17 задание из ЕГЭ

2022

Теорема Виета

Если у квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ есть корни x_1, x_2, то $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1x_2=\frac{c}{a}$.

Обратная теорема Виета

Если известно, что сумма некоторых чисел $x+y=A$, их произведение $xy=B$, то если такие числа существуют, они являются корнями квадратного уравнения

$$p^2-Ap+B=0$$

Примеры, где встречается

- Найти сумму квадратов корней уравнения:

$$x_1^2+x_2^2=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}$$

- Определить, когда ровно один из двух корней положительный:

$$\begin{cases} D>0 \\ x_1x_2=\frac{c}{a}<0 \end{cases}$$

- Определить, когда имеет единственное решение система:

$$\begin{cases} x^2+y^2=A \\ x+y=B \end{cases}$$

Так как $A=x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=B^2-2xy$, то $xy=0,5\left(B^2-A\right)$, следовательно, единственное решение у системы, если единственное решение имеет уравнение

$$p^2-Bp+0,5\left(B^2-A\right)=0$$

Метод хорошего/плохого корня

1. Находим все потенциальные корни, которые может иметь исходное уравнение. Каждый из них будет корнем уравнения, если удовлетворяет "своим" условиям: ОДЗ и условию задачи (например, лежит в некотором отрезке). Пусть таких корней два.
2. Назовем корень хорошим, если он удовлетворяет "своим" условиям, в противном случае — плохим. Найдем значения параметра a, при которых корень хороший. Пусть при $a \in A_1$ корень x_1 хороший, при $a \in A_2$ корень x_2 — хороший. Тогда при $a \in \mathbb{R}\backslash A_1$ корень x_1 — плохой, при $a \in \mathbb{R}\backslash A_2$ корень x_2 — плохой.
3. Смотрим, сколько корней должно иметь уравнение по условию задачи. Если требуется наличие одного корня, то это возможно в одном из трех случаев:
   - x_1 — хороший, x_2 — плохой $\begin{cases} a \in A_1 \\ a \in \mathbb{R}\backslash A_2 \end{cases}$
   - x_1 — плохой, x_2 — хороший $\begin{cases} a \in A_2 \\ a \in \mathbb{R}\backslash A_1 \end{cases}$
   - $x_1=x_2$ — хорошие и совпадающие $\begin{cases} a \in A_1 \\ x_1=x_2 \end{cases}$

Уравнения имеют общий корень

Если уравнения $f(x,a)=0$ и $g(x,a)=0$ имеют общие корни, то система

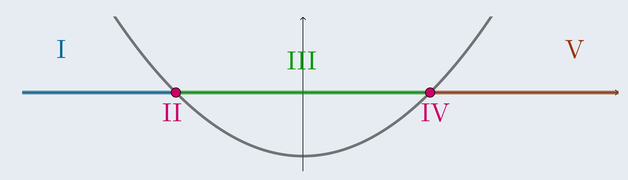
$$\begin{cases} f(x,a)=0 \\ g(x,a)=0 \end{cases}$$

имеет решения $(x_0;a_0)$. Причем число решений системы — число общих корней уравнений, где каждое a_0 — значение параметра, при котором у уравнений x_0 — общий корень.

Квадратичная функция

Пусть $y=ax^2+bx+c$, $a \neq 0$ с вершиной x_0 имеет две точки пересечения с осью абсцисс (то есть уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два корня $x_1<x_2$). Введем названия для следующих частей оси Ox:

- I – левее x_1
- II – x_1
- III – между x_1 и x_2
- IV – x_2
- V – правее x_2



В каждом из этих мест значение функции либо положительно, либо отрицательно, либо равно нулю. Также все, кроме III, находятся справа или слева от абсциссы вершины x_0 параболы.
С помощью этих данных можно задавать условия на корни квадратичного трехчлена, например, чтобы они лежали в некотором промежутке, чтобы оба были больше некоторого числа k и т.п.

Положение точки k относительно корней

С помощью свойств мест, описанных выше, зададим условия, когда точка k лежит в определенном месте (для параболы с $D>0$ и направленными вверх ветвями).

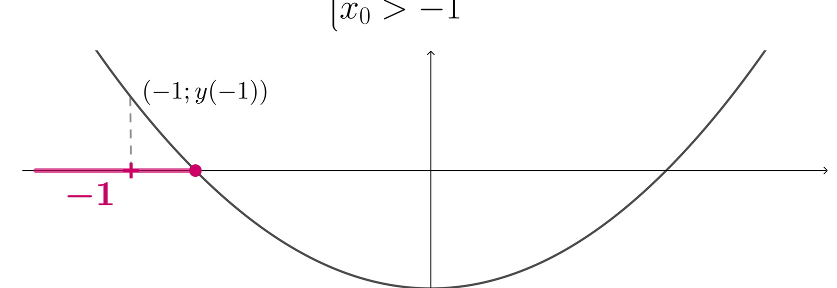
- I : $\begin{cases} D>0 \\ y(k)>0 \\ x_0>k \end{cases}$
- III : $y(k)<0$ ⋆
- V : $\begin{cases} D>0 \\ y(k)>0 \\ x_0<k \end{cases}$

⋆ условие $D>0$ для III места необязательно, так как если у параболы с ветвями вверх есть хоть одна точка, где ее значение отрицательно, то она автоматически пересекает ось абсцисс в двух точках.

Примеры, где встречается

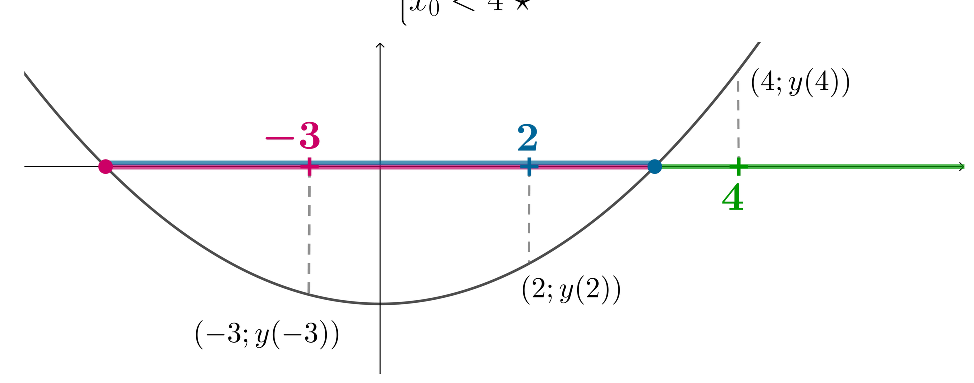
1. Оба корня уравнения $y(x)=x^2+2(a-2)x-4a+5=0$ не меньше -1.
   То есть -1 должна располагаться в I или II местах, следовательно,

$$\begin{cases} D>0 \\ y(-1)\geqslant 0 \\ x_0>-1 \end{cases}$$



2. Один корень уравнения $y(x)=x^2+2(a-2)x-4a+5=0$ заключен в полуинтервале $[2;4)$, а второй удовлетворяет неравенству $x \leqslant -3$.
   То есть -3 должна располагаться в II или III местах, 2 — в III или IV, 4 — в V месте, следовательно,

$$\begin{cases} D>0 \star \\ y(-3)\leqslant 0 \\ y(2)\leqslant 0 \\ y(4)>0 \\ x_0<4 \star \end{cases}$$



⋆ Необязательно, так как есть неравенства с $y(-3)$ и $y(2)$: либо оба равны нулю, тогда $D>0$, либо хотя бы один из них меньше нуля, тогда также $D>0$.

Модульные неравенства

- $|A|>|B| \quad \Leftrightarrow \quad A^2>B^2$
- $|A|>B \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} A>B \\ A<-B \end{array}\right.$
- $|A|<B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A<B \\ A>-B \end{cases}$

Обращаем внимание, что ставить какие-либо условия на B вовсе необязательно. Например, если $B<0$ в третьем примере, то неравенство не имеет смысла, ровно как и система, которой она равносильна.

Решение уравнений через исследование функций

Любое уравнение можно свести к виду $f(x)=0$ или $f(x)=g(x)$. Опишем некоторые свойства функций, помогающие в решении.

1. Сумма двух возрастающих функций — возрастающая функция.
2. Если $f(x)$ — возрастающая функция, то $-f(x)$ — убывающая функция.
3. Если $f(x)$ – возрастающая функция, то $f(x)+c$ – возрастающая функция ($c=\mathrm{const}$). То же с убывающей.
4. Если функция $f(x)$ строго монотонна на X, то из равенства $x_1=x_2$ ($x_1,x_2 \in X$) следует $f(x_1)=f(x_2)$, и наоборот.
5. Если функция $f(x)$ — строго монотонна на X, то уравнение $f(x)=c$ ($c=\mathrm{const}$) всегда имеет не более одного решения на X.
6. Если на $[a;b]$ $f(x)$ – возрастающая функция, а $g(x)$ – убывающая функция, то уравнение $f(x)=g(x)$ на $[a;b]$ имеет не более одного корня.
7. Если функция $f(x)$ — неубывает (невозрастает) и непрерывна на отрезке $[a;b]$, причем на концах отрезка она принимает значения $f(a)=A$, $f(b)=B$, то при $C \in [A;B]$ ($C \in [B;A]$) уравнение $f(x)=C$ всегда имеет хотя бы одно решение.
   А если функция строго монотонна, то $f(x)=C$ имеет единственное решение.
8. Если функция $f(x)$ непрерывна, то область значений функции будет содержать отрезок $[A;B]$, если имеют решения равенства $f(x)=A$ и $f(x)=B$.
9. Композиция функций одинакового характера монотонности — возрастающая, разного — убывающая. То есть если $f(x), g(x)$ — возрастающие функции, $h(x), p(x)$ — убывающие (на некотором множестве), то $f(g(x))$ — возрастающая, $f(h(x))$ — убывающая, $h(f(x))$ — убывающая, $h(p(x))$ — возрастающая. Так как возрастающая функция соответствует положительной производной, убывающая — отрицательной, то можно запоминать так: $\boxed{++\to+}$, $\boxed{+-\to-}$, $\boxed{-+\to-}$, $\boxed{--\to+}$
10. Если $f(x)$ — возрастающая и знакопостоянная на некотором множестве (либо положительна, либо отрицательна), то $\frac{1}{f(x)}$ — убывающая. Аналогично с убывающей.
11. Если $f(x), g(x)$ — возрастающие неотрицательные функции, то $f(x)\cdot g(x)$ — возрастающая. Аналогично с убывающими.
12. Если $f(x)\leqslant 0$ и убывающая, $g(x)\geqslant 0$ и возрастающая, то $f(x)\cdot g(x)$ — убывающая.

Касание

- Касание двух функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$ в точке x_0 задается системой

$$\begin{cases} f(x_0)=g(x_0) \\ f'(x_0)=g'(x_0) \end{cases}$$

- Касание параболы $y=ax^2+bx+c$ с невертикальной прямой $y_k=kx+p$ можно находить, требуя единственного корня от уравнения $y=y_k$, то есть $D=0$ от

$$ax^2+bx+c=kx+p$$

- С гиперболой $y=\frac{a}{bx+c}+d$ и прямой $y_k=kx+p$ касание тоже можно находить, если потребовать единственного корня от уравнения $y=y_k$.

Работа с заменой

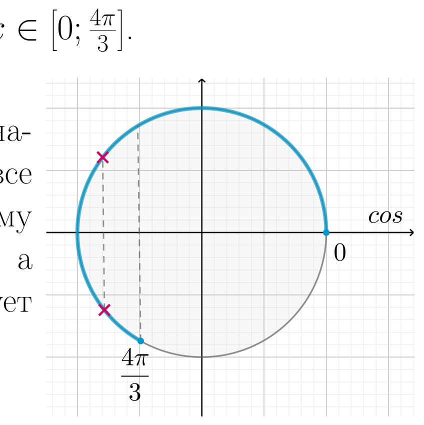
Исследовать новую переменную — значит понять, каким значениям новой переменной сколько соответствует значений старой переменной. Это требуется для того, чтобы переформулировать вопрос задачи, едь вы будете анализировать уже новое ур/нер/сист с новой неизвестной.

- $2a(x+1)^2-|x+1|+1=0$.

Замена $t=|x+1|$. Так как $|A|\geqslant 0\ \forall A$, то при $t<0$ решений x нет; $t=0$ дает один корень $x=-1$; каждый $t>0$ дает два корня $x=\pm t-1$.

- $\cos^2 x-(a+2)\cos x+2(a-1)=0$ при $x \in \left[0;\frac{4\pi}{3}\right]$.

Замена $t=\cos x$. Если x пробегает все значения из отрезка $\left[0;\frac{4\pi}{3}\right]$, то $\cos x$ пробегает все значения из отрезка $[-1;1]$, причем каждому $t \in (-1;-0,5]$ соответствует два угла x, а каждому $t \in \{-1\}\cup(-0,5;1]$ соответствует ровно один корень x.



- $4^{\sqrt{1-x^2}}+a\cdot 2^{\sqrt{1-x^2}}+a^2-1=0$

Замена $t=2^y$, $y=\sqrt{p}$, $p=1-x^2$. Заметим, что $0\leqslant p\leqslant 1$, причем $p=1$ дает один корень $x=0$, а каждый из $0\leqslant p<1$ дает по два корня x, остальные p корней не дают. Следовательно, $y=\sqrt{1}=1$ дает один x, каждый из $\sqrt{0}\leqslant y=\sqrt{p}<\sqrt{1}$ дает по два x. Тогда $t=2^y\big|_{y=1}=2$ дает один корень $x=0$, каждый из $1\leqslant t=2^y<2$ дает по два корня x.

Метод главного модуля (МГМ)

У функции $f(x)=m|x-a|+n|x-b|$ с $m>n$ главным модулем называется модуль с большим коэффициентом m. При переходе через нуль главного модуля, то есть точку $x=a$, происходит смена характера монотонности функции. То есть то, как себя ведет $n|x-b|$, не влияет на характер монотонности функции $f(x)$ в целом.
Например, для $f(x)=9|x-a|-2|x-b|$ при $x<a$ функция убывает, а при $x\geqslant a$ возрастает.

Примеры, где встречается

- $f(x)=3\sqrt[5]{6,2x-5,2}+4\log_5(4x+1)+5a=0$ (МГМ).

  Так как функции $y=\sqrt[5]{x}$, $y=6,2x-5,2$, $y=\log_5 x$, $y=4x+1$ возрастающие, то композиции этих функций — возрастающие функции, следовательно, $y=f(x)$ — возрастающая. Значит, уравнение $f(x)=0$ имеет не более одного корня.

- $64x^6+4x^2=(3x+a)^3+3x+a$ (свойство функций 4).

  Рассмотрим возрастающую функцию $f(t)=t^3+t$. Тогда уравнение имеет вид $f(4x^2)=f(3x+a)$. Из-за строгой монотонности $y=f(x)$ следует, что полученное уравнение равносильно $4x^2=3x+a$.

- $x^3+ax^2+13x-6=0$ (свойство функций 3).

  Исследуем уравнение, разделив обе части на x^2, так как $x=0$ не является корнем. Получим $a=-x-\frac{13}{x}+\frac{6}{x^2}$. Получили уравнение в виде $a=f(x)$. Далее исследуем функцию $y=f(x)$ (с помощью свойств 1-12 либо через производную), рисуем ее схематичный график. Если, например, уравнение должно иметь одно решение, то ищем такие горизонтальные прямые $y=a$, при которых с графиком $y=f(x)$ имеется одна точка пересечения.

- $\log_a(ax)=2-x^5$ при $a>1$ (свойство функций 6).

  Функция $f(x)=\log_a(ax)$ при $a>1$ возрастающая, функция $g(x)=2-x^5$ убывающая, следовательно, уравнение $f(x)=g(x)$ имеет не более одного решения. Подбором находим корень $x=1$.
  P.S. Да, обращаем внимание, что подбор корня в параметре — не редкость. Как видите, в этой задаче мы доказали, что корней не более одного и один нашли, значит, решение полно.

- $f(x)=4-|3x-|x+a||-9|x-1|=0$ (МГМ).

  Главным модулем является $|x-1|$. Выражение $|3x-|x+a||$ при всех возможных способах раскрытия модулей будет выглядеть как линейное $kx+b$, где $k \in \{\pm 2;\pm 4\}$.
  Таким образом, при $x<1$ получим $f(x)=Ax+B$, где $A \in \{9\pm 2; 9\pm 4\}$, то есть $A>0$, следовательно, $f(x)\uparrow$ (возрастает).
  При $x\geqslant 1$ получим $f(x)=Ax+B$, где $A \in \{-9\pm 2;-9\pm 4\}$, то есть $A<0$, следовательно, $f(x)\downarrow$ (убывает).

Метод оценки

Если $f(x)\geqslant c$, $g(x)\leqslant c$ при любом x, а $c=\mathrm{const}$, то равенство

$$f(x)=g(x)$$

возможно тогда и только тогда, когда $f(x)=g(x)=c$.

Функции с интересной областью значений

Функция	Область значений (значение y)	Область определения (значение x)
$y=x^2$	$y\geqslant 0$	$x\in\mathbb{R}$
$y=x+\frac{1}{x}$	$y\geqslant 2$, если $x>0$ $y\leqslant -2$, если $x<0$	$x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$
$y=\lvert x\rvert+\lvert 1-x\rvert$	$y\geqslant 1$, причем $y=1$, если $x\in[0;1]$	$x\in\mathbb{R}$
$y=\lvert x-a\rvert+\lvert x+a\rvert$	$y\geqslant 2\lvert a\rvert$, причем $y=2\lvert a\rvert$, если $x\in[-\lvert a\rvert;\lvert a\rvert]$	$x\in\mathbb{R}$

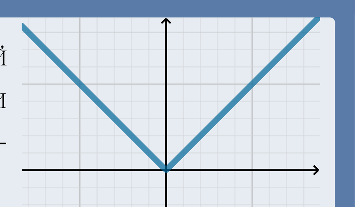
Важные неравенства

- $\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2}{2}}\geqslant\frac{a_1+a_2}{2}\geqslant\sqrt{a_1a_2}\geqslant\frac{2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}}$ при $a_1,a_2>0$
- $|a|-|b|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$

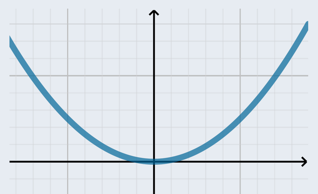
17 задание из ЕГЭ

2022

Часто встречающиеся графики

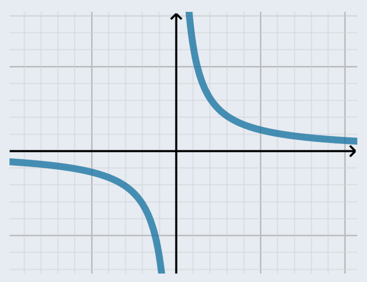


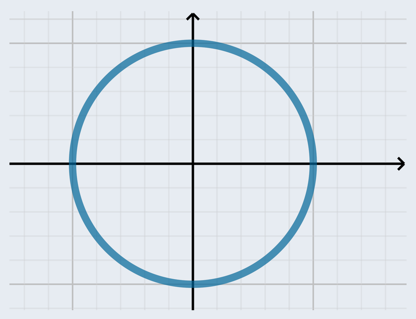
• Уголок $y = a|x - x_0| + y_0$ с вершиной $O(x_0; y_0)$. Ветви направлены вверх/вниз при $a > 0/a < 0$ соответственно. График симметричен относительно $x = x_0$.



• Парабола $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ с вершиной $O(x_0; y_0)$. Ветви направлены вверх/вниз при $a > 0/a < 0$ соответственно. График симметричен относительно $x = x_0$.

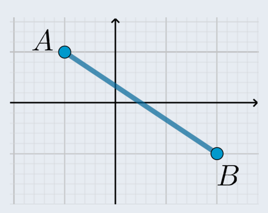
• Гипербола $y = \frac{a}{x - x_0} + y_0$ с точкой пересечения асимптот $O(x_0; y_0)$. График находится в I и III/II и IV четвертях при $a > 0/a < 0$ соответственно и симметричен относительно точки пересечения асимптот.

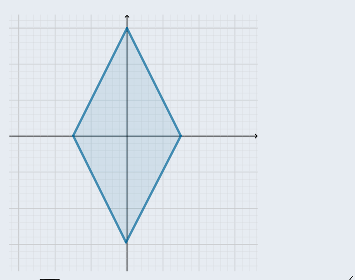




• Окружность
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$
с центром $O(x_0; y_0)$ и радиусом $R > 0$.
Верхняя полуокружность
$y = \sqrt{c + bx + ax^2}$, $a < 0$.

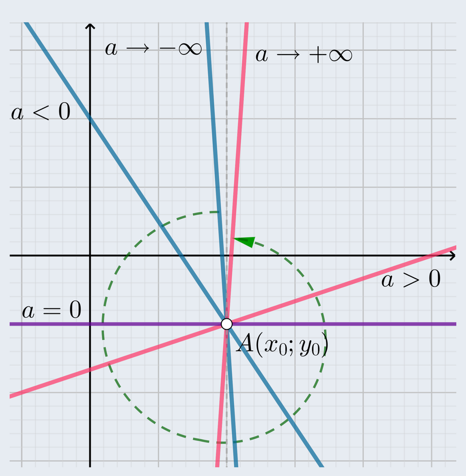
• Отрезок AB:
$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} + \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} =$
$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$
с концами в точках $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$.



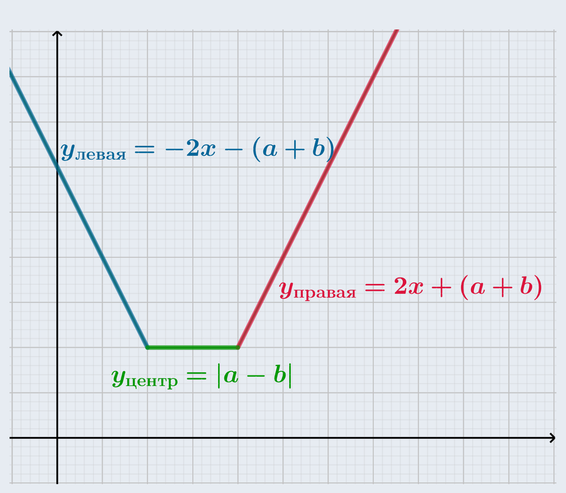


• Ромб $a|x - x_0| + b|y - y_0| = c$.
$O(x_0; y_0)$ — точка пересечения диагоналей, которые параллельны осям координат.
Квадрат $|x - x_0| + |y - y_0| = c$.

• Пучок прямых $y = a(x - x_0) + y_0$. Это семейство прямых, проходящих при любом значении параметра a через фиксированную (не зависящую от a!) точку $A(x_0; y_0)$. Меняя параметр, можно задать любую прямую, проходящую через точку A, кроме вертикальной прямой (так как в уравнении вертикальной прямой отсутствует коэффициент перед y).



Такое семейство удобно рассматривать, меняя a от $-\infty$ к $+\infty$. Тогда можно сказать, что мы вращаем прямую, закрепленную в точке A, против часовой стрелки, от положения, близкого к вертикальному слева, до положения, близкого к вертикальному справа.



• Сумма двух модулей от линейных многочленов, называемая в народе “корыто”:
$y = |x + a| + |x + b|$.
Коэффициенты перед x обязательно одинаковы.
На рисунке изображен график $y = |2 - x| + |x - 1|$, где $a = -2$, $b = -1$.
Как построить график подобной функции?

Покажем на примере функции $y = |2 - x| + |x - 1|$.

1. Меняем знаки внутри модулей на противоположные (для удобства), если это нужно, чтобы перед x были положительные коэффициенты: $y = |x - 2| + |x - 1|$.
2. Если модули раскрываются с одинаковым знаком, то в итоге мы получаем либо сумму подмодульных выражений $\Sigma = 2x + (-2 - 1)$, либо противоположное ей значение $-\Sigma = -2x - (-2 - 1)$. Это правая и левая ветви корыта соответственно — симметричные относительно вертикали лучи с противоположными угловыми коэффициентами. Тогда $y_{\text{правая}} = 2x + (-2 - 1)$ при $x \geqslant 2$,
$y_{\text{левая}} = -2x - (-2 - 1)$ при $x \leqslant 1$.
3. Если модули раскрываются с разными знаками, то в итоге мы получим модуль разности подмодульных выражений, то есть модуль разности чисел a и b: $|x - 2 - (x - 1)| = |-2 - (-1)|$. Это центральная часть корыта — отрезок горизонтальной прямой $y_{\text{центр}} = |-2 - (-1)|$ при $1 < x < 2$.
Обращаем внимание, что $y_{\text{центр}} \geqslant 0 \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$.

Такой принцип построения удобен, когда числа a, b не фиксированы, а зависят от параметра.

Траектория движения графика

Для того, чтобы понять, как движется график функции, зависящей от параметра, если мы меняем значения параметра, нужно зафиксировать любую точку графика и найти траекторию движения этой точки.

• $y = 2|x - a| + a^2$.
Рассмотрим вершину уголка $(a; a^2)$. Тогда $x_0 = a$, $y_0 = a^2$. Выразив a из одного равенства и подставив в другое, получим зависимость между x_0 и y_0 — это и будет траектория движения этой точки, следовательно, и всего графика. В нашем случае $y_0 = x_0^2$, следовательно, уголок $y = 2|x|$ движется по параболе $y = x^2$.

• $y = 3(5a - 3x + 9)^2 - 2a$.
Для начала преобразуем $y = 27\left(x - \frac{5a+9}{3}\right)^2 - 2a$. Отсюда $x_0 = \frac{5a+9}{3}$, $y_0 = -2a$. Выразим $a = \frac{3x_0 - 9}{5}$ и подставим в $y_0 = -2a = -\frac{2}{5}(3x_0 - 9)$. Значит, парабола $y = 27x^2$ движется по прямой $y = -\frac{2}{5}(3x - 9)$.

• $\left(x - \frac{1}{a}\right)^2 + (y - 2a)^2 = 1$.
Центр окружности $\left(\frac{1}{a}; 2a\right)$. Значит, $x_0 = \frac{1}{a}$, $y_0 = 2a$. Тогда $a = \frac{1}{x_0}$ и $y_0 = \frac{2}{x_0}$. То есть центр окружности движется по гиперболе $y = \frac{2}{x}$.

Симметрия (инвариантность)

Существуют выражения $f(x)$, при подстановке в которые вместо x некоторого выражения $g(x)$, исходное выражение не меняется, то есть $f(x) = f(g(x))$. Такие выражения f называются инвариантными относительно такой подстановки. Допустим, нам дано уравнение $f(x) + f(c - x) = 0$. Оно инвариантно относительно замены x на $c - x$. Следовательно, если $x = x_0$ — решение уравнения, следовательно, $x = c - x_0$ тоже является его корнем. Чаще всего в задачах с этой идеей требуется наличие одного корня, что означает, что числа, образующие пару, должны совпадать, то есть $x_0 = c - x_0$. Но это не означает, что у уравнения нет других корней $x \neq x_0$, следовательно, решение подобной задачи складывается из следующих шагов:

1. найти инвариантность относительно замены x_0 на $g(x_0)$ и установить, какое число X может быть единственным решением, решив $x_0 = g(x_0)$;
2. подставить X в данное ур/нер/сист и найти соответствующие значения параметра;
3. выполнить проверку найденных a: определить, при каких a других корней ур/нер/сист не имеет (они и составят ответ), а при каких — имеет (они нам не подойдут).

Пример, где встречается

Найдите все значения параметра a, при которых уравнение
$$x^2 - 2a\sin(\cos x) + a^2 = 0$$
имеет единственное решение.

---

1. Заметим, что данное уравнение симметрично относительно замены x на $-x$: $(-x)^2 - 2a\sin(\cos(-x)) + a^2 = x^2 - 2a\sin(\cos x) + a^2$. Следовательно, если уравнение имеет корень $x_0 \neq 0$, то оно имеет и корень $-x_0$. Таким образом, для того, чтобы уравнение имело единственный корень, этим корнем должен быть решение уравнения $x_0 = -x_0$, то есть $x_0 = 0$.
2. Пусть $x = 0$, тогда
$$-2a\sin 1 + a^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0; 2\sin 1.$$
3. Проверим, действительно ли при найденных значениях a корень $x = 0$ единственный.
   • Пусть $a = 0$. Тогда уравнение примет вид $x^2 = 0$. Полученное уравнение имеет один корень. Нам это подходит.
   • Пусть $a = 2\sin 1$. Тогда уравнение примет вид
   $$x^2 - 4\sin 1\sin(\cos x) + 4\sin^2 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 4\sin^2 1 = 4\sin 1\sin(\cos x)$$
   Применим Оценим области значений левой и правой частей равенства. Левая часть уравнения $x^2 + 4\sin^2 1 \geqslant 4\sin^2 1$ при любом $x \in \mathbb{R}$. Далее, так как при любом $x \in \mathbb{R}$:
   $$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \quad (\text{т.к. } [-1; 1]) \subset \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2};\right]$$
   $$-\sin 1 \leqslant \sin(\cos x) \leqslant \sin 1 \quad (\text{т.к. } y = \sin x \uparrow \text{ на } [-1; 1])$$
   $$-4\sin^2 1 \leqslant 4\sin 1\sin(\cos x) \leqslant 4\sin^2 1 \quad (\text{т.к. } 4\sin 1 > 0)$$
   Следовательно, по методу оценки равенство возможно тогда и только тогда, когда
   $$\begin{cases} x^2 + 4\sin^2 1 = 4\sin^2 1 \\ 4\sin 1\sin(\cos x) = 4\sin^2 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$
   Это значение a также подходит.

   Ответ: $a = 0; 2\sin 1$.

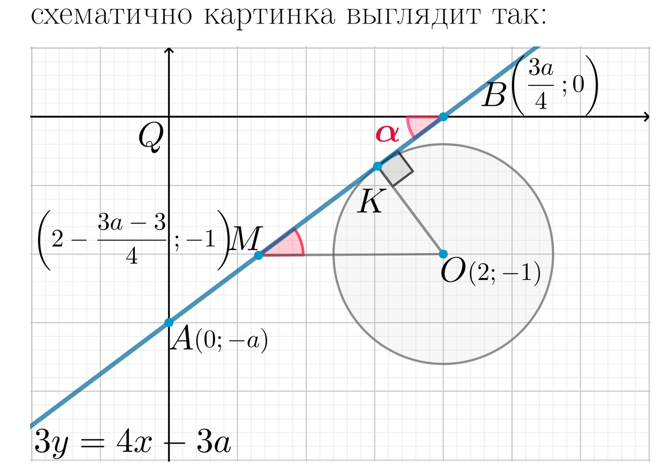
Формула расстояния от точки до прямой

Расстояние ρ от точки $O(x_0; y_0)$ до прямой, заданной уравнением $ax + by + c = 0$, ищется по формуле
$$\rho = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$
Замечание: если прямая задана в виде $y = kx + b$, то ее уравнение нужно переписать в вид $kx - y + b = 0$.

Учимся искать касание прямой и окружности на примерах

Вспомним, что если прямая касается окружности, от радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной. Иными словами, расстояние от центра окружности до прямой равно раиусу тогда и только тогда, когда эта прямая — касательная.
Пусть даны: касательная $3y = 4x - 3a$;
окружность $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = a^2$, $a \neq 0$.

1. Расстояние от центра окружности до касательной равно радиусу окружности, следовательно, перепишем уравнение прямой как $4x - 3y - 3a = 0$, центр окружности — точка $(2; -1)$, радиус $R = \sqrt{a^2} = |a|$. Применим формулу
$$|a| = \frac{|4 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) - 3a|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|3a - 11|}{5} \quad \Leftrightarrow \quad 5|a| = |3a - 11|$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} 5a &= 3a - 11 \\ 5a &= -(3a - 11) \end{aligned}\right. \quad \Leftrightarrow \quad a = -\frac{11}{2}; \frac{11}{8}.$$
2. Если прямая имеет с окружностью одну точку пересечения, то она является касательной к окружности, следовательно, имеет единственное решение следующая система:
$$\begin{cases} 3y = 4x - 3a \\ (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = a^2 \;\Big|\cdot 9 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3y = 4x - 3a \\ 9(x - 2)^2 + (4x - 3a + 3)^2 = 9a^2 \end{cases}$$
Преобразуем второе уравнение $25x^2 - 12(1 + 2a)x + 9(5 - 2a) = 0$. Его дискриминант должен равняться нулю, то есть $D = 36(16a^2 + 66a - 121) = 0$. Получаем те же $a = -\frac{11}{2}; \frac{11}{8}$.
3. Можно искать касание с помощью геометрии и тригонометрии. Пусть схематично картинка выглядит так:



$R = OK$ — радиус, точки A, B — точки пересечения касательной с осями координат, α — угол наклона касательной AB. Тогда $\angle KBO = 90° - \alpha$, значит, $\angle KOB = \alpha$.

Получили $\triangle AQB \sim \triangle BKO$ ($OM \parallel QB$):
$$\frac{QA}{OK} = \frac{AB}{OM^\star} \quad \Leftrightarrow \quad |a| : |a| = \sqrt{a^2 + \frac{9a^2}{16}} : \left|\frac{3a - 11}{4}\right|$$
* $OM = |x_M - x_O| = \left|2 - \frac{3a-3}{4}\right|$. Получили то же равенство $5|a| = |3a - 11|$, откуда находим те же значения a.

Идея решения задачи и как ее записать, чтоб отхватить баллы

При решении задачи от вас требуется описать, что за объекты вы имеете и что должно с ними произойти, чтобы выполнилось условие задачи. Даже если вы не доведете решение до конца, вам будут поставлены баллы за исследование и идею.

Например, у вас есть система и требуется определить a, при которых ее решение единственно.
$$\begin{cases} (x - a)^2 + (y + 2a)^2 = 1 - a \\ x^2 + y^2 = a - 2 \end{cases}$$

Покажем, что такое идея без вычислений.

• При $a - 2 > 0$, $1 - a > 0$ первое и второе уравнения задают окружности с центрами $O_1(a; -2a)$, $O_2(0; 0)$ и радиусами $R_1 = \sqrt{1 - a}$ и $R_2 = \sqrt{a - 2}$ соответственно. Две окружности имеют одну точку пересечения, если они не совпадают и касаются друг друга либо внутренним образом (тогда $O_1O_2 = |R_1 - R_2|$), либо внешним образом (тогда $O_1O_2 = R_1 + R_2$). Из этих равенств получим нужные a.
• Если одно из $(a - 2)$ и $(1 - a)$ равно нулю (а другое неотрицательное), то соответствующее этому выражению уравнение задает точку, которая либо удовлетворяет второму уравнению (тогда найдено подходящее a), либо нет.
• Если хотя бы одно из $(a - 2)$ и $(1 - a)$ отрицательно, то решений нет (и нет подходящих a).

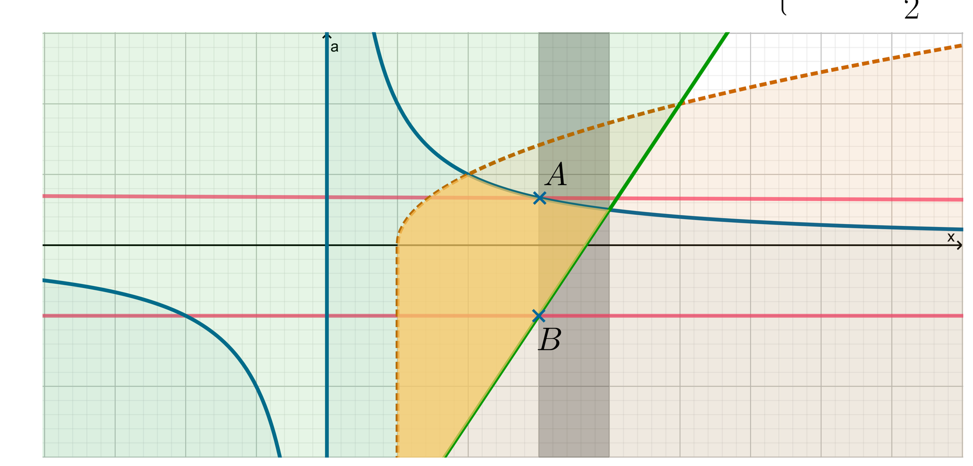
Метод xOa

Пусть дано уравнение, неравенство или система, зависящие от x и a. Рассмотрим параметр a как переменную (точнее, как ординату, то есть как в обычных задачах мы рассматриваем переменную y). Построим в системе координат xOa множество S решений ур/нер/сист. Если некоторая точка плоскости с координатами $(x_0; a_0)$ принадлежит этому множеству S, то для исходной задачи это означает, что если параметр a принимает значение a_0, то x_0 будет одним из решений ур/нер/сист. В задаче будет требоваться найти все такие значения a_0 параметра a, при каждом из которых n точек $(x_0; a_0)$ принадлежат множеству решений S, изображенному на плоскости xOa. Фактически это равносильно тому, что горизонтальная прямая $a = a_0$ имеет n точек пересечения со множеством S.

Пример, где встречается

При каких a имеет хотя бы одно решение на отрезке $[3; 4]$ следующая система:
$$\begin{cases} ax \leqslant 2 \\ \sqrt{x - 1} > a \\ 3x \leqslant 2a + 11 \end{cases}$$
(задача из досрочной волны 2017 года)

Заметим, что $x - 1 \geqslant 1$, следовательно, $x > 0$. Систему можно переписать. Желтая область — множество S, являющееся решением системы. Серая полоса соответствует $x \in [3; 4]$.
$$\begin{cases} a \leqslant \dfrac{2}{x} \\ a < \sqrt{x - 1} \\ a \geqslant \dfrac{3x - 11}{2} \end{cases}$$



Таким образом, нам подходят все горизонтальные прямые $y = a$, находящиеся между прямыми, проходящими через точки A и B:
$$A: \begin{cases} a = \dfrac{2}{x} \\ x = 3 \end{cases} \qquad B: \begin{cases} 3x = 2a + 11 \\ x = 3 \end{cases}$$
Имеем $A\left(3; \frac{2}{3}\right)$, $B(3; -1)$. Тогда ответ $-1 \leqslant a \leqslant \frac{2}{3}$.

Важные замечания

1. Прежде чем исследовать некоторую функцию, ее надо ввести, если это не сделано. Например, вам дано уравнение $x^2 + ax + 3 = 0$. Вводим квадратичную функцию $f(x) = x^2 + ax + 3$, графиком которой является парабола. И далее решение.
2. Если дано уравнение $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = g(a)$, напоминающее уравнение окружности, но на месте R^2 стоит выражение с параметром, то следует рассмотреть три случая по отдельности:
   • $g(a) < 0$, тогда уравнение задает пустое множество;
   • $g(a) = 0$, тогда уравнение задает одну точку $(x_0; y_0)$;
   • $g(a) > 0$, тогда уравнение задает окружность с центром $(x_0; y_0)$ и радиусом $R = \sqrt{g(a)}$.
3. Если дано уравнение, напоминающее уравнение окружности, например, $A(x - x_0)^2 + B(y - y_0)^2 = C$, $A, B, C > 0$, то с помощью замены координат его легко свести к уравнению окружности. Достаточно переписать уравнение как $(\sqrt{A}x - \sqrt{A}x_0)^2 + (\sqrt{B}y - \sqrt{B}y_0)^2 = C$ и заменить $x' = \sqrt{A}x$, $y' = \sqrt{B}y$. Получим уравнение окружности $(x' - \sqrt{A}x_0)^2 + (y' - \sqrt{B}y_0)^2 = C$.
4. Если сказано: “из решения уравнения 1 следует решение уравнения 2”, это означает, что множество U_1 решений уравнения 1 содержится или совпадает со множеством U_2 решений уравнения 2: $U_1 \subseteq U_2$.
Если сказано: “уравнение 1 равносильно уравнению 2”, это означает, что из уравнения 1 следует уравнение 2 и наоборот: из уравнения 2 следует уравнение 1, то есть множества решений этих уравнений одинаковы: $U_1 = U_2$.