

Теорема Виета

Если у квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ есть корни x_1, x_2 , то $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.

Обратная теорема Виета

Если известно, что сумма некоторых чисел $x + y = A$, их произведение $xy = B$, то если такие числа существуют, они являются корнями квадратного уравнения

$$p^2 - Ap + B = 0$$

Примеры, где встречается

- Найти сумму квадратов корней уравнения:

$$x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}$$

- Определить, когда ровно один из двух корней положительный:

$$\begin{cases} D > 0 \\ x_1x_2 = \frac{c}{a} < 0 \end{cases}$$

- Определить, когда имеет единственное решение система:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = A \\ x + y = B \end{cases}$$

Так как $A = x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = B^2 - 2xy$, то $xy = 0,5(B^2 - A)$, следовательно, единственное решение у системы, если единственное решение имеет уравнение

$$p^2 - Bp + 0,5(B^2 - A) = 0$$

Метод хорошего/плохого корня

- Находим все потенциальные корни, которые может иметь исходное уравнение. Каждый из них будет корнем уравнения, если удовлетворяет “своим” условиям: ОДЗ и условию задачи (например, лежит в некотором отрезке). Пусть таких корней два.
- Назовем корень хорошим, если он удовлетворяет “своим” условиям, в противном случае — плохим. Найдем значения параметра a , при которых корень хороший. Пусть при $a \in A_1$ корень x_1 хороший, при $a \in A_2$ корень x_2 — хороший. Тогда при $a \in \mathbb{R} \setminus A_1$ корень x_1 — плохой, при $a \in \mathbb{R} \setminus A_2$ корень x_2 — плохой.
- Смотрим, сколько корней должно иметь уравнение по условию задачи. Если требуется наличие одного корня, то это возможно в одном из трех случаев:

- x_1 — хороший, x_2 — плохой $\begin{cases} a \in A_1 \\ a \in \mathbb{R} \setminus A_2 \end{cases}$
- x_1 — плохой, x_2 — хороший $\begin{cases} a \in A_2 \\ a \in \mathbb{R} \setminus A_1 \end{cases}$
- $x_1 = x_2$ — хорошие и совпадающие $\begin{cases} a \in A_1 \\ x_1 = x_2 \end{cases}$

Уравнения имеют общий корень

Если уравнения $f(x, a) = 0$ и $g(x, a) = 0$ имеют общие корни, то система

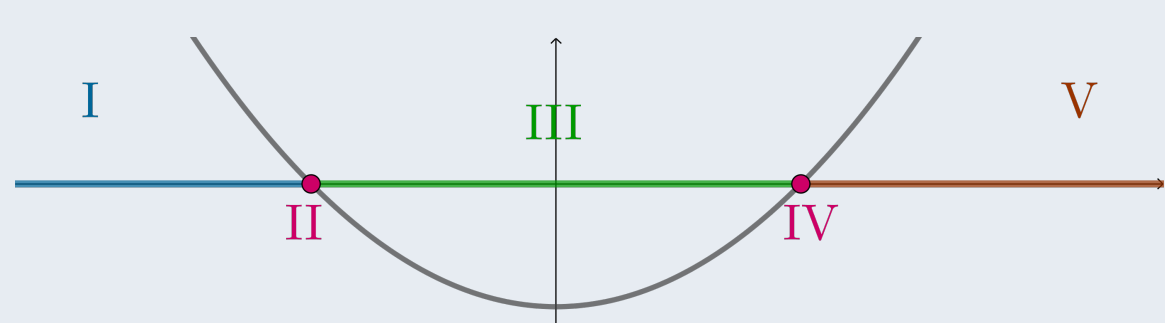
$$\begin{cases} f(x, a) = 0 \\ g(x, a) = 0 \end{cases}$$

имеет решения $(x_0; a_0)$. Причем число решений системы — число общих корней уравнений, где каждое a_0 — значение параметра, при котором у уравнений x_0 — общий корень.

Квадратичная функция

Пусть $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ с вершиной x_0 имеет две точки пересечения с осью абсцисс (то есть уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня $x_1 < x_2$). Введем названия для следующих частей оси Ox :

- I — левее x_1
- II — x_1
- III — между x_1 и x_2
- IV — x_2
- V — правее x_2



В каждом из этих мест значение функции либо положительно, либо отрицательно, либо равно нулю. Также все, кроме III, находятся справа или слева от абсциссы вершины x_0 параболы.

С помощью этих данных можно задавать условия на корни квадратичного трехчлена, например, чтобы они лежали в некотором промежутке, чтобы оба были больше некоторого числа k и т.п.

Положение точки k относительно корней

С помощью свойств мест, описанных выше, зададим условия, когда точка k лежит в определенном месте (для параболы с $D > 0$ и направленными вверх ветвями).

- I : $\begin{cases} D > 0 \\ y(k) > 0 \\ x_0 > k \end{cases}$
- III : $y(k) < 0$ *
- V : $\begin{cases} D > 0 \\ y(k) > 0 \\ x_0 < k \end{cases}$

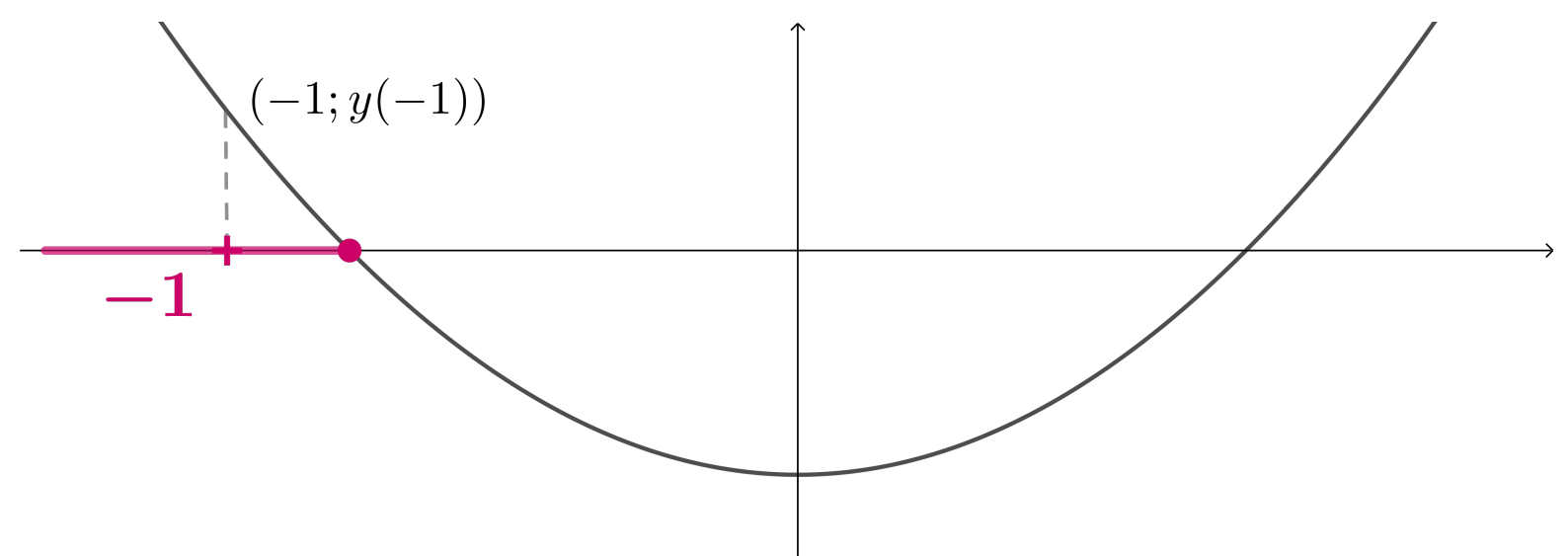
* условие $D > 0$ для III места необязательно, так как если у параболы с ветвями вверх есть хоть одна точка, где ее значение отрицательно, то она автоматически пересекает ось абсцисс в двух точках.

Примеры, где встречается

- Оба корня уравнения $y(x) = x^2 + 2(a - 2)x - 4a + 5 = 0$ не меньше -1 .

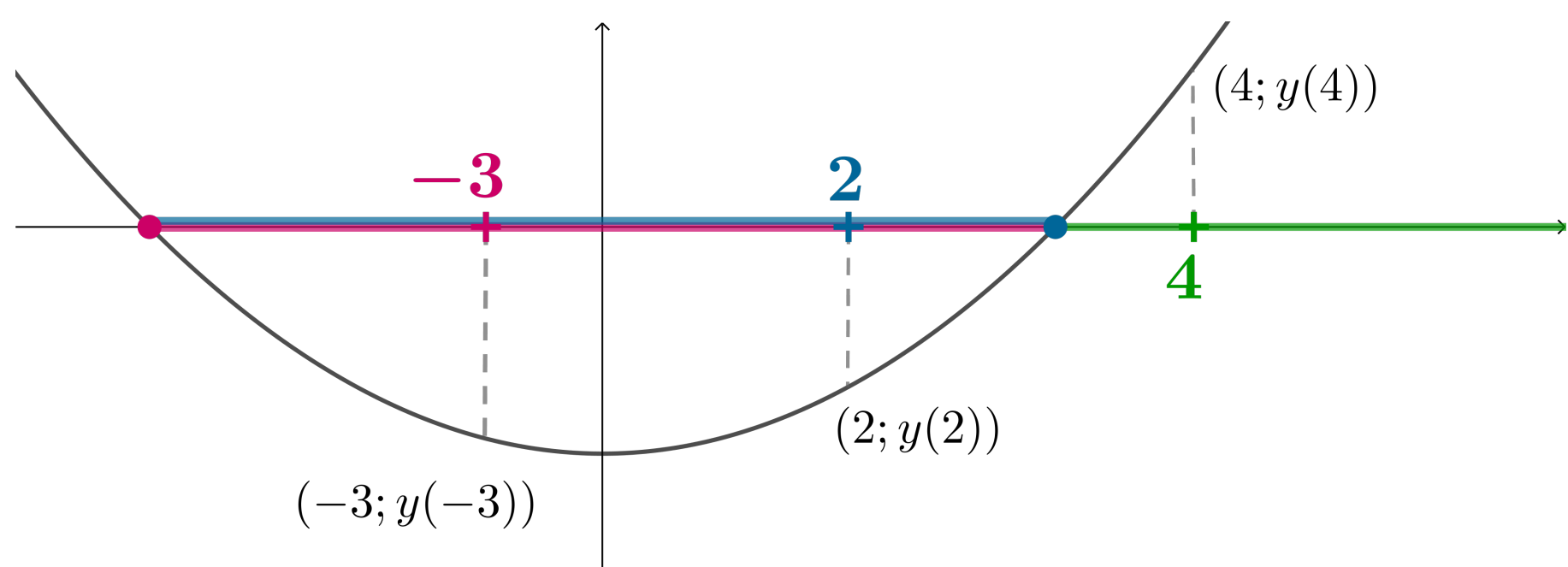
То есть -1 должна располагаться в I или II местах, следовательно,

$$\begin{cases} D > 0 \\ y(-1) \geq 0 \\ x_0 > -1 \end{cases}$$



- Один корень уравнения $y(x) = x^2 + 2(a - 2)x - 4a + 5 = 0$ заключен в полуинтервале $[2; 4)$, а второй удовлетворяет неравенству $x \leq -3$. То есть -3 должна располагаться в II или III местах, 2 — в III или IV, 4 — в V месте, следовательно,

$$\begin{cases} D > 0 * \\ y(-3) \leq 0 \\ y(2) \leq 0 \\ y(4) > 0 \\ x_0 < 4 * \end{cases}$$



* Необязательно, так как есть неравенства с $y(-3)$ и $y(2)$: либо оба равны нулю, тогда $D > 0$, либо хотя бы один из них меньше нуля, тогда также $D > 0$.

Решение уравнений через исследование функций

Любое уравнение можно свести к виду $f(x) = 0$ или $f(x) = g(x)$. Опишем некоторые свойства функций, помогающие в решении.

- Сумма двух возрастающих функций — возрастающая функция.
- Если $f(x)$ — возрастающая функция, то $-f(x)$ — убывающая функция.
- Если $f(x)$ — возрастающая функция, то $f(x) + c$ — возрастающая функция ($c = \text{const}$). То же с убывающей.
- Если функция $f(x)$ строго монотонна на X , то из равенства $x_1 = x_2$ ($x_1, x_2 \in X$) следует $f(x_1) = f(x_2)$, и наоборот.
- Если функция $f(x)$ — строго монотонна на X , то уравнение $f(x) = c$ ($c = \text{const}$) всегда имеет не более одного решения на X .
- Если на $[a; b]$ $f(x)$ — возрастающая функция, а $g(x)$ — убывающая функция, то уравнение $f(x) = g(x)$ на $[a; b]$ имеет не более одного корня.
- Если функция $f(x)$ — неубывает (невозрастает) и непрерывна на отрезке $[a; b]$, причем на концах отрезка она принимает значения $f(a) = A$, $f(b) = B$, то при $C \in [A; B]$ ($C \in [B; A]$) уравнение $f(x) = C$ всегда имеет хотя бы одно решение. А если функция строго монотонна, то $f(x) = C$ имеет единственное решение.
- Если функция $f(x)$ непрерывна, то область значений функции будет содержать отрезок $[A; B]$, если имеют решения равенства $f(x) = A$ и $f(x) = B$.
- Композиция функций одинакового характера монотонности — возрастающая, разного — убывающая. То есть если $f(x), g(x)$ — возрастающие функции, $h(x), p(x)$ — убывающие (на некотором множестве), то $f(g(x))$ — возрастающая, $h(h(x))$ — убывающая, $h(f(x))$ — убывающая, $h(p(x))$ — возрастающая. Так как возрастающая функция соответствует положительной производной, убывающая — отрицательной, то можно запоминать так: $++ \rightarrow +$, $+- \rightarrow -$, $-+ \rightarrow -$, $-- \rightarrow +$.
- Если $f(x)$ — возрастающая и знакостоянная на некотором множестве (либо положительна, либо отрицательна), то $\frac{1}{f(x)}$ — убывающая. Аналогично с убывающей.
- Если $f(x), g(x)$ — возрастающие неотрицательные функции, то $f(x) \cdot g(x)$ — возрастающая. Аналогично с убывающими.
- Если $f(x) \leq 0$ и убывающая, $g(x) \geq 0$ и возрастающая, то $f(x) \cdot g(x)$ — убывающая.

Касание

- Касание двух функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ в точке x_0 задается системой

$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases}$$

- Касание параболы $y = ax^2 + bx + c$ с неvertикальной прямой $y_k = kx + p$ можно находить, требуя единственного корня от уравнения $y = y_k$, то есть $D = 0$ от

$$ax^2 + bx + c = kx + p$$

- С гиперболой $y = \frac{a}{bx+c} + d$ и прямой $y_k = kx + p$ касание тоже можно находить, если потребовать единственного корня от уравнения $y = y_k$.

Работа с заменой

Исследовать новую переменную — значит понять, каким значениям новой переменной сколько соответствует значений старой переменной. Это требуется для того, чтобы переформулировать вопрос задачи, едь вы будете анализировать уже новое ур/нер/сист с новой неизвестной.

- $2a(x+1)^2 - |x+1| + 1 = 0$.

Замена $t = |x+1|$. Так как $|A| \geq 0 \forall A$, то при $t < 0$ решений x нет; $t = 0$ дает один корень $x = -1$; каждый $t > 0$ дает два корня $x = \pm t - 1$.

- $\cos^2 x - (a+2)\cos x + 2(a-1) = 0$ при $x \in [0; \frac{4\pi}{3}]$.

Замена $t = \cos x$. Если x пробегает все значения из отрезка $[0; \frac{4\pi}{3}]$, то $\cos x$ пробегает все значения из отрезка $[-1; 1]$, причем каждому $t \in (-1; -0,5]$ соответствует два угла x , а каждому $t \in \{-1\} \cup (-0,5; 1]$ соответствует ровно один корень x .

- $4\sqrt{1-x^2} + a \cdot 2\sqrt{1-x^2} + a^2 - 1 = 0$

Замена $t = 2^y$, $y = \sqrt{p}$, $p = 1 - x^2$. Заметим, что $0 \leq p \leq 1$, причем $p = 1$ дает один корень $x = 0$, а каждый из $0 \leq p < 1$ дает по два корня x , остальные p корней не дают. Следовательно, $y = \sqrt{1} = 1$ дает один x , каждый из $\sqrt{0} \leq y = \sqrt{p} < \sqrt{1}$ дает по два x . Тогда $t = 2^y|_{y=1} = 2$ дает один корень $x = 0$, каждый из $1 \leq t = 2^y < 2$ дает по два корня x .

Метод главного модуля (МГМ)

У функции $f(x) = m|x-a| + n|x-b|$ с $m > n$ главным модулем называется модуль с большим коэффициентом m . При переходе через нуль главного модуля, то есть точку $x = a$, происходит смена характера монотонности функции. То есть то, как себя ведет $n|x-b|$, не влияет на характер монотонности функции $f(x)$ в целом. Например, для $f(x) = 9|x-a| - 2|x-b|$ при $x < a$ функция убывает, а при $x \geq a$ возрастает.

Примеры, где встречается

- $f(x) = 3\sqrt[3]{6, 2x-5, 2} + 4\log_5(4x+1) + 5a = 0$ (МГМ).

Так как функции $y = \sqrt[3]{x}$, $y = 6, 2x-5, 2$, $y = \log_5 x$, $y = 4x+1$ возрастающие, то композиции этих функций — возрастающие функции, следовательно, $y = f(x)$ — возрастающая. Значит, уравнение $f(x) = 0$ имеет не более одного корня.

- $64x^6 + 4x^2 = (3x+a)^3 + 3x+a$ (свойство функций ④).

Рассмотрим возрастающую функцию $f(t) = t^3 + t$. Тогда уравнение имеет вид $f(4x^2) = f(3x+a)$. Из-за строгой монотонности $y = f(x)$ следует, что полученное уравнение равносильно $4x^2 = 3x+a$.

- $x^3 + ax^2 + 13x - 6 = 0$ (свойство функций ⑤).

Исследуем уравнение, разделив обе части на x^2 , так как $x = 0$ не является корнем. Получим $a = -x - \frac{13}{x} + \frac{6}{x^2}$. Получили уравнение в виде $a = f(x)$. Далее исследуем функцию $y = f(x)$ (с помощью свойств 1-12 либо через производную), рисуем ее схематичный график. Если, например, уравнение должно иметь одно решение, то ищем такие горизонтальные прямые $y = a$, при которых с графиком $y = f(x)$ имеется одна точка пересечения.

- $\log_a(ax) = 2 - x^5$ при $a > 1$ (свойство функций ⑥).

Функция $f(x) = \log_a(ax)$ при $a > 1$ возрастающая, функция $g(x) = 2 - x^5$ убывающая, следовательно, уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного решения. Подбором находим корень $x = 1$. P.S. Да, обращаем внимание, что подбор корня в параметре — не редкость. Как видите, в этой задаче мы доказали, что корней не более одного и один нашли, значит, решение полно.

- $f(x) = 4 - |3x - |x+a|| - 9|x-1| = 0$ (МГМ).

Главным модулем является $|x-1|$. Выражение $|3x - |x+a||$ при всех возможных способах раскрытия модулей будет выглядеть как линейное $kx + b$, где $k \in \{\pm 2; \pm 4\}$.

Таким образом, при $x < 1$ получим $f(x) = Ax + B$, где $A \in \{9 \pm 2; 9 \pm 4\}$, то есть $A > 0$, следовательно, $f(x) \uparrow$ (возрастает). При $x \geq 1$ получим $f(x) = Ax + B$, где $A \in \{-9 \pm 2; -9 \pm 4\}$, то есть $A < 0$, следовательно, $f(x) \downarrow$ (убывает).

Метод оценки

Если $f(x) \geq c$, $g(x) \leq c$ при любом x , а $c = \text{const}$, то равенство

$$f(x) = g(x)$$

возможно тогда и только тогда, когда $f(x) = g(x) = c$.

Функции с интересной областью значений

Функция	Область значений (значение y)	Область определения (значение x)
$y = x^2$	$y \geq 0$	$x \in \mathbb{R}$
$y = x + \frac{1}{x}$	$y \geq 2$, если $x > 0$ $y \leq -2$, если $x < 0$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$y = x + 1-x $	$y \geq 1$, причем $y = 1$, если $x \in [0; 1]$	$x \in \mathbb{R}$
$y = x-a + x+a $	$y \geq 2 a $, причем $y = 2 a $, если $x \in [- a ; a]$	$x \in \mathbb{R}$

Важные неравенства

$$\bullet \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2}{2}} \geq \frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2} \geq \frac{2}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}} \quad \text{при } a_1, a_2 > 0$$

$$\bullet |a| - |b| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$$

Модульные неравенства

$$\bullet |A| > |B| \Leftrightarrow A^2 > B^2 \quad \bullet |A| > B \Leftrightarrow \begin{cases} A > B \\ A < -B \end{cases} \quad \bullet |A| < B \Leftrightarrow \begin{cases} A < B \\ A > -B \end{cases}$$

Обращаем внимание, что ставить какие-либо условия на B вовсе необязательно. Например, если $B < 0$ в третьем примере, то неравенство не имеет смысла, ровно как и система, которой она равносильна.

Часто встречающиеся графики

• Уголок $y = a|x - x_0| + y_0$ с вершиной $O(x_0; y_0)$. Ветви направлены вверх/вниз при $a > 0/a < 0$ соответственно. График симметричен относительно $x = x_0$.

• Парабола $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ с вершиной $O(x_0; y_0)$. Ветви направлены вверх/вниз при $a > 0/a < 0$ соответственно. График симметричен относительно $x = x_0$.

• Гипербола $y = \frac{a}{x - x_0} + y_0$ с точкой пересечения асимптот $O(x_0; y_0)$. График находится в I и III/II и IV четвертях при $a > 0/a < 0$ соответственно и симметричен относительно точки пересечения асимптот.

• Окружность $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ с центром $O(x_0; y_0)$ и радиусом $R > 0$. Верхняя полуокружность $y = \sqrt{c + bx + ax^2}$, $a < 0$.

• Отрезок AB : $\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} + \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ с концами в точках $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$.

• Ромб $a|x - x_0| + b|y - y_0| = c$. $O(x_0; y_0)$ — точка пересечения диагоналей, которые параллельны осям координат. Квадрат $|x - x_0| + |y - y_0| = c$.

• Пучок прямых $y = a(x - x_0) + y_0$. Это семейство прямых, проходящих при любом значении параметра a через фиксированную (не зависящую от a) точку $A(x_0; y_0)$. Меняя параметр, можно задать любую прямую, проходящую через точку A , кроме вертикальной прямой (так как в уравнении вертикальной прямой отсутствует коэффициент перед y). Такое семейство удобно рассматривать, меняя a от $-\infty$ к $+\infty$. Тогда можно сказать, что мы вращаем прямую, закреплённую в точке A , против часовой стрелки, от положения, близкого к вертикальному слева, до положения, близкого к вертикальному справа.

• Сумма двух модулей от линейных многочленов, называемая в народе “корыто”: $y = |x + a| + |x + b|$. Коэффициенты перед x обязательно одинаковы. На рисунке изображен график $y = |2 - x| + |x - 1|$, где $a = -2$, $b = -1$. Как построить график подобной функции?

Покажем на примере функции $y = |2 - x| + |x - 1|$.

1. Меняем знаки внутри модулей на противоположные (для удобства), если это нужно, чтобы перед x были положительные коэффициенты: $y = |x - 2| + |x - 1|$.

2. Если модули раскрываются с одинаковым знаком, то в итоге мы получаем либо сумму подмодульных выражений $\varepsilon = 2x + (-2 - 1)$, либо противоположное ей значение $-\varepsilon = -2x - (-2 - 1)$. Это правая и левая ветви корыта соответственно — симметричные относительно вертикали лучи с противоположными угловыми коэффициентами. Тогда $y_{\text{правая}} = 2x + (-2 - 1)$ при $x \geq 2$, $y_{\text{левая}} = -2x - (-2 - 1)$ при $x \leq 1$.

3. Если модули раскрываются с разными знаками, то в итоге мы получим модуль разности подмодульных выражений, то есть модуль разности чисел a и b : $|x - 2 - (x - 1)| = |-2 - (-1)|$. Это центральная часть корыта — отрезок горизонтальной прямой $y_{\text{центр}} = |-2 - (-1)|$ при $1 < x < 2$. Обращаем внимание, что $y_{\text{центр}} \geq 0 \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$.

Такой принцип построения удобен, когда числа a, b не фиксированы, а зависят от параметра.

Траектория движения графика

Для того, чтобы понять, как движется график функции, зависящей от параметра, если мы меняем значения параметра, нужно зафиксировать любую точку графика и найти траекторию движения этой точки.

• $y = 2|x - a| + a^2$.

Рассмотрим вершину уголка $(a; a^2)$. Тогда $x_0 = a$, $y_0 = a^2$. Выразив a из одного равенства и подставив в другое, получим зависимость между x_0 и y_0 — это и будет траектория движения этой точки, следовательно, и всего графика. В нашем случае $y_0 = x_0^2$, следовательно, уголок $y = 2|x|$ движется по параболе $y = x^2$.

• $y = 3(5a - 3x + 9)^2 - 2a$.

Для начала преобразуем $y = 27\left(x - \frac{5a+9}{3}\right)^2 - 2a$. Отсюда $x_0 = \frac{5a+9}{3}$, $y_0 = -2a$. Выразим $a = \frac{3x_0-9}{5}$ и подставим в $y_0 = -2a = -\frac{2}{5}(3x_0 - 9)$. Значит, парабола $y = 27x^2$ движется по прямой $y = -\frac{2}{5}(3x - 9)$.

• $(x - \frac{1}{a})^2 + (y - 2a)^2 = 1$. Центр окружности $(\frac{1}{a}; 2a)$. Значит, $x_0 = \frac{1}{a}$, $y_0 = 2a$. Тогда $a = \frac{1}{x_0}$ и $y_0 = \frac{2}{x_0}$. То есть центр окружности движется по гиперболе $y = \frac{2}{x}$.

Симметрия (инвариантность)

Существуют выражения $f(x)$, при подстановке в которые вместо x некоторого выражения $g(x)$, исходное выражение не меняется, то есть $f(x) = f(g(x))$. Такие выражения f называются инвариантными относительно такой подстановки. Допустим, нам дано уравнение $f(x) + f(c - x) = 0$. Оно инвариантно относительно замены x на $c - x$. Следовательно, если $x = x_0$ — решение уравнения, следовательно, $x = c - x_0$ тоже является его корнем. Чаще всего в задачах с этой идеей требуется наличие одного корня, что означает, что числа, образующие пару, должны совпадать, то есть $x_0 = c - x_0$. Но это не означает, что у уравнения нет других корней $x \neq x_0$, следовательно, решение подобной задачи складывается из следующих шагов:

1. найти инвариантность относительно замены x_0 на $g(x_0)$ и установить, какое число X может быть единственным решением, решив $x_0 = g(x_0)$;
2. подставить X в данное ур/нер/сист и найти соответствующие значения параметра;
3. выполнить проверку найденных a : определить, при каких a других корней ур/нер/сист не имеет (они и составят ответ), а при каких — имеет (они нам не подойдут).

Пример, где встречается

Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$x^2 - 2a \sin(\cos x) + a^2 = 0$$

имеет единственное решение.

1. Заметим, что данное уравнение симметрично относительно замены x на $-x$: $(-x)^2 - 2a \sin(\cos(-x)) + a^2 = x^2 - 2a \sin(\cos x) + a^2$. Следовательно, если уравнение имеет корень $x_0 \neq 0$, то оно имеет и корень $-x_0$. Таким образом, для того, чтобы уравнение имело единственный корень, этим корнем должен быть решение уравнения $x_0 = -x_0$, то есть $x_0 = 0$.

2. Пусть $x = 0$, тогда

$$-2a \sin 1 + a^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0; 2 \sin 1.$$

3. Проверим, действительно ли при найденных значениях a корень $x = 0$ единственный.

- Пусть $a = 0$. Тогда уравнение примет вид $x^2 = 0$. Полученное уравнение имеет один корень. Нам это подходит.
- Пусть $a = 2 \sin 1$. Тогда уравнение примет вид

$$x^2 - 4 \sin 1 \sin(\cos x) + 4 \sin^2 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 4 \sin^2 1 = 4 \sin 1 \sin(\cos x)$$

Применим Оценим области значений левой и правой частей равенства. Левая часть уравнения $x^2 + 4 \sin^2 1 \geq 4 \sin^2 1$ при любом $x \in \mathbb{R}$. Далее, так как при любом $x \in \mathbb{R}$:

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \quad (\text{т.к. } [-1; 1]) \subset \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right];$$

$$-\sin 1 \leq \sin(\cos x) \leq \sin 1 \quad (\text{т.к. } y = \sin x \uparrow \text{ на } [-1; 1])$$

$$-4 \sin^2 1 \leq 4 \sin 1 \sin(\cos x) \leq 4 \sin^2 1 \quad (\text{т.к. } 4 \sin 1 > 0)$$

Следовательно, по методу оценки равенство возможно тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} x^2 + 4 \sin^2 1 = 4 \sin^2 1 \\ 4 \sin 1 \sin(\cos x) = 4 \sin^2 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

Это значение a также подходит.

Ответ: $a = 0; 2 \sin 1$.

Формула расстояния от точки до прямой

Расстояние ρ от точки $O(x_0; y_0)$ до прямой, заданной уравнением $ax + by + c = 0$, ищется по формуле

$$\rho = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Замечание: если прямая задана в виде $y = kx + b$, то ее уравнение нужно переписать в вид $kx - y + b = 0$.

Учимся искать касание прямой и окружности на примерах

Вспомним, что если прямая касается окружности, от радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной. Иными словами, расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу тогда и только тогда, когда эта прямая — касательная.

Пусть даны: касательная $3y = 4x - 3a$;

окружность $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = a^2$, $a \neq 0$.

1. Расстояние от центра окружности до касательной равно радиусу окружности, следовательно, перпишем уравнение прямой как $4x - 3y - 3a = 0$, центр окружности — точка $(2; -1)$, радиус $R = \sqrt{a^2} = |a|$. Применим формулу

$$|a| = \frac{|4 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) - 3a|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|3a - 11|}{5} \quad \Leftrightarrow \quad 5|a| = |3a - 11|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5a = 3a - 11 \\ 5a = -(3a - 11) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a = -\frac{11}{2}; \frac{11}{8}.$$

2. Если прямая имеет с окружностью одну точку пересечения, то она является касательной к окружности, следовательно, имеет единственное решение:

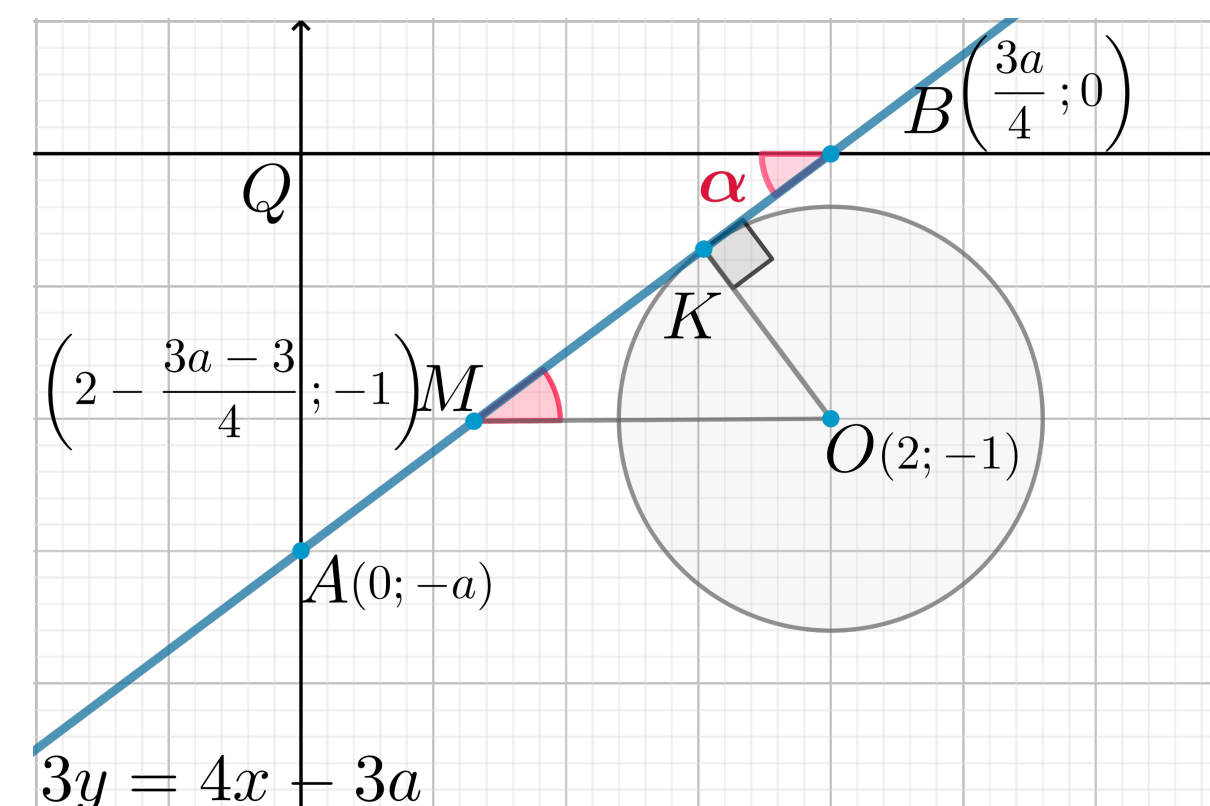
$$\begin{cases} 3y = 4x - 3a \\ (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = a^2 \end{cases} \cdot 9 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3y = 4x - 3a \\ 9(x - 2)^2 + (4x - 3a + 3)^2 = 9a^2 \end{cases}$$

Преобразуем второе уравнение $25x^2 - 12(1 + 2a)x + 9(5 - 2a) = 0$.

Его дискриминант должен равняться нулю, то есть

$$D = 36(16a^2 + 66a - 121) = 0. \text{ Получаем те же } a = -\frac{11}{2}; \frac{11}{8}.$$

3. Можно искать касание с помощью геометрии и тригонометрии. Пусть схематично картинка выглядит так:



$R = OK$ — радиус, точки A, B — точки пересечения касательной с осями координат, α — угол наклона касательной AB . Тогда $\angle KBO = 90^\circ - \alpha$, значит, $\angle KOB = \alpha$.

Получили $\triangle AQB \sim \triangle BKO$ ($OM \parallel QB$):

$$\frac{QA}{OK} = \frac{AB}{OM} \quad \Leftrightarrow \quad |a| : |a| = \sqrt{a^2 + \frac{9a^2}{16}} : \left| \frac{3a - 11}{4} \right|$$

* $OM = |x_M - x_0| = |2 - \frac{3a-3}{4}|$. Получили то же равенство

$5|a| = |3a - 11|$, откуда находим те же значения a .

Идея решения задачи и как ее записать, чтоб отхватить баллы

При решении задачи от вас требуется описать, что за объекты вы имеете и что должно с ними произойти, чтобы выполнилось условие задачи. Даже если вы не доведете решение до конца, вам будут поставлены баллы за исследование и идею.

Например, у вас есть система и требуется определить a , при которых ее решение единственно.

$$\begin{cases} (x - a)^2 + (y + 2a)^2 = 1 - a \\ x^2 + y^2 = a - 2 \end{cases}$$

Покажем, что такое идея без вычислений.

- При $a - 2 > 0$, $1 - a > 0$ первое и второе уравнения задают окружности с центрами $O_1(a; -2a)$, $O_2(0; 0)$ и радиусами $R_1 = \sqrt{1 - a}$ и $R_2 = \sqrt{a - 2}$ соответственно. Две окружности имеют одну точку пересечения, если они не совпадают и касаются друг друга либо внутренним образом (тогда $O_1O_2 = |R_1 - R_2|$), либо внешним образом (тогда $O_1O_2 = R_1 + R_2$). Из этих равенств получим нужные a .

- Если одно из $(a - 2)$ и $(1 - a)$ равно нулю (а другое неотрицательное), то соответствующее этому выражению уравнение задает точку, которая либо удовлетворяет второму уравнению (тогда найдено подходящее a), либо нет.

- Если хотя бы одно из $(a - 2)$ и $(1 - a)$ отрицательно, то решений нет (и нет подходящих a).

Метод xOa

Пусть дано уравнение, неравенство или система, зависящие от x и a . Рассмотрим параметр a как переменную (точнее, как ординату), то есть как в обычных задачах мы рассматриваем переменную y). Построим в системе координат xOa множество S решений ур/нер/сист. Если некоторая точка плоскости с координатами $(x_0; a_0)$ принадлежит этому множеству S , то для исходной задачи это означает, что если параметр a принимает значение a_0 , то x_0 будет одним из решений ур/нер/сист. В задаче будет требоваться найти все такие значения a_0 параметра a , при каждом из которых n точек $(x_0; a_0)$ принадлежат множеству решений S , изображенному на плоскости xOa . Фактически это равносильно тому, что горизонтальная прямая $a = a_0$ имеет n точек пересечения со множеством S .

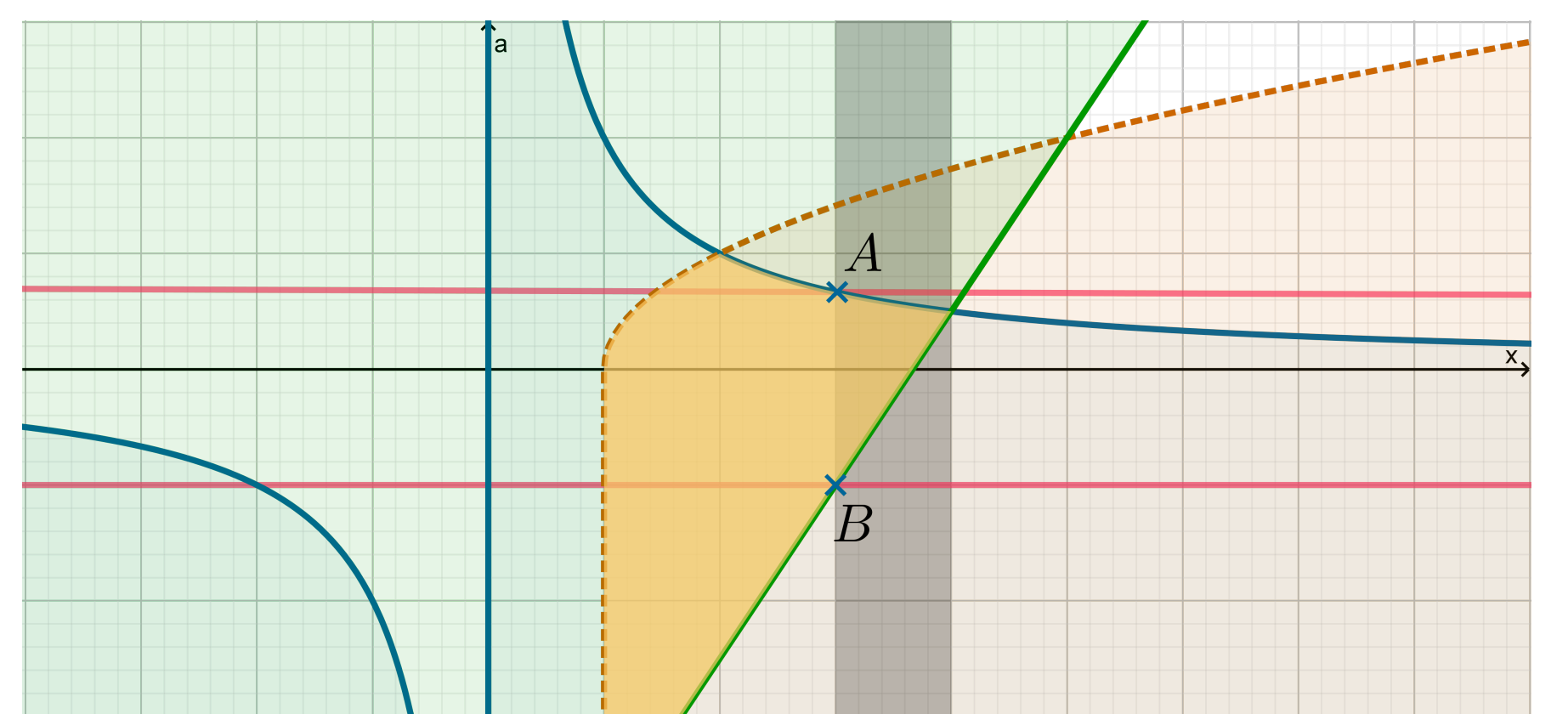
Пример, где встречается

При каких a имеет хотя бы одно решение на отрезке $[3; 4]$ следующая система:

$$\begin{cases} ax \leq 2 \\ \sqrt{x - 1} > a \\ 3x \leq 2a + 11 \end{cases}$$

(задача из досрочной волны 2017 года)

Заметим, что $x - 1 \geq 1$, следовательно, $x > 0$. Систему можно переписать. Желтая область — множество S , являющееся решением системы. Серая полоса соответствует $x \in [3; 4]$.



Таким образом, нам подходят все горизонтальные прямые $y = a$, находящиеся между прямыми, проходящими через точки A и B :

$$A : \begin{cases} a = \frac{2}{x} \\ x = 3 \end{cases} \quad B : \begin{cases} 3x = 2a + 11 \\ x = 3 \end{cases}$$

Имеем $A(3; \frac{2}{3})$, $B(3; -1)$. Тогда ответ $-1 \leq a \leq \frac{2}{3}$.

Важные замечания

1. Прежде чем исследовать некоторую функцию, ее надо ввести, если это не сделано. Например, вам дано уравнение $x^2 + ax + 3 = 0$. Вводим квадратичную функцию $f(x) = x^2 + ax + 3$, графиком которой является парабола. И далее решение.
2. Если дано уравнение $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = g(a)$, напоминающее уравнение окружности, но на месте R^2 стоит выражение с параметром, то следует рассмотреть три случая по отдельности:
 - $g(a) < 0$, тогда уравнение задает пустое множество;
 - $g(a) = 0$, тогда уравнение задает одну точку $(x_0; y_0)$;
 - $g(a) > 0$, тогда уравнение задает окружность с центром $(x_0; y_0)$ и радиусом $R = \sqrt{g(a)}$.
3. Если дано уравнение, напоминающее уравнение окружности, например, $A(x - x_0)^2 + B(y - y_0)^2 = C$, $A, B, C > 0$, то с помощью замены координат его легко свести к уравнению окружности. Достаточно переписать уравнение как $(\sqrt{A}x - \sqrt{A}x_0)^2 + (\sqrt{B}y - \sqrt{B}y_0)^2 = C$ и заменить $x' = \sqrt{A}x$, $y' = \sqrt{B}y$. Получим уравнение окружности $(x' - \sqrt{A}x_0)^2 + (y' - \sqrt{B}y_0)^2 = C$.
4. Если сказано: “из решения уравнения 1 следует решение уравнения 2”, это означает, что множество U_1 решений уравнения 1 содержится или совпадает со множеством U_2 решений уравнения 2: $U_1 \subseteq U_2$. Если сказано: “уравнение 1 равносильно уравнению 2”, это означает, что из уравнения 1 следует уравнение 2 и наоборот: из уравнения 2 следует уравнение 1, то есть множества решений этих уравнений одинаковы: $U_1 = U_2$.