



Задачи №17 из сборника И.В. Яценко 2025

09.03.2025

№1 #107105

Окружность с центром в точке O вписана в ромб $ABCD$ и касается его сторон AB , CD и AD соответственно в точках F , K и P .

- Докажите, что прямая FP параллельна диагонали ромба BD .
- Найдите длину диагонали BD , если известно, что $FP = 12$ и $PK = 5$.

№2 #107106

Окружность с центром в точке O вписана в ромб $ABCD$ и касается его сторон AB , CD и AD соответственно в точках F , K и P .

- Докажите, что прямая FP параллельна диагонали ромба BD .
- Найдите площадь ромба $ABCD$, если известно, что $FP = 6$ и $PK = 8$.

№3 #107107

В параллелограмме $ABCD$ с острым углом BAD точка E — середина стороны BC . Через точку B перпендикулярно прямой AB и через точку E перпендикулярно прямой DE проведены соответственно две прямые, которые пересекаются в точке K .

- Докажите, что $AK = KD$.
- Найдите угол BAD , если расстояние от точки K до прямой AD равно длине отрезка EC и $\angle CED = 58^\circ$.

№4 #107109

В параллелограмме $ABCD$ с острым углом BAD точка E — середина стороны BC . Через точку B перпендикулярно прямой AB и через точку E перпендикулярно прямой DE проведены соответственно две прямые, которые пересекаются в точке K .

- Докажите, что $AK = KD$.
- Найдите угол ADE , если расстояние от точки K до прямой AD равно длине отрезка EC и $\angle ADC = 110^\circ$.

№5 #107110

В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла BAD пересекает сторону BC в точке K , а продолжение стороны DC — в точке P ; диагональ AC является биссектрисой угла KAD .

- Докажите, что $PC^2 = CD \cdot PK$.
- Найдите $AC : AP$, если $BC : AB = 2,5$.

**№6 #107113**

В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла BAD пересекает сторону BC в точке K , а продолжение стороны DC — в точке P ; диагональ AC является биссектрисой угла KAD .

- Докажите, что $PC^2 = CD \cdot PK$.
- Найдите $AC : AP$, если $AB : BC = 3 : 8$.

№7 #107116

В треугольнике ABC точки N и P — середины сторон AB и BC соответственно. Отрезок NP касается окружности, вписанной в треугольник ABC .

- Докажите, что периметр треугольника ABC равен $4AC$.
- Найдите площадь треугольника ABC , если его периметр равен 28, $\angle BAC = 120^\circ$.

№8 #107118

В треугольнике ABC точки N и P — середины сторон AB и BC соответственно. Отрезок NP касается окружности, вписанной в треугольник ABC .

- Докажите, что периметр треугольника ABC равен $4AC$.
- Найдите площадь треугольника ABC , если его периметр равен 24, $\angle BAC = 60^\circ$.

№9 #107123

В квадрате $ABCD$ на диагонали BD и на сторонах AB и BC отметили соответственно точки P , E и F такие, что $BE = BF$, а прямая, проходящая через точку P параллельно прямой AC , отсекает от квадрата треугольник, площадь которого равна площади четырёхугольника $EBFP$ и в четыре раза меньше площади квадрата.

- Докажите, что если $BP \cdot BE = \sqrt{2}$, то $AB = 2$.
- Найдите отношение площадей треугольников EPF и EBF .

№10 #107126

В квадрате $ABCD$ на диагонали BD и на сторонах AB и BC отметили соответственно точки P , E и F такие, что $BE = BF$, а прямая, проходящая через точку P параллельно прямой AC , отсекает от квадрата треугольник, площадь которого равна площади четырёхугольника $EBFP$ и в три раза меньше площади квадрата.

- Докажите, что если $BP \cdot BE = \sqrt{2}$, то $AB = \sqrt{3}$.
- Найдите отношение площадей треугольников EPF и EBF .

**№11 #63730**

Прямая, перпендикулярная стороне BC ромба $ABCD$, пересекает его диагональ AC в точке M , а диагональ BD в точке N , причем $AM : MC = 1 : 2$, $BN : ND = 1 : 3$.

- Докажите, что прямая MN делит сторону ромба BC в отношении $1 : 4$.
- Найдите сторону ромба, если $MN = \sqrt{12}$.

№12 #107129

Прямая, перпендикулярная стороне AB ромба $ABCD$, пересекает его диагональ AC в точке K , а диагональ BD — в точке L , причём $AK : KC = 1 : 3$, $BL : LD = 2 : 1$.

- Докажите, что прямая KL делит сторону ромба AB в отношении $1 : 4$.
- Найдите сторону ромба, если $KL = 6$.

№13 #72991

В прямоугольный треугольник ABC с прямым углом A вписана окружность с центром в точке O и радиусом R . К этой окружности параллельно прямой AB проведена касательная, которая пересекает стороны BC и AC в точках D и E соответственно. В треугольник CDE вписана окружность с центром в точке O_1 и радиусом r . Прямые OO_1 и AB пересекаются в точке P .

- Докажите, что $AP : PB = \cos \angle ACB$.
- Найдите площадь треугольника ABC , если $R = 6$, $r = 4$.

№14 #107177

В прямоугольный треугольник ABC с прямым углом A вписана окружность с центром в точке O и радиусом R . К этой окружности параллельно прямой AB проведена касательная, которая пересекает стороны BC и AC в точках D и E соответственно. В треугольник CDE вписана окружность с центром в точке O_1 и радиусом r . Прямые OO_1 и AB пересекаются в точке P .

- Докажите, что $AP : PB = \cos \angle ACB$.
- Найдите площадь треугольника ABC , если $R = 5$, $r = 3$.

№15 #72992

В трапеции $KLMN$ с основаниями KN и ML провели биссектрисы углов LKN и LMN , которые пересекаются в точке P . Через точку P параллельно прямой KN провели прямую, которая пересекает стороны LK и MN соответственно в точках A и B . При этом $AB = KL$.

- Докажите, что трапеция $KLMN$ равнобедренная.
- Найдите $\cos \angle LKN$, если $KP : PM = 2 : 3$, $AP : PB = 1 : 2$.

**№16 #107132**

В трапеции $KLMN$ с основаниями KN и ML провели биссектрисы углов LKN и LMN , которые пересекаются в точке P . Через точку P параллельно прямой KN провели прямую, которая пересекает стороны LK и MN соответственно в точках A и B . При этом $AB = KL$.

- Докажите, что трапеция $KLMN$ равнобедренная.
- Найдите $\cos \angle LKN$, если $KP : PM = 4 : 3$, $AP : PB = 3 : 2$.

№17 #72993

На стороне BC ромба $ABCD$ отметили точку E так, что $BE : EC = 1 : 4$. Через точку E перпендикулярно BC провели прямую, которая пересекает диагонали BD и AC в точках R и M соответственно, при этом $BR : RD = 1 : 3$.

- Докажите, что точка M делит отрезок AC в отношении $2 : 1$, считая от вершины C .
- Найдите периметр ромба $ABCD$, если $MR = 2\sqrt{3}$.

№18 #107178

На стороне BC ромба $ABCD$ отметили точку E так, что $BE : EC = 1 : 3$. Через точку E перпендикулярно BC провели прямую, которая пересекает диагонали BD и AC в точках R и M соответственно, при этом $BR : RD = 1 : 2$.

- Докажите, что точка M делит отрезок AC в отношении $3 : 2$, считая от вершины C .
- Найдите периметр ромба $ABCD$, если $MR = \sqrt{15}$.

№19 #72994

В равнобедренной трапеции $ABCD$ боковая сторона AB равна a , а основание $AD = c$ больше основания $BC = b$. Построена окружность, касающаяся сторон AB , CD и AD .

- Докажите, что если $b + c > 2a$, то окружность пересекает сторону BC в двух точках.
- Найдите длину той части отрезка BC , которая находится внутри окружности, если $c = 12$, $b = 10$, $a = 8$.

№20 #107179

В равнобедренной трапеции $ABCD$ боковая сторона AB равна a , а основание $AD = c$ больше основания $BC = b$. Построена окружность, касающаяся сторон AB , CD и AD .

- Докажите, что если окружность не пересекает сторону BC , то $b + c < 2a$.
- Найдите длину той части средней линии трапеции $ABCD$, которая находится внутри окружности, если $c = 12$, $b = 6$, $a = 10$.

**№21 #46962**

В параллелограмме $ABCD$ угол BAC вдвое больше угла CAD . Биссектриса угла BAC пересекает отрезок BC в точке L . На продолжении стороны CD за точку D выбрана такая точка E , что $AE = CE$.

- Докажите, что $AL : AC = AB : BC$.
- Найдите EL , если $AC = 21$, $\text{tg } \angle BCA = 0,4$.

№22 #74768

В параллелограмме $ABCD$ угол BAC вдвое больше угла CAD . Биссектриса угла BAC пересекает отрезок BC в точке L . На продолжении стороны CD за точку D выбрана такая точка E , что $AE = CE$.

- Докажите, что $AB : AL = BC : AC$.
- Найдите EL , если $AC = 24$, $\text{tg } \angle BCA = 0,6$.

№23 #47016

Четырехугольник $ABCD$ со сторонами $BC = 7$ и $AB = CD = 20$ вписан в окружность радиусом $R = 16$.

- Докажите, что прямые BC и AD параллельны.
- Найдите AD .

№24 #72997

Четырехугольник $ABCD$ со сторонами $BC = 14$ и $AB = CD = 40$ вписан в окружность радиусом $R = 25$.

- Докажите, что прямые BC и AD параллельны.
- Найдите AD .

№25 #47030

В трапеции $ABCD$ с меньшим основанием BC точки E и F — середины сторон BC и AD соответственно. В каждый из четырехугольников $ABEF$ и $ECDF$ можно вписать окружность.

- Докажите, что трапеция $ABCD$ равнобедренная.
- Найдите радиус окружности, описанной около трапеции $ABCD$, если $AB = 7$, а радиус окружности, вписанной в четырехугольник $ABEF$, равен $2,5$.

**№26 #72998**

В трапеции $ABCD$ с меньшим основанием BC точки E и F — середины сторон BC и AD соответственно. В каждый из четырехугольников $ABEF$ и $ECDF$ можно вписать окружность.

- Докажите, что трапеция $ABCD$ равнобедренная.
- Найдите радиус окружности, описанной около трапеции $ABCD$, если $BC = 16$, а радиус окружности, вписанной в четырехугольник $ABEF$, равен 7.

№27 #46963

Окружность с центром в точке C касается гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC и пересекает его катеты AC и BC в точках E и F . Точка D — основание высоты, опущенной из вершины C . Точки I и J — центры окружностей, вписанных в треугольники BCD и ACD .

- Докажите, что I и J лежат на отрезке EF .
- Найдите расстояние от точки C до прямой IJ , если $AC = 15$, $BC = 20$.

№28 #107274

Окружность с центром в точке C касается гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC и пересекает его катеты AC и BC в точках E и F . Точка D — основание высоты, опущенной на AB . Точки I и J — центры окружностей, вписанных в треугольники BCD и ACD .

- Докажите, что E и F лежат на прямой IJ .
- Найдите расстояние от точки C до прямой IJ , если $AC = 2\sqrt{3}$, $BC = 2$.

№29 #47252

На сторонах AB и CD четырехугольника $ABCD$, около которого можно описать окружность, отмечены точки K и N соответственно. Около четырехугольников $AKND$ и $BCNK$ также можно описать окружность. Косинус одного из углов четырехугольника $ABCD$ равен $0,25$.

- Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является равнобедренной трапецией.
- Найдите радиус окружности, описанной около четырехугольника $AKND$, если радиус окружности, описанной около четырехугольника $ABCD$, равен 8, $AK : KB = 2 : 5$, а $BC < AD$ и $BC = 4$.

№30 #107277

На сторонах AB и CD четырехугольника $ABCD$, около которого можно описать окружность, отмечены точки K и N соответственно. Около четырехугольников $AKND$ и $BCNK$ также можно описать окружность. Косинус одного из углов четырехугольника $ABCD$ равен $0,2$.

- Докажите, что прямые KN и AD параллельны.
- Найдите радиус окружности, описанной около четырехугольника $BCNK$, если радиус окружности, описанной около четырехугольника $ABCD$, равен 7, $AK : KB = 9 : 10$, а $BC < AD$ и $BC = 10$.

**№31 #46964**

Точки A, B, C, D и E лежат на окружности в указанном порядке, причем $AE = ED = CD$, а прямые AC и BE перпендикулярны. Отрезки AC и BD пересекаются в точке T .

- Докажите, что прямая EC пересекает отрезок TD в его середине.
- Найдите площадь треугольника ABT , если $BD = 6$, $AE = \sqrt{6}$.

№32 #72999

Точки A, B, C, D и E лежат на окружности в указанном порядке, причем $BC = CD = DE$, а $AC \perp BE$. Точка K — пересечение прямых BE и AD .

- Докажите, что прямая CE делит отрезок KD пополам.
- Найдите площадь треугольника ABK , если $AD = 4$, $CD = \sqrt{3}$.

№33 #47279

В параллелограмме $ABCD$ угол A острый. На продолжениях сторон AD и CD за точку D выбраны точки M и N соответственно, причем $AN = AD$ и $CM = CD$.

- Докажите, что $BN = BM$.
- Найдите MN , если $AC = 5$, $\sin \angle BAD = \frac{5}{13}$.

№34 #72995

В параллелограмме $ABCD$ тангенс угла A равен 1,5. На продолжениях сторон AB и BC параллелограмма за точку B выбраны точки N и M соответственно, причем $BC = CN$ и $AB = AM$.

- Докажите, что $DN = DM$.
- Найдите MN , если $AC = \sqrt{13}$.

№35 #47310

Около окружности с центром O описана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC .

- Докажите, что $\angle AOB = \angle COD = 90^\circ$.
- Найдите отношение большего основания трапеции к меньшему, если известно, что $AB = CD$, а площадь четырехугольника с вершинами в точках касания окружности со сторонами трапеции составляет $\frac{12}{49}$ площади трапеции $ABCD$.

№36 #107280

Около окружности с центром O описана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC .

- Докажите, что треугольник AOB прямоугольный.
- Найдите отношение большего основания трапеции к меньшему, если известно, что $AB = CD$, а площадь четырехугольника с вершинами в точках касания окружности со сторонами трапеции составляет $\frac{16}{81}$ площади трапеции $ABCD$.



Ответы

- | | | |
|------------------------------|--------------------------|----------------------------------|
| 1. б) $\frac{169}{12}$ | 13. б) 270 | 26. б) $\frac{25}{7}\sqrt{1073}$ |
| 2. б) $\frac{625}{6}$ | 14. б) $\frac{500}{3}$ | 27. б) $6\sqrt{2}$ |
| 3. б) 77° | 15. б) 0,28 | 28. б) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ |
| 4. б) 65° | 16. б) $-\frac{17}{145}$ | 29. б) $\frac{2}{3}\sqrt{69}$ |
| 5. б) $\frac{\sqrt{14}}{5}$ | 17. б) $24\sqrt{2}$ | 30. б) $\frac{5\sqrt{22}}{4}$ |
| 6. б) $\frac{\sqrt{33}}{8}$ | 18. б) 60 | 31. б) $\frac{8\sqrt{5}}{3}$ |
| 7. б) $14\sqrt{3}$ | 19. б) $2\sqrt{21}$ | 32. б) $\frac{25}{64}\sqrt{39}$ |
| 8. б) $\frac{72\sqrt{3}}{5}$ | 20. б) $\sqrt{77}$ | 33. б) $\frac{120}{13}$ |
| 9. б) $4(2 - \sqrt{2})$ | 21. б) 14,2 | 34. б) 4 |
| 10. б) $6 - 2\sqrt{6}$ | 22. б) 29,7 | 35. б) 6 |
| 11. б) $6\sqrt{2}$ | 23. б) 32 | 36. б) 8 |
| 12. б) $6\sqrt{6}$ | 24. б) 42,16 | |
| | 25. б) 9,1 | |