

Теорема Виета

Если у квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ есть корни x_1, x_2 , то $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Обратная теорема Виета

Если известно, что сумма некоторых чисел $x + y = A$, их произведение $xy = B$, то если такие числа существуют, они являются корнями квадратного уравнения

$$p^2 - Ap + B = 0$$

Примеры, где встречается

- Найти сумму квадратов корней уравнения:

$$x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}$$

- Определить, когда ровно один из двух корней положительный:

$$\begin{cases} D > 0 \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} < 0 \end{cases}$$

- Определить, когда имеет единственное решение система:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = A \\ x + y = B \end{cases}$$

Так как $A = x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = B^2 - 2xy$, то $xy = 0,5(B^2 - A)$, следовательно, единственное решение у системы, если единственное решение имеет уравнение

$$p^2 - Bp + 0,5(B^2 - A) = 0$$

Метод хорошего/плохого корня

- Находим все потенциальные корни, которые может иметь исходное уравнение. Каждый из них будет корнем уравнения, если удовлетворяет "своим" условиям: ОДЗ и условию задачи (например, лежит в некотором отрезке). Пусть таких корней два.
- Назовем корень хорошим, если он удовлетворяет "своим" условиям, в противном случае — плохим. Найдем значения параметра a , при которых корень хороший. Пусть при $a \in A_1$ корень x_1 хороший, при $a \in A_2$ корень x_2 — хороший. Тогда при $a \in \mathbb{R} \setminus A_1$ корень x_1 — плохой, при $a \in \mathbb{R} \setminus A_2$ корень x_2 — плохой.
- Смотрим, сколько корней должно иметь уравнение по условию задачи. Если требуется наличие одного корня, то это возможно в одном из трех случаев:

- x_1 — хороший, x_2 — плохой $\begin{cases} a \in A_1 \\ a \in \mathbb{R} \setminus A_2 \end{cases}$
- x_1 — плохой, x_2 — хороший $\begin{cases} a \in A_2 \\ a \in \mathbb{R} \setminus A_1 \end{cases}$
- $x_1 = x_2$ — хорошие и совпадающие $\begin{cases} a \in A_1 \\ x_1 = x_2 \end{cases}$

Уравнения имеют общий корень

Если уравнения $f(x, a) = 0$ и $g(x, a) = 0$ имеют общий корень, то система

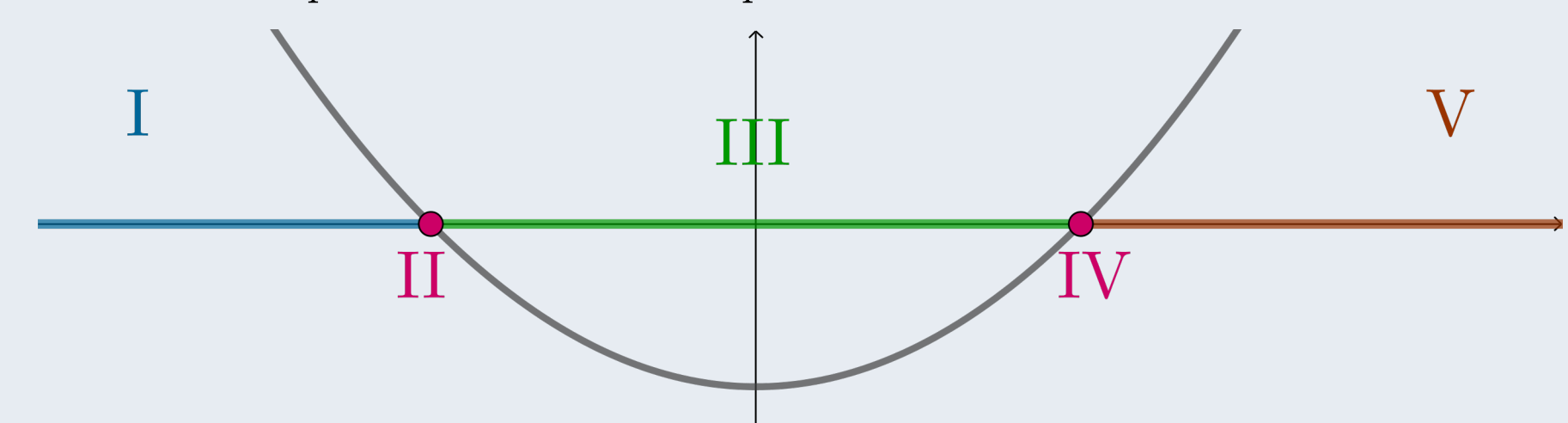
$$\begin{cases} f(x, a) = 0 \\ g(x, a) = 0 \end{cases}$$

имеет решения $(x_0; a_0)$. Причем число решений системы — число общих корней уравнений, где a_0 — значение параметра, при котором у уравнений x_0 — общий корень.

Квадратичная функция

Пусть $y = x^2 + bx + c$ с вершиной x_0 имеет две точки пересечения с осью абсцисс. Введем названия:

- I — место левее меньшего корня
- II — меньший корень
- III — место между корнями
- IV — больший корень
- V — место правее большего корня



Положение точки k относительно корней

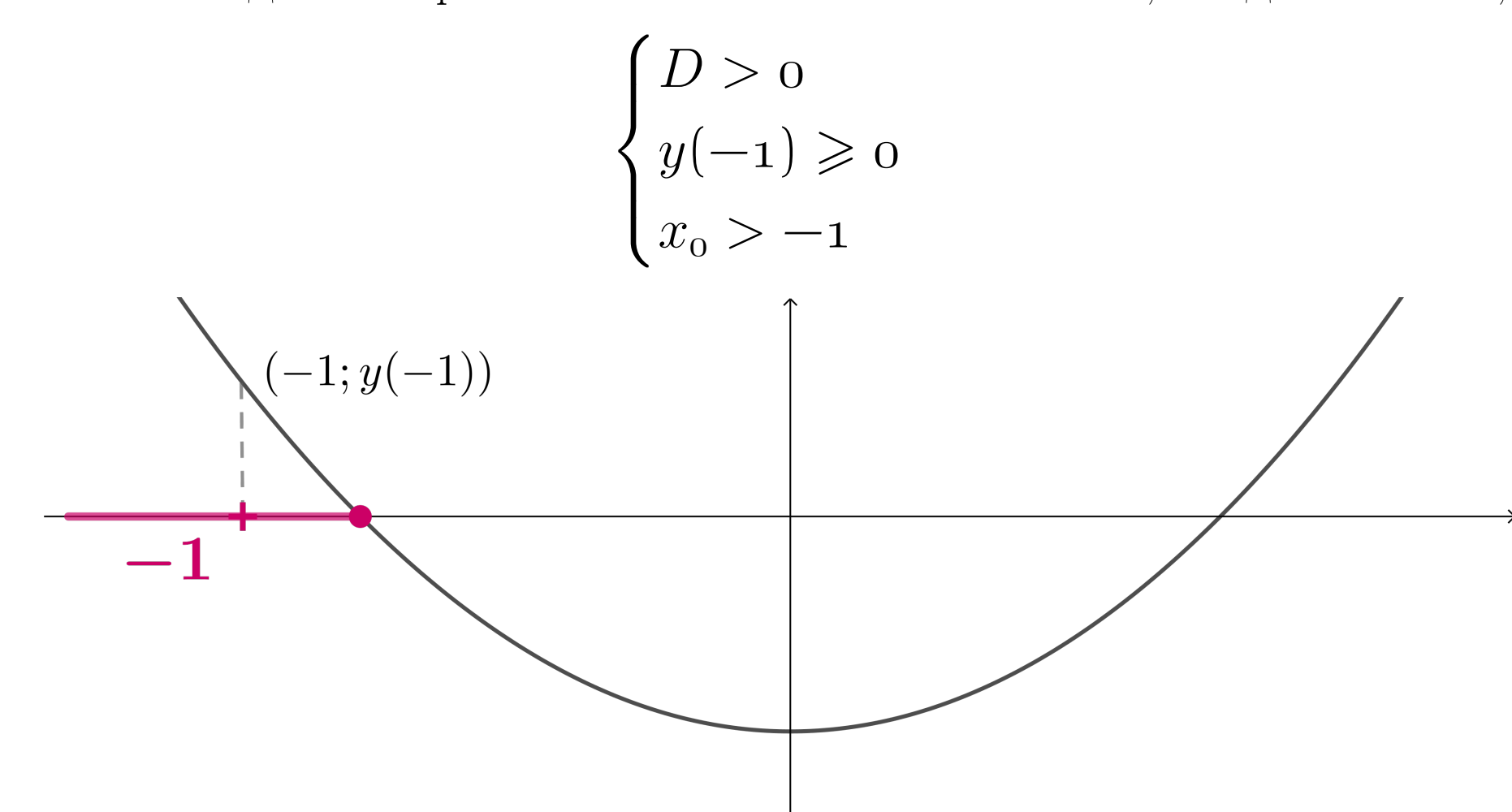
$$\bullet \text{ I: } \begin{cases} D > 0 \\ y(k) > 0 \\ x_0 > k \end{cases} \quad \bullet \text{ III: } y(k) < 0 \quad \bullet \text{ V: } \begin{cases} D > 0 \\ y(k) > 0 \\ x_0 < k \end{cases}$$

★ условие $D > 0$ необязательно, так как если у параболы с ветвями вверх есть хоть одна точка, где ее значение отрицательно, то она автоматически пересекает ось абсцисс в двух точках.

Примеры, где встречается

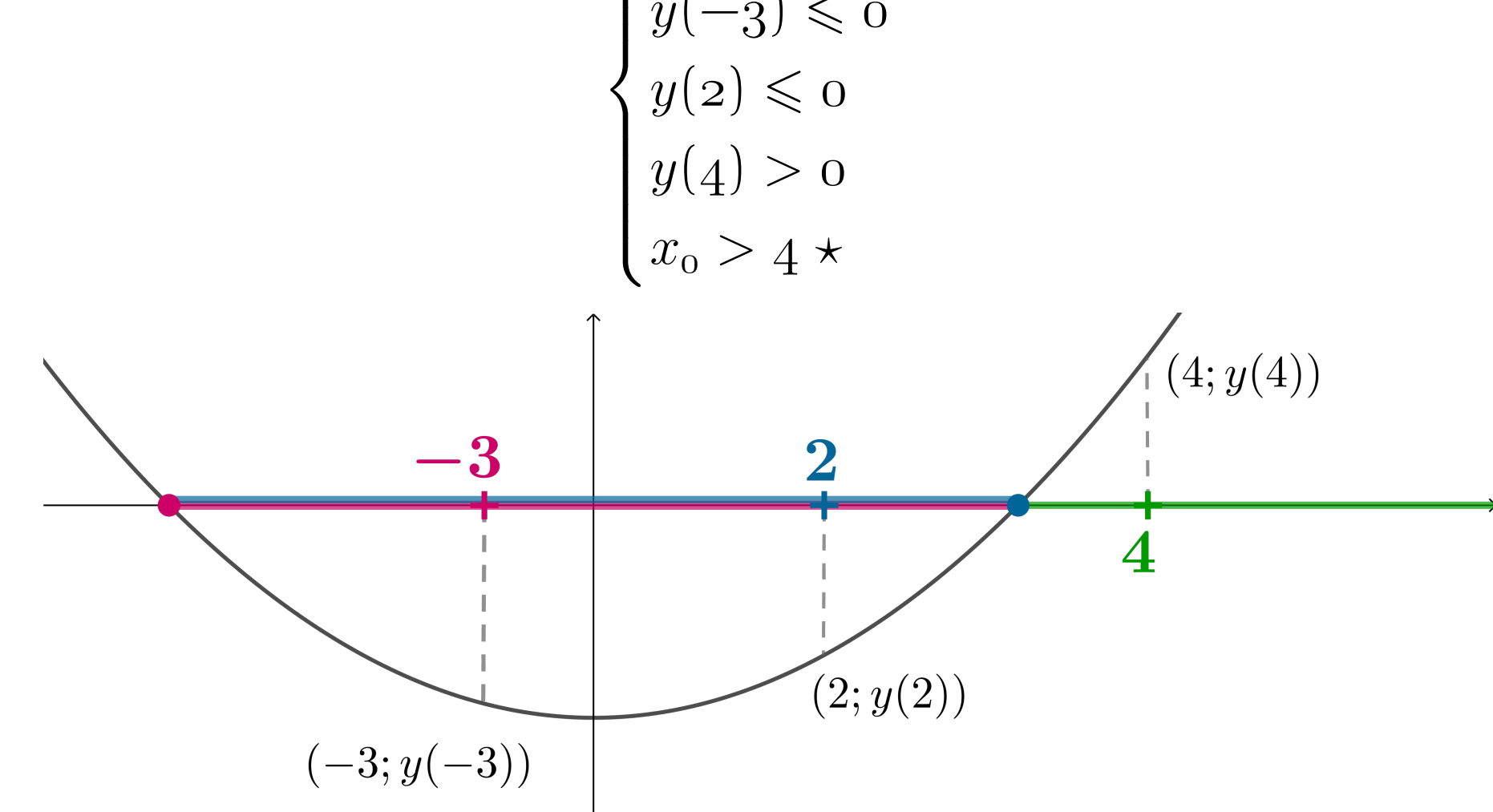
- Оба корня уравнения $y(x) = x^2 + 2(a-2)x - 4a + 5 = 0$ не меньше -1 .

То есть -1 должна располагаться в I или II местах, следовательно,



- Один корень уравнения $y(x) = x^2 + 2(a-2)x - 4a + 5 = 0$ заключен в $[2; 4]$, а второй удовлетворяет $x \leq -3$.

То есть -3 должна располагаться в II или III местах, 2 — в III или IV, 4 — в V месте, следовательно,



★ необязательно

Решение уравнение через исследование функций

Любое уравнение можно свести к виду $f(x) = 0$ или $f(x) = g(x)$. Опишем некоторые свойства функций, помогающие в решении.

- Сумма двух возрастающих функций — возрастающая функция;
- Если $f(x)$ — возрастающая функция, то $-f(x)$ — убывающая функция;
- Если $f(x)$ — возрастающая функция, то $f(x) + c$ — возрастающая функция ($c = \text{const}$).
- Если функция $f(x)$ — строго монотонна на X , то из равенства $x_1 = x_2$ ($x_1, x_2 \in X$) следует $f(x_1) = f(x_2)$, и наоборот.
- Если функция $f(x)$ — строго монотонна на X , то уравнение $f(x) = c$, где c — некоторое число, всегда имеет не более одного решения на X .
- Если на $[a; b]$ $f(x)$ — возрастающая функция, а $g(x)$ — убывающая функция, то уравнение $f(x) = g(x)$ на $[a; b]$ имеет не более одного корня.
- Если функция $f(x)$ — неубывает (невозрастает) и непрерывна на отрезке $[a; b]$, причем на концах отрезка она принимает значения $f(a) = A, f(b) = B$, то при $C \in [A; B]$ ($C \in [B; A]$) уравнение $f(x) = C$ всегда имеет хотя бы одно решение.
- Если функция $f(x)$ непрерывна, то область значений функции будет содержать отрезок $[A; B]$, если имеют решения равенства $f(x) = A$ и $f(x) = B$.
- Композиция функций одинакового характера монотонности — возрастающая, разного — убывающая. То есть если $f(x), g(x)$ — возрастающие функции, $h(x), p(x)$ — убывающие (на некотором множестве), то $f(g(x))$ — возрастающая, $f(h(x))$ — убывающая, $h(f(x))$ — убывающая, $h(p(x))$ — возрастающая.
- Если $f(x)$ — возрастающая и знакопостоянная на некотором множестве (либо положительна, либо отрицательна), то $\frac{1}{f(x)}$ — убывающая. Аналогично с убывающей.
- Если $f(x), g(x)$ — возрастающие неотрицательные функции, то $f(x) \cdot g(x)$ — возрастающая. Аналогично с убывающими.
- Если $f(x) \leq 0$ и убывающая, $g(x) \geq 0$ и возрастающая, то $f(x) \cdot g(x)$ — убывающая.

Касание

- Касание двух функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ в точке x_0 задается системой

$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases}$$

- Касание параболы $y = ax^2 + bx + c$ с неvertикальной прямой $y_k = kx + p$ можно находить, требуя единственного корня от уравнения $y = y_k$, то есть $D = 0$ от

$$ax^2 + bx + c = kx + p$$

- Аналогично с гиперболой $y = \frac{a}{bx+c} + d$ с прямой $y_k = kx + p$.

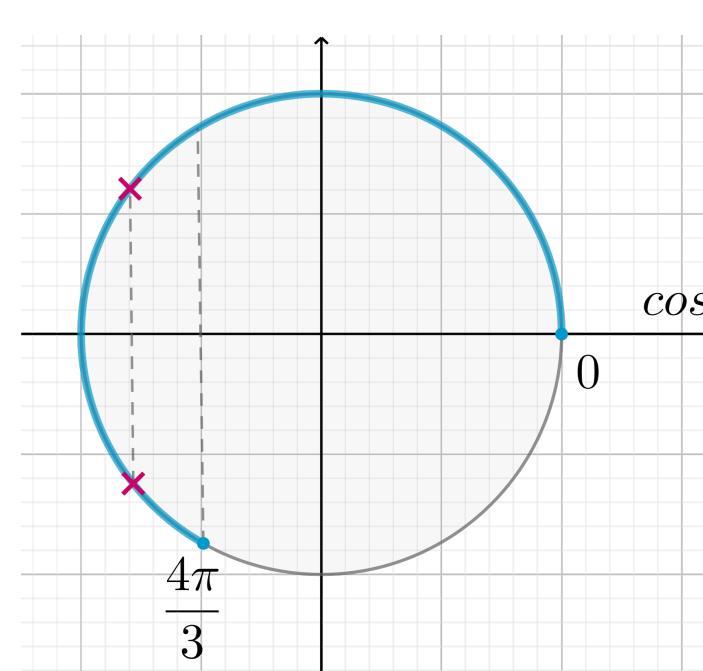
Работа с заменой

- $2a(x+1)^2 - |x+1| + 1 = 0$.

Замена $t = |x+1|$. Так как $|A| \geq 0 \forall A$, то при $t < 0$ решений x нет; $t = 0$ дает один корень $x = -1$; каждый $t > 0$ дает два корня $x = \pm t - 1$.

- $\cos^2 x - (a+2)\cos x + 2(a-1) = 0$ при $x \in [0; \frac{4\pi}{3}]$.

Замена $t = \cos x$. Если x пробегает все значения из отрезка $[0; \frac{4\pi}{3}]$, то $\cos x$ пробегает все значения из отрезка $[-1; 1]$, причем каждому $t \in (-1; -0,5]$ соответствует два угла x , а каждому $t \in \{-1\} \cup (-0,5; 1]$ соответствует ровно один корень x .



- $4\sqrt{1-x^2} + a \cdot 2\sqrt{1-x^2} + a^2 - 1 = 0$

Замена $t = 2^y, y = \sqrt{p}, p = 1 - x^2$. Заметим, что $0 \leq p \leq 1$, причем $p = 1$ дает один корень $x = 0$, каждый из $0 \leq p < 1$ дает по два корня x . Следовательно, $y = \sqrt{1} = 1$ дает один x , каждый из $0 \leq y < 1$ дает по два x . Тогда $t = 2$ дает один корень $x = 0$, каждый из $1 \leq t < 2$ дает по два корня x .

Метод главного модуля

У функции $f(x) = m|x-a| + n|x-b|$ с $m > n$ главным модулем будет модуль с большим коэффициентом m . Это значит, что переход через точку $x = a$ влияет на смену характера монотонности функции, например, при $x < a$ функция возрастает, а при $x > a$ функция убывает. То есть то, как себя ведет $|x-b|$, не влияет на характер монотонности функции.

Примеры, где встречается

- $f(x) = 3\sqrt[3]{6-2x-5} + 4\log_5(4x+1) + 5a = 0$.

Так как функции $y = \sqrt[3]{x}, y = 6-2x-5, 2, t = \log_5 x, y = 4x+1$ возрастающие, то композиции этих функций — возрастающие функции, следовательно, $y = f(x)$ — возрастающая. Значит, уравнение $f(x) = 0$ имеет не более одного корня.

- $64x^6 + 4x^2 = (3x+a)^3 + 3x+a$.

Рассмотрим возрастающую функцию $f(t) = t^3 + t$. Тогда уравнение имеет вид $f(4x^2) = f(3x+a)$. Из-за строгой монотонности $y = f(x)$ следует, что полученное уравнение равносильно $4x^2 = 3x+a$.

- $x^3 + ax^2 + 13x - 6 = 0$.

Исследуем уравнение, разделив обе части на x^2 , так как $x = 0$ не является корнем. Получим $a = -x - \frac{13}{x} + \frac{6}{x^2}$. Получили уравнение в виде $a = f(x)$. Далее исследуем функцию $y = f(x)$ (с помощью фактов левее либо через производную), рисуем ее график. Если, например, уравнение должно иметь одно решение, то ищем такие горизонтальные прямые $y = a$, при которых с графиком $y = f(x)$ имеется одна точка пересечения.

- $\log_a(ax) = 2 - x^5$ при $a > 1$.

Функция $f(x) = \log_a(ax)$ при $a > 1$ возрастающая, функция $g(x) = 2 - x^5$ убывающая, следовательно, уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного решения. Подбором находим корень $x = 1$. P.S. Да, обращаем внимание, что подбор корня в параметре — не редкость. Как видите, в этой задаче мы доказали, что корней не более одного и один нашли, значит, решение полно.

- $f(x) = 4 - |3x - |x+a|| - 9|x-1| = 0$.

Главным модулем является $|x-1|$. Выражение $|3x - |x+a||$ при всех возможных способах раскрытия модулей будет выглядеть как $kx + b$, где $k \in \{\pm 2; \pm 4\}$.

Таким образом, при $x < 1$ получим $f(x) = Ax + B$, где $A \in \{9 \pm 2; 9 \pm 4\}$, то есть $A > 0$, следовательно, $f(x) \uparrow$; при $x > 1$ получим $f(x) = Ax + B$, где $A \in \{-9 \pm 2; -9 \pm 4\}$, то есть $A < 0$, следовательно, $f(x) \downarrow$.

Метод оценки

Если $f(x) \geq c, g(x) \leq c$ при любом x , то равенство

$$f(x) = g(x)$$

возможно тогда и только тогда, когда $f(x) = g(x) = c$.

Функции, которые нужно знать

Функция	Область значений (значение y)	Область определения (значение x)
$y = x^2$	$y \geq 0$	$x \in \mathbb{R}$
$y = x + \frac{1}{x}$	$y \geq 2$, если $x > 0$ $y \leq -2$, если $x < 0$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$y = x + 1-x $	$y \geq 1$, причем $y = 1$, если $x \in [0; 1]$	$x \in \mathbb{R}$
$y = x-a + x+a $	$y \geq 2 a $, причем $y = 2 a $, если $x \in [- a ; a]$	$x \in \mathbb{R}$

Важные неравенства

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2}{2}} \geq \frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2} \geq \frac{2}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}} \quad a_1, a_2 > 0$$

$$\bullet |a| - |b| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$$

Модульные неравенства

$$\bullet |A| > |B| \Leftrightarrow A^2 > B^2 \quad \bullet |A| > B \Leftrightarrow \begin{cases} A > B \\ A < -B \end{cases} \quad \bullet |A| < B \Leftrightarrow \begin{cases} A < B \\ A > -B \end{cases}$$