, что при отдалении круга от начала координат его радиус увеличивается.

Второе неравенство задает область под прямой $y=0{,}5(x-1)$. Заметим, что эта прямая параллельна траектории движения центра круга. Также заметим, что при $a=a_0$ и $a=-a_0$ круги симметричны относительно прямой $y=-x$. Следовательно, если нам подходит $a=a_0$, то нам подходит также и $a=-a_0$.

Рассмотрим только $a>0$. Тогда граничное положение круга, при котором он имеет хотя бы одну общую точку с голубой областью — когда круг касается прямой $x-2y=1$. На рисунке это положение c, при этом положение d — ему симметричное при противоположном a.



Тогда расстояние от центра круга до прямой $l: x-2y=1$ равно радиусу круга:

$$\frac{|a|}{6\sqrt{5}} = R = \rho(O,l) = \left.\frac{|x-2y-1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}\right|_{x=2a,\ y=a}$$

$$\frac{|a|}{6\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \Rightarrow \quad a=6$$

Следовательно, при $a\geqslant 6$ и $a\leqslant -6$ система имеет хотя бы одно решение.