# Теория по №17.Алгебра от «Школково»

## Содержание


1 Метод «гвоздей» 2

2 Теорема Виета 4

3 Метод хорошего и плохого корня 6

4 Замена в параметре 9

# 1 Метод «гвоздей»

Рассмотрим следующую задачу:

---

При каких значениях параметра $a$ уравнение

$$x^2 + 3ax - a^2 + 1 = 0$$

имеет два корня из отрезка $[-3; 0]$?

---

Сначала поймем, сколько всего корней может иметь данное нам уравнение. Так как оно квадратное, у него может быть максимум два корня. По условию уравнение должно иметь два корня на отрезке $[-3; 0]$, значит, мы получили первое условие на параметр $a$ — дискриминант данного квадратного уравнения должен быть больше 0, то есть $D > 0$.

**Замечание.** *В задаче, которую мы рассматриваем, коэффициент при $x^2$ равен единице, то есть ветви параболы этого уравнения всегда направлены вверх. А что если бы коэффициент при $x^2$ зависел от параметра $a$?*

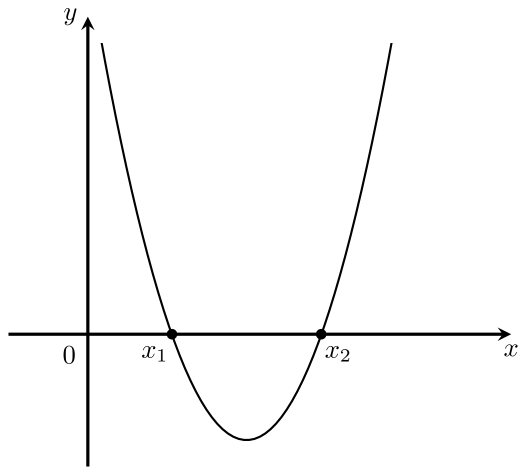
*Например, нам было бы дано уравнение*

$$(a-1)x^2 + 3ax - a^2 + 1 = 0$$

*В такой задаче с параметром важно в самом начале решения определить вид уравнения, потому что от этого зависит количество его корней. В нашем случае уравнение было бы квадратным только при $a - 1 \neq 0$, при $a - 1 < 0$ ветви параболы этого уравнения были бы направлены вниз, а при $a - 1 > 0$ — вверх. При $a - 1 = 0$ уравнение было бы линейным и не могло бы иметь два корня. Все эти случаи пришлось бы рассматривать отдельно.*

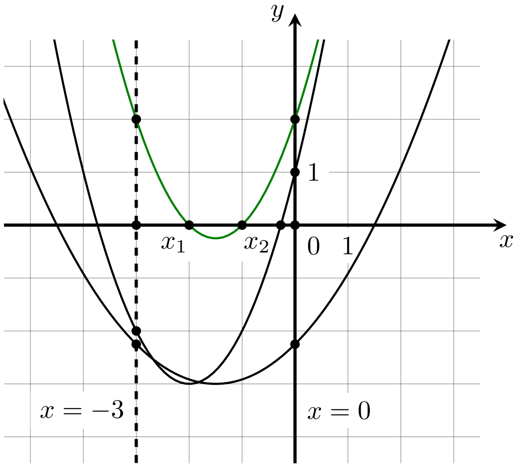
Вернемся к нашей задаче. Мы поняли, что дискриминант нашего уравнения должен быть больше 0, то есть мы получили первое условие-ограничение на значения параметра $a$. Будем называть такие ограничения «гвоздями».

Итак, первым «гвоздем» мы заставили нашу параболу пересекать ось абсцисс в двух точках, то есть выглядеть так:



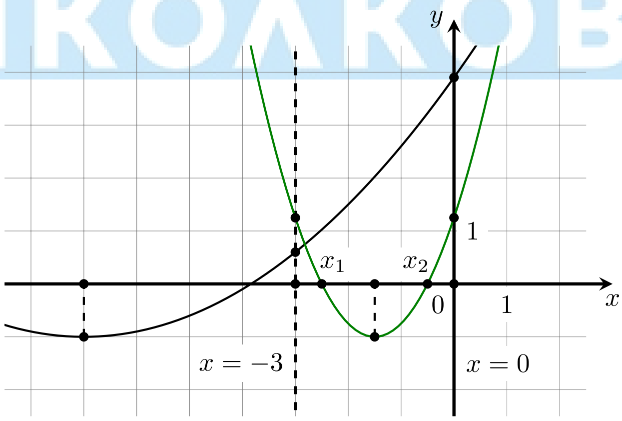

Далее будем накладывать новые ограничения на параметр $a$ — «прибивать гвоздями» нашу параболу так, чтобы в итоге этим ограничениям удовлетворяли только значения параметра, при которых парабола дважды пересекает ось абсцисс на отрезке $[-3; 0]$.

Поймем, какими должны быть эти ограничения. Давайте посмотрим на несколько парабол с ветвями вверх:




Зеленая парабола точно подходит под условие задачи, так как ее корни $x_1$ и $x_2$ лежат на отрезке $[-3;0]$. У двух других парабол выполняется условие $D>0$, но у одной из них оба корня лежат вне отрезка $[-3;0]$, у другой один лежит на отрезке, а второй — вне отрезка. Эти параболы отличаются тем, что хотя бы в одной из точек $x=-3$ и $x=0$ их значения отрицательны.

У зеленой параболы (заметим, что все параболы подходящего нам вида схематично будут выглядеть как зеленая) значения в обоих концах отрезка неотрицательны. Тогда, если мы обозначим $f(x)=x^2+3ax-a^2+1$, то, чтобы нам подходить, функция $f$ должна удовлетворять условиям $f(-3)\geqslant 0$ и $f(0)\geqslant 0$. Знаки в этих неравенствах нестрогие, так как парабола может проходить через точки $(-3;0)$ и $(0;0)$ и при этом подходить под условие задачи. Теперь у нас есть три «гвоздя», которые ограничивают нашу параболу. Но этого недостаточно, так как бывают такие параболы:




Такая парабола отличается тем, что координата ее вершины по $x$ не лежит на отрезке $[-3;0]$, в отличие от вершины зеленой параболы. Значит, если мы обозначим координату вершины параболы по оси $x$ через $x_0$, то получим следующее ограничение: $-3<x_0<0$. Действительно, ведь у любой подходящей параболы корни лежат на отрезке $[-3;0]$, а вершина, в свою очередь, лежит между этими корнями. Знаки строгие, так как если $x$-координата вершины параболы совпадет с одним из концов отрезка $[-3;0]$, то один из корней точно выйдет за его пределы. Тем самым мы получили четвертый «гвоздь», который окончательно фиксирует положение нашей параболы. Теперь остается лишь решить систему, которую задают полученные нами ограничения. Имеем:

$$\begin{cases}D>0\\ f(-3)\geqslant 0\\ f(0)\geqslant 0\\ -3<x_0<0\end{cases}$$

Решим каждое из условий по отдельности. Условие на дискриминант:

$$D > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 9a^2 + 4a^2 - 4 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - \frac{4}{13} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(a - \frac{2}{\sqrt{13}}\right)\left(a + \frac{2}{\sqrt{13}}\right) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} a < -\frac{2}{\sqrt{13}} \\ a > \frac{2}{\sqrt{13}} \end{array}\right.$$

Условие на значение в точке $x = -3$ :

$$f(-3) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad 9 - 9a - a^2 + 1 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + 9a - 10 \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a-1)(a+10) \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad -10 \leqslant a \leqslant 1$$

Условие на значение в точке $x = 0$ :

$$f(0) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad -a^2 + 1 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - 1 \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a-1)(a+1) \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leqslant a \leqslant 1$$

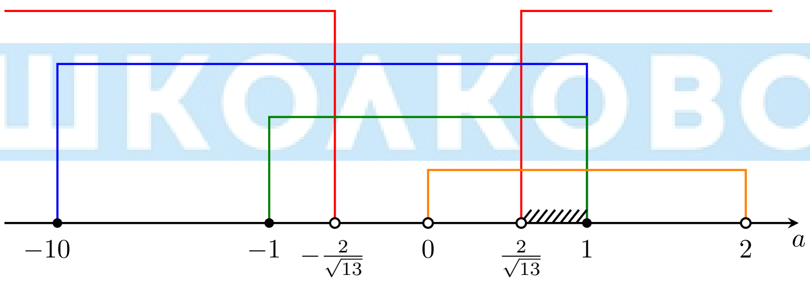
Условие на координату вершины параболы. Координата $x$ вершины параболы равна $-\frac{3}{2}a$, тогда

$$-3 < -\frac{3}{2}a < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < a < 2$$

Так как все условия находились в системе, нам нужно найти пересечение полученных нами промежутков. Сразу определим порядок чисел $-10$, $\pm 1$, $\pm\frac{2}{\sqrt{13}}$, $0$ и $2$ на числовой прямой. Очевидно, что $-10 < -1 < 0 < 1 < 2$. Оценим число $\frac{2}{\sqrt{13}}$ :

$$9 < 13 < 16 \quad \Rightarrow \quad 3 < \sqrt{13} < 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3} > \frac{2}{\sqrt{13}} > \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{2}{\sqrt{13}} < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 < -\frac{2}{\sqrt{13}} < 0$$

Значит, числа расположены на числовой прямой так: $-10 < -1 < -\frac{2}{\sqrt{13}} < 0 < \frac{2}{\sqrt{13}} < 1 < 2$. Тогда найдем пересечение полученных промежутков:




Пересечением является промежуток, над которым есть все 4 «крышечки» от полученных нами ограничений, то есть полуинтервал $\left(\frac{2}{\sqrt{13}}; 1\right]$. Значит, исходное уравнение имеет 2 корня на отрезке $[-3; 0]$ при $a \in \left(\frac{2}{\sqrt{13}}; 1\right]$.

## 2 Теорема Виета

Вспомним теорему Виета. Рассмотрим уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ с неотрицательным дискриминантом. Пусть $x_1$ и $x_2$ — его корни (необязательно различные). Тогда

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - xa(x_1 + x_2) + ax_1x_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} b = -a(x_1 + x_2) \\ c = ax_1x_2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Теперь решим следующую задачу:

---

Найдите все значения параметра $a$, при которых уравнение

$$(a-3)x^2 - 2ax + 5a = 0$$

имеет решения и все его решения положительные.

---

С самого начала определим, при каких значениях $a$ данное уравнение не является квадратным, то есть когда коэффициент при $x^2$ равен 0:

$$(a-3)=0 \quad \Leftrightarrow \quad a=3$$

При $a=3$ мы получаем уравнение

$$-6x+15=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x=5 \quad \Leftrightarrow \quad x=2,5$$

Значит, при $a=3$ единственным корнем данного уравнения является $x=2,5>0$. Следовательно, значение $a=3$ подходит под условие.

Далее будем рассматривать $a \neq 3$. При таких значениях параметра $a$ данное нам уравнение является квадратным. Найдем $\frac{D}{4}$.

$$\frac{D}{4}=a^2-5a^2+15a=-4a^2+15a$$

Рассмотрим два случая: когда $\frac{D}{4}=0$ и $\frac{D}{4}>0$. Случай $\frac{D}{4}<0$ нам не подходит, так как при нем уравнение не будет иметь корней вовсе.

- Если $\frac{D}{4}=0$:

$$\frac{D}{4}=0 \quad \Leftrightarrow \quad -4a^2+15a=0 \quad \Leftrightarrow \quad a\,(15-4a)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned}&a=0\\&a=\tfrac{15}{4}\end{aligned}\right.$$

  Найдем корни данного уравнения при полученных значениях $a$. Если $a=0$, то

$$x=\frac{a\pm\sqrt{\frac{D}{4}}}{a-3}=\frac{a}{a-3}=0$$

  Если $a=\frac{15}{4}$, то

$$x=\frac{a\pm\sqrt{\frac{D}{4}}}{a-3}=\frac{a}{a-3}=\frac{15}{4}\cdot\frac{4}{3}=5$$

  Мы получили, что при $a=0$ у уравнения нет положительных корней, то есть это значение нам не подходит. При $a=\frac{15}{4}$ есть один корень и он положителен, следовательно, $a=\frac{15}{4}$ подходит под условие.

- Если $\frac{D}{4}>0$. В таком случае уравнение имеет два различных корня. По условию они оба должны быть положительными. Заметим, что если это так, то сумма корней и их произведение тоже должны быть положительны, значит,

$$\begin{cases}\frac{D}{4}>0\\x_1+x_2>0\\x_1x_2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-4a^2+15a>0\\\frac{2a}{a-3}>0\\\frac{5a}{a-3}>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-a\,(4a-15)>0\\\left[\begin{aligned}&a<0\\&a>3\end{aligned}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0<a<\frac{15}{4}\\\left[\begin{aligned}&a<0\\&a>3\end{aligned}\right.\end{cases} \Leftrightarrow 3<a<\frac{15}{4}$$

Остается объединить все полученные значения параметра $a$. Ответ: $a\in\left[3;\frac{15}{4}\right]$.

**Замечание.** *Если бы в задаче было сказано, что один корень должен быть отрицательным, а другой положительным, нам нужно было бы наложить всего одно условие на корни уравнения:* $x_1x_2<0$.

# 3 Метод хорошего и плохого корня

Рассмотрим следующую задачу:

---

Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение

$$\ln(3x-1)\cdot\sqrt{x^2-8x+8a-a^2}=0$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;4]$.

---

*Если бы в данном нам уравнении не было буквы «а», то перед нами было бы обычное уравнение с $x$, относительно которого мы решали само уравнение.*

*Когда в уравнении появляется параметр $a$, он превращает одно уравнение в великое множество уравнений. Рассмотрим простой пример уравнения с параметром:*

$$x^2=a$$

*На первый взгляд это одно уравнение, но если мы будем подставлять под $a$ разные числа, то суть будет меняться.*

- *Если $a=4$, то*
$$x^2=4 \quad\Leftrightarrow\quad x=\pm 2$$
- *Если $a=-1$, то уравнение $x^2=-1$ не имеет решений.*

*Таким образом, уравнение и его решения зависят от значения параметра $a$.*

---

Вернемся к задаче. Здесь нам нужно найти такие значения параметра $a$, при которых ровно один корень полученного уравнения лежит на отрезке $[0;4]$.

Попробуем решить уравнение, не обращая внимания на $a$.

Сразу можем заметить, что у этого уравнения есть ОДЗ:

$$3x-1>0 \quad \text{и} \quad x^2-8x+8a-a^2\geqslant 0$$

Перед нами произведение двух множителей, которое равно 0, значит,

$$\ln(3x-1)=0 \quad \text{или} \quad \sqrt{x^2-8x+8a-a^2}=0$$

Решим левое уравнение:

$$\ln(3x-1)=0$$
$$\ln(3x-1)=\ln 1$$
$$3x-1=1$$
$$x_1=\frac{2}{3}$$

Заметим, что мы не можем утверждать, что $x_1$ является корнем при всех значениях параметра $a$, так как, возможно, при каком-то из значений $a$ корень $x_1=\frac{2}{3}$ не входит в ОДЗ уравнения. Поэтому назовем $x_1=\frac{2}{3}$ **кандидатом,** то есть возможным корнем.

Решим правое уравнение с помощью теоремы Виета:

$$\sqrt{x^2-8x+8a-a^2}=0$$
$$x^2-8x+8a-a^2=0$$
$$\begin{cases} x_2+x_3=8 \\ x_2\cdot x_3=a\cdot(8-a) \end{cases}$$
$$\left[\begin{aligned} &x_2=a \\ &x_3=8-a \end{aligned}\right.$$

Тогда $x_2=a$ и $x_3=8-a$ — кандидаты. Заметим, что пока мы никак не пользовались тем, что $a$ — параметр.

Итак, для того чтобы кандидат $x_1$ был корнем, нужно чтобы он удовлетворял ОДЗ правого уравнения, а для того чтобы кандидаты $x_2$ и $x_3$ были корнями, нужно чтобы они удовлетворяли ОДЗ левого уравнения.

Воспользуемся **методом хорошего/плохого корня.**

- Пусть $x_1$ — хороший корень, то есть входит в ОДЗ всего уравнения и лежит на отрезке $[0;4]$.

  Заметим, что ОДЗ логарифма нам проверять не нужно, так как мы нашли $x_1$, решив уравнение $\ln(3x-1)=0$. Тогда должно быть выполнено $x^2-8x+8a-a^2\geqslant 0$. Подставим $x_1$ :

$$\begin{cases} \dfrac{4}{9}-8\cdot\dfrac{2}{3}+8a-a^2\geqslant 0 \\ 0\leqslant\dfrac{2}{3}\leqslant 4 \end{cases}$$
$$4-48+72a-9a^2\geqslant 0$$
$$9a^2-72a+44\leqslant 0$$

  Решим сопутствующее уравнение $9a^2-72a+44=0$ :

$$a_{1,2}=\frac{36\pm\sqrt{36^2-9\cdot 44}}{9}=\frac{36\pm\sqrt{9\cdot(144-44)}}{9}=\frac{36\pm 30}{9}\quad\Rightarrow\quad\left[\begin{aligned} &a_1=\tfrac{2}{3} \\ &a_2=\tfrac{22}{3} \end{aligned}\right.$$

  Таким образом,

$$9a^2-72a+44\leqslant 0\quad\Rightarrow\quad a\in\left[\frac{2}{3};\frac{22}{3}\right]$$

  Значит, $x_1$ является хорошим корнем при $a\in\left[\dfrac{2}{3};\dfrac{22}{3}\right]$.

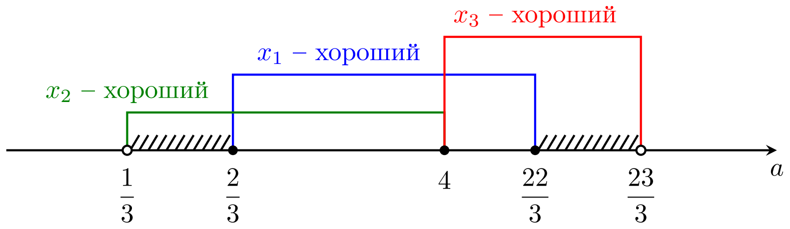
- Пусть $x_2=a$ — хороший. Заметим, что он точно удовлетворяет ОДЗ подкоренного выражения, тогда имеем

$$\begin{cases} 0\leqslant a\leqslant 4 \\ 3a-1>0 \end{cases}\quad\Rightarrow\quad a\in\left(\frac{1}{3};4\right]$$

- Пусть $x_3=8-a$ — хороший. Тогда

$$\begin{cases} 0\leqslant 8-a\leqslant 4 \\ 3(8-a)-1>0 \end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases} -8\leqslant -a\leqslant -4 \\ 24-3a-1>0 \end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases} 8\geqslant a\geqslant 4 \\ a<\frac{23}{3} \end{cases}\quad\Rightarrow\quad a\in\left[4;\frac{23}{3}\right)$$

В условии задачи нас просят найти такие значения параметра $a$, при которых уравнение имеет ровно один корень. Изобразим на числовой прямой промежутки, на которых каждый из корней является хорошим.




Теперь нам нужно найти такие значения параметра $a$, которые находятся ровно под одной «крышей», так как по условию у нас должен быть **ровно один** хороший корень. Это в точности $a \in \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{22}{3}; \frac{23}{3}\right)$.

Но это еще не все. Сейчас нам нужно проверить совпадение корней, ведь если при каком-то значении параметра $a$ несколько корней являются хорошими и равны между собой, то по сути само уравнение имеет один корень. Рассмотрим случаи совпадения корней.

- Пусть $x_1 = x_2 = \frac{2}{3}$. Тогда при $a = \frac{2}{3}$ и $x_1$, и $x_2$ являются хорошими корнями, а $x_3$ — нет, но при этом $x_1 = x_2$, следовательно, исходное уравнение имеет ровно один корень. Значит, значение $a = \frac{2}{3}$ нужно включить в ответ.

- Пусть $x_1 = x_3 = \frac{2}{3}$. Тогда
$$\frac{2}{3} = x_3 = 8 - a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{22}{3}$$
Тогда при $a = \frac{22}{3}$ и $x_1$, и $x_3$ являются хорошими корнями, а $x_2$ — нет, но при этом $x_1 = x_3$, следовательно, исходное уравнение имеет ровно один корень. Значит, значение $a = \frac{22}{3}$ нужно включить в ответ.

- Пусть $x_2 = x_3$. Тогда
$$x_2 = x_3 \quad \Rightarrow \quad a = 8 - a \quad \Rightarrow \quad a = 4$$
Тогда при $a = 4$ и $x_1$, и $x_2$, и $x_3$ являются хорошими корнями, но при этом совпадают только $x_2$ и $x_3$, следовательно, исходное уравнение имеет два корня. Значит, значение $a = 4$ не нужно включать в ответ.

- Все три корня не могут совпасть одновременно, так как $x_1$ и $x_2$ совпадают при $a = \frac{2}{3}$, а $x_2$ и $x_3$ — при $a = 4$.

Таким образом, ответ: $a \in \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{22}{3}; \frac{23}{3}\right)$.

# 4 Замена в параметре

Рассмотрим следующую задачу:

---

Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых уравнение

$$\left(2^{\sin x}-1\right)a^2-\left(3\cdot 2^{\sin x}-1\right)a+2^{\sin x+1}=0$$

имеет хотя бы один корень.

---

Немного перепишем уравнение из условия:

$$\left(2^{\sin x}-1\right)a^2-\left(3\cdot 2^{\sin x}-1\right)a+2^{\sin x}\cdot 2=0$$

Сделаем замену. Пусть $2^{\sin x}=t$. Тогда исходное уравнение примет вид

$$\begin{gathered}(t-1)\cdot a^2-(3t-1)\cdot a+2t=0\\ a^2t-a^2-3ta+a+2t=0\\ t\cdot(a^2-3a+2)=a^2-a\\ t\cdot(a-1)(a-2)=a(a-1)\end{gathered}$$

Итак, на этом моменте важно понимать, что после того, как мы сделали замену, ее нужно проанализировать. Ведь изначально нам было дано уравнение с $x$ и в условии требовалось найти такие значения параметра $a$, при которых оно имеет хотя бы один корень. После замены мы получили другое уравнение с $t$, а значит и условие задачи могло измениться. На этом шаге нам нужно понять, что теперь от нас требует условие.

Когда мы найдем из полученного уравнения значение $t$ и сделаем обратную замену, то мы должны найти хотя бы один корень $x$. Проанализируем замену:

$$\begin{gathered}-1\leqslant\sin x\leqslant 1\\ 2^{-1}\leqslant 2^{\sin x}\leqslant 2^1\\ \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 2\end{gathered}$$

Таким образом, если мы найдем $t\in\left[\frac{1}{2};2\right]$, то корень $x$ найдется, а если, например, мы получим, что $t=4$, то уравнение $2^{\sin x}=4$ не будет иметь корней и исходное уравнение также не будет иметь корней.

Следовательно, нам нужно найти такие значения параметра $a$, при которых уравнение

$$t\cdot(a-1)(a-2)=a(a-1)$$

будет иметь хотя бы один корень на отрезке $\left[\frac{1}{2};2\right]$.

Выразим $t$ через $a$. Для этого нужно разделить обе части уравнения на $(a-1)(a-2)$, то есть $a$ не должно быть равно ни 1, ни 2. Тогда рассмотрим отдельно случаи $a=1$ и $a=2$.

- Пусть $a=1$. Тогда уравнение примет вид $0=0$. Решением данного уравнения являются все $t$. Следовательно, этот случай нам подходит.

- Пусть $a=2$. Тогда уравнение примет вид $0=2$. Такое уравнение не имеет решений, то есть и изначальное уравнение не имеет решений. Следовательно, этот случай нам не подходит.

Значит, мы можем считать, что $a \neq 1$ и $a \neq 2$. Тогда имеем:

$$t = \frac{a}{a-2}$$

Нам нужно, чтобы $t \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$. Следовательно,

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{a}{a-2} \leqslant 2$$

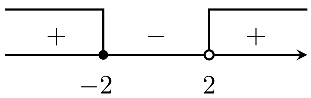
$$\begin{cases} \dfrac{a}{a-2} \geqslant \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{a}{a-2} \leqslant 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2a-a+2}{2(a-2)} \geqslant 0 \\ \dfrac{a-2a+4}{a-2} \leqslant 0 \end{cases}$$

- Решим первое неравенство системы:

$$\frac{2a-a+2}{2(a-2)} \geqslant 0$$

По методу интервалов:



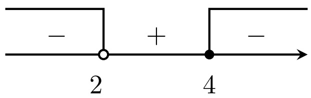

Таким образом, $a \leqslant -2$ или $a > 2$.



- Решим второе неравенство системы:

$$\frac{a-2a+4}{a-2} \leqslant 0$$

По методу интервалов:




Таким образом, $a < 2$ или $a \geqslant 4$.

Решая систему из неравенств, получаем $a \in (-\infty; -2] \cup [4; +\infty)$. Заметим, что мы проверили $a = 1$ и оно нам подошло. Итоговый ответ: $a \in (-\infty; -2] \cup \{1\} \cup [4; +\infty)$.