

Сложные задачи прикладного характера. Задание №16

Содержание

1	Аннуитетный платеж	2
1.1	Примеры	2
1.2	Общий вид	3
2	Дифференцированный платеж	4
2.1	Примеры	4
2.2	Общий вид	6
3	Банковский вклад	7
3.1	Примеры	7

ШКОЛКОВО

1 Аннуитетный платеж

Аннуитетный платеж — это такая система выплат, при которой кредит выплачивается ежегодно (ежемесячно) равными платежами. При этом каждый год (месяц) **до внесения платежа** банк начисляет на оставшуюся часть долга некоторый процент, то есть оставшаяся сумма долга увеличивается на это количество процентов.

1.1 Примеры

Пример 1 Клиент взял в банке 500000 рублей под 5% годовых. Сколько рублей он будет должен банку в конце первого года?

Так как процентная ставка составляет 5%, то в конце первого года клиент будет должен банку 105% от первоначальной суммы, то есть от 500000 рублей:

$$\frac{105}{100} \cdot 500\,000 = 1,05 \cdot 500\,000 = 525\,000$$

■

Пример 2 Клиент взял 2,1 млн рублей в банке под 10% годовых и должен погасить кредит через 2 года равными ежегодными платежами. Сколько рублей должен составлять его ежегодный платеж?

Обозначим ежегодный платеж за x млн рублей. Составим таблицу:

Год	Сумма долга до начисления %	Сумма долга после начисления %	Сумма долга после платежа
1	2,1	$2,1 \cdot 0,01(100 + 10) = 1,1 \cdot 2,1$	$1,1 \cdot 2,1 - x$
2	$1,1 \cdot 2,1 - x$	$(1,1 \cdot 2,1 - x) \cdot 0,01(100 + 10)$	$1,1(1,1 \cdot 2,1 - x) - x$

Так как в конце второго года кредит должен быть выплачен полностью, то это значит, что долг банку на конец второго года равен нулю. То есть

$$1,1(1,1 \cdot 2,1 - x) - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1,1^2 \cdot 2,1 - x(1,1 + 1) = 0$$

Отсюда находим ежегодный платеж $x = 1,21$ млн рублей.

■

Пример 3 Клиент хочет взять в банке кредит на 2 месяца под 12,5%. Выплачивать кредит он должен равными ежемесячными платежами. Какую сумму он может взять в банке, если каждый месяц он будет вносить 81000 рублей?

Будем производить все вычисления в тысячах рублей (чтобы вычисления были проще). Обозначим сумму, которую клиент возьмет в банке, за A тыс. рублей. Если раз в месяц на оставшуюся часть долга начисляется 12,5%, то это значит, что эта часть долга увеличивается в $\frac{100+12,5}{100} = 1,125$ раз. Составим таблицу:

Месяц	Сумма долга до начисления %	Сумма долга после начисления %	Сумма долга после платежа
1	A	$1,125 \cdot A$	$1,125 \cdot A - 81$
2	$1,125 \cdot A - 81$	$1,125 \cdot (1,125 \cdot A - 81)$	$1,125(1,125 \cdot A - 81) - 81$

Так как в конце второго месяца кредит должен быть выплачен полностью, то:

$$1,125(1,125 \cdot A - 81) - 81 = 0 \quad \Rightarrow \quad 1,125^2 A - 81 \cdot (1,125 + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{81 \cdot (1,125 + 1)}{1,125^2}$$

Чтобы вычисления были проще, переведем дробь $1,125$ в рациональную: $1,125 = \frac{9}{8}$. Тогда

$$A = \frac{17 \cdot 81 \cdot 8^2}{8 \cdot 9^2},$$

откуда с легкостью находим, что $A = 136$ тыс.руб. Не забываем перевести сумму из тыс.руб. в рубли. Таким образом, клиент может взять в банке 136000 рублей. ■

Пример 4 Михаил взял в банке 488000 рублей на 3 года. В банке ему сказали, что выплачивать кредит он должен, внося каждый год платеж в размере 250000 рублей, но забыли сообщить о процентной ставке банка. Помогите Михаилу определить, какой процент начисляет банк раз в год на сумму долга?

Будем производить все вычисления в тысячах рублей. Обозначим процентную ставку банка за $r\%$. Тогда каждый год банк увеличивает оставшуюся сумму долга на $r\%$, то есть сумма долга после начисления процентов будет равна $(100 + r)\%$ от суммы долга до начисления процентов. Или, что то же самое, будет в $\frac{100+r}{100}$ раз больше, чем сумма долга до начисления процентов. Обозначим величину $\frac{100+r}{100}$ за t и составим таблицу:

Год	Сумма долга до начисления %	Сумма долга после начисления %	Сумма долга после платежа
1	488	$t \cdot 488$	$t \cdot 488 - 250$
2	$t \cdot 488 - 250$	$t \cdot (t \cdot 488 - 250)$	$t(t \cdot 488 - 250) - 250$
3	$t(t \cdot 488 - 250) - 250$	$t(t(t \cdot 488 - 250) - 250)$	$t(t(t \cdot 488 - 250) - 250) - 250$

Так как в конце третьего года кредит должен быть выплачен полностью, то

$$t(t(t \cdot 488 - 250) - 250) - 250 = 0 \Rightarrow 488t^3 - 250(t^2 + t + 1) = 0 \Rightarrow 244t^3 - 125t^2 - 125t - 125 = 0$$

Получили кубическое уравнение. Попробуем угадать его корень. Если кубическое уравнение имеет рациональный корень $\frac{p}{q}$, то 125 делится на p , а 244 делится на q . Заметим также, что скорее всего $0 \leq r \leq 100$ и r — целое число (по логике задачи), значит, скорее всего $1 \leq t \leq 2$ и t — рациональное. В таком случае нам подходят лишь комбинации $\frac{5}{4}, \frac{125}{122}$. Проверкой убеждаемся, что $t = \frac{5}{4}$ является корнем нашего уравнения.

Значит, уравнение принимает вид $(4t - 5)(61t^2 + 45t + 25) = 0$.

Уравнение $61t^2 + 45t + 25 = 0$ не имеет корней. Значит, наше кубическое уравнение имеет всего один корень $t = \frac{5}{4}$, откуда $r = 25\%$. ■

1.2 Общий вид

Выведем общую формулу для аннуитетных платежей. Уже по уравнениям из предыдущих примеров должно стать понятно, как она выглядит. Но все же приведем ее вывод.

Вывод формулы:

Пусть клиент взял в банке A руб. в кредит на n лет. Годовая процентная ставка в банке $r\%$. Выплачивать кредит необходимо равными ежегодными платежами.

Обозначим $\frac{100+r}{100}$ за t :

Год	Сумма долга до начисления %	Сумма долга после начисления %	Сумма долга после платежа
1	A	tA	$tA - x$
2	$tA - x$	$t(tA - x)$	$t(tA - x) - x = t^2A - tx - x$
3	$t^2A - tx - x$	$t(t^2A - tx - x)$	$t(t^2A - tx - x) - x =$ $= t^3A - t^2x - tx - x$
...	...	...	...
n	$t^{n-1}A - t^{n-2}x - \dots - x$	$t(t^{n-1}A - t^{n-2}x - \dots - x)$	$t(t^{n-1}A - t^{n-2}x - \dots - x) - x$

Таким образом:

$$t(t^{n-1}A - t^{n-2}x - \dots - x) - x = 0 \Rightarrow t^n A - x(t^{n-1} + t^{n-2} + \dots + 1) = 0$$

Значит, в случае с аннуитетным платежом имеет место следующая формула:

$$\left(\frac{100+r}{100}\right)^n \cdot A - x \left(\left(\frac{100+r}{100}\right)^{n-1} + \left(\frac{100+r}{100}\right)^{n-2} + \dots + 1 \right) = 0,$$

где A — сумма, взятая в кредит, $r\%$ — процентная ставка в банке, x — сумма платежа, n — количество лет (месяцев), на которое взят кредит.

2 Дифференцированный платеж

Дифференцированный платеж — это такая система выплат, при которой сама сумма долга уменьшается равномерно, то есть на одну и ту же величину каждый год (месяц). При этом платежи каждый год **разные**.

Таким образом, если кредит взят на n лет, то это значит, что сумму кредита A разделили на n равных частей и что каждый год после платежа сумма долга уменьшается на $\frac{1}{n}A$ по сравнению с долгом на начало года.

2.1 Примеры

Пример 1 Клиент взял в банке кредит на 2 года под 15% годовых. Выплачивать кредит он должен ежегодными платежами так, чтобы сумма долга уменьшалась равномерно. Какую сумму он взял в банке, если оказалось, что в итоге он заплатил банку 490000 рублей?

Пусть кредит составил A рублей. Так как кредит взят на 2 года, значит, после первой выплаты долг должен составлять $A - \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}A$ рублей, после второй выплаты $\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}A = 0$ рублей. Составим таблицу:

Год	Сумма долга до начисления %	Сумма долга после начисления %	Сумма долга после выплаты	Выплата
1	A	$A + 0,15A$	$\frac{1}{2}A$	$0,15A + \frac{1}{2}A$
2	$\frac{1}{2}A$	$\frac{1}{2}A + 0,15 \cdot \frac{1}{2}A$	0	$0,15 \cdot \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A$

То, что клиент в итоге заплатил банку, есть не что иное, как сумма всех выплат по кредиту. то есть

$$0,15A + \frac{1}{2}A + 0,15 \cdot \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A = 490\,000 \Rightarrow A = \frac{490\,000 \cdot 2}{2,45} = 400\,000 \text{ рублей}$$

■

Пример 2 Александр взял в банке кредит на 50000 рублей на 3 месяца, причем выплачивать кредит он должен ежемесячными выплатами так, чтобы сумма долга каждый месяц уменьшалась на одну и ту же величину. Сколько рублей составит переплата Александра по кредиту, если процентная ставка в банке 10%?

Так как кредит взят на 3 месяца, то после первой выплаты долг должен составить $A - \frac{1}{3}A = \frac{2}{3}A$, после второй $\frac{2}{3}A - \frac{1}{3}A = \frac{1}{3}A$, а после третьей — 0 рублей. Составим таблицу, производя все вычисления в тыс. рублей:

Месяц	Сумма долга до начисления %	Сумма долга после начисления %	Сумма долга после выплаты	Выплата
1	50	$50 + 0,1 \cdot 50$	$\frac{2}{3} \cdot 50$	$0,1 \cdot 50 + \frac{1}{3} \cdot 50$
2	$\frac{2}{3} \cdot 50$	$\frac{2}{3} \cdot 50 + 0,1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 50$	$\frac{1}{3} \cdot 50$	$0,1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 50 + \frac{1}{3} \cdot 50$
3	$\frac{1}{3} \cdot 50$	$\frac{1}{3} \cdot 50 + 0,1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 50$	0	$0,1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 50 + \frac{1}{3} \cdot 50$

Таким образом, всего Александр заплатил банку

$$\left(0,1 \cdot 50 + \frac{1}{3} \cdot 50\right) + \left(0,1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 50 + \frac{1}{3} \cdot 50\right) + \left(0,1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 50 + \frac{1}{3} \cdot 50\right)$$

тыс. рублей.

Перегруппируем слагаемые и вынесем за скобки общие множители:

$$0,1 \cdot 50 \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) + 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 50 = 0,1 \cdot 50 \cdot 2 + 50$$

Для того, чтобы найти переплату по кредиту, необходимо из того, что он в итоге заплатил банку, отнять сумму кредита:

$$(0,1 \cdot 50 \cdot 2 + 50) - 50 = 10 \text{ тыс. рублей.}$$

Таким образом, его переплата составила 10000 рублей.

Заметим:

1. Каждая выплата состоит из двух частей:

первая часть — это сумма “набежавших” процентов на текущий долг (в первый год это $0,1 \cdot 50$, во второй — $0,1 \cdot (23 \cdot 50)$ и т.д.);

вторая часть всегда фиксирована — это та часть, на которую должен уменьшаться долг каждый год (в нашем примере это $13 \cdot 50$).

Действительно, когда клиент выплачивает “набежавшие” проценты, сумма его долга становится равна той, которая была до начисления процентов (например, в первый год становится равна A). А далее он еще вносит $\frac{1}{n}$ часть от этого долга. И таким образом сумма долга уменьшается на $\frac{1}{n}$ часть, что и подразумевает дифференцированная система платежей.

2. Переплата по кредиту всегда равна сумме “набежавших” процентов на долг в первый год, во второй год, в третий год и т.д.

В нашем примере переплата как раз равна $0,1 \cdot 50 + 0,1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 50 + 0,1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 50$.

■

Пример 3 Банк предлагает клиентам кредит на 1 млн рублей на следующих условиях:

- каждый год банк начисляет на оставшуюся часть долга 10%;
- после начисления процентов клиент обязан внести платеж;
- через 5 лет кредит должен быть выплачен полностью;
- система выплат дифференцированная.

Сколько процентов от первоначального долга составит переплата по такому кредиту?

Так как кредит выдается на 5 лет, это значит, что долг должен уменьшаться каждый год на $\frac{1}{5} \cdot 1$ млн. рублей, то есть после первой выплаты долг составит $1 - \frac{1}{5} \cdot 1 = \frac{4}{5}$ млн. рублей, после второй $\frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$ млн. рублей и т.д.

Составим таблицу, причем все вычисления будем производить в млн рублей:

Год	Сумма долга до начисления %	Сумма долга после начисления %	Сумма долга после выплаты	Выплата
1	1	$1 + 0,1$	$\frac{4}{5}$	$0,1 + \frac{1}{5}$
2	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5} + 0,1 \cdot \frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$0,1 \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{5}$
3	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5} + 0,1 \cdot \frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$0,1 \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{5}$
4	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5} + 0,1 \cdot \frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$0,1 \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{5}$
5	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5} + 0,1 \cdot \frac{1}{5}$	0	$0,1 \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$

Таким образом, переплата по кредиту составила:

$$\left(0,1 + \frac{1}{5}\right) + \left(0,1 \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{5}\right) + \left(0,1 \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{5}\right) + \left(0,1 \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{5}\right) + \left(0,1 \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right) - 1 = \frac{3}{10} \text{ млн. рублей.}$$

Для того, чтобы посчитать, сколько *процентов* составила переплата относительно кредита, необходимо переплату разделить на сумму кредита и умножить на 100%:

$$\frac{\frac{3}{10}}{1} \cdot 100\% = 30\%$$

2.2 Общий вид

Выведем несколько формул:

1. Формула для выплаты по кредиту.

Пусть взят кредит на A рублей, на n лет, годовая ставка $r\%$.

Значит, каждый год долг должен уменьшаться на $\frac{1}{n}A$ рублей. К тому же, например, в первый год после начисления процентов долг составит $A + \frac{r}{100}A$, поэтому обозначим для удобства $\frac{r}{100} = y$ и составим таблицу:

Год	Сумма долга до начисления %	Сумма долга после начисления %	Сумма долга после выплаты	Выплата
1	A	$A + yA$	$\frac{n-1}{n}A$	$yA + \frac{1}{n}A$
2	$\frac{n-1}{n}A$	$\frac{n-1}{n}A + y \cdot \frac{n-1}{n}A$	$\frac{n-2}{n}A$	$y \cdot \frac{n-1}{n}A + \frac{1}{n}A$
3	$\frac{n-2}{n}A$	$\frac{n-2}{n}A + y \cdot \frac{n-2}{n}A$	$\frac{n-3}{n}A$	$y \cdot \frac{n-2}{n}A + \frac{1}{n}A$
4	$\frac{n-3}{n}A$	$\frac{n-3}{n}A + y \cdot \frac{n-3}{n}A$	$\frac{n-4}{n}A$	$y \cdot \frac{n-3}{n}A + \frac{1}{n}A$
...	...	...	...	...
$n-1$	$\frac{2}{n}A$	$\frac{2}{n}A + y \cdot \frac{2}{n}A$	$\frac{1}{n}A$	$y \cdot \frac{2}{n}A + \frac{1}{n}A$
n	$\frac{1}{n}A$	$\frac{1}{n}A + y \cdot \frac{1}{n}A$	0	$y \cdot \frac{1}{n}A + \frac{1}{n}A$

Таким образом, если i — номер года, то выплата в i -ый год будет равна: $x_i = y \cdot \frac{n-(i-1)}{n}A + \frac{1}{n}A$, или

$$x_i = \frac{r}{100} \cdot \frac{n-i+1}{n}A + \frac{1}{n}A$$

2. Формула для переплаты по кредиту.

Для того, чтобы посчитать переплату, необходимо просто сложить все данные из последнего столбца и отнять A :

$$\begin{aligned} &\left(yA + \frac{1}{n}A\right) + \left(y \cdot \frac{n-1}{n}A + \frac{1}{n}A\right) + \left(y \cdot \frac{n-2}{n}A + \frac{1}{n}A\right) + \left(y \cdot \frac{n-3}{n}A + \frac{1}{n}A\right) + \dots + \left(y \cdot \frac{2}{n}A + \frac{1}{n}A\right) + \\ &+ \left(y \cdot \frac{1}{n}A + \frac{1}{n}A\right) - A = \left(yA + y \cdot \frac{n-1}{n}A + y \cdot \frac{n-2}{n}A + y \cdot \frac{n-3}{n}A + \dots + y \cdot \frac{2}{n}A + y \cdot \frac{1}{n}A\right) + \\ &+ \left(\frac{1}{n}A + \frac{1}{n}A + \frac{1}{n}A + \frac{1}{n}A + \dots + \frac{1}{n}A + \frac{1}{n}A\right) - A = yA \left(1 + \frac{n-1}{n} + \frac{n-2}{n} + \frac{n-3}{n} + \dots + \frac{2}{n} + \frac{1}{n}\right) + \\ &+ n \cdot \frac{1}{n}A - A = yA \left(1 + \frac{n-1}{n} + \frac{n-2}{n} + \frac{n-3}{n} + \dots + \frac{2}{n} + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

В скобках находится арифметическая прогрессия, первый член которой $a_1 = 1$, последний $a_n = \frac{1}{n}$, разность $d = -\frac{1}{n}$, а количество членов равно n . Сумма такой прогрессии равна:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} \cdot n = \frac{n+1}{2}$$

Значит, вся переплата равна $yA \cdot \frac{n+1}{2}$, или

$$P = \frac{r}{100} \cdot \frac{n+1}{2} A$$

3 Банковский вклад

Банковский вклад — это сумма денег, переданная банку на хранение с целью получить доход в виде начисленных процентов.

Раз в какой-то промежуток времени (в задачах это, как правило, месяц или год) банк начисляет на текущую сумму некоторое количество $r\%$ процентов.

Раз в год **после начисления процентов** клиент, как правило, имеет право доложить на счет любую сумму денег. Также клиент имеет право снимать со счета любую сумму (естественно, не превышающую имеющуюся). Время, когда он может это сделать, указывается в задаче.

3.1 Примеры

Пример 1 В январе 2014 года клиент положил в банк 30000 рублей под 10% годовых, которые банк начисляет раз в год в декабре. Сколько рублей будет на счете у клиента в январе 2017 года?

То, что банк начисляет на текущую сумму 10%, значит, что после начисления процентов сумма будет составлять 110% от суммы, находящейся на счете до начисления процентов.

Составим таблицу:

Год	Сумма на счете до начисления % (январь)	Сумма на счете после начисления % (декабрь)
2014	30 000	$1,1 \cdot 30\,000$
2015	$1,1 \cdot 30\,000$	$1,1^2 \cdot 30\,000$
2016	$1,1^2 \cdot 30\,000$	$1,1^3 \cdot 30\,000$

Таким образом, в декабре 2016 года после начисления процентов на счете у клиента будет $1,1^3 \cdot 30000$ рублей. Эта же сумма будет у него на счете и в январе 2017 года (Так как проценты начисляются только в декабре).

Значит, ответом будет 39930 рублей. ■

Пример 2 В марте 2016 года Мария сделала вклад в банк в размере 100000 рублей на 3 года. Раз в год в ноябре банк начисляет на имеющуюся на счете сумму 5%. Какую максимальную сумму денег может снять Мария в декабре 2017 года, чтобы в марте 2019 года сумма на счете была не менее 105000 рублей?

Составим таблицу, делая все вычисления в тыс. рублей и обозначив за x сумму, которую Мария снимет со счета:

Год	Сумма на счете до начисления % (март)	Сумма на счете после начисления % (ноябрь)	Сумма на счете после снятия (декабрь)
2016	100	$1,05 \cdot 100$	$1,05 \cdot 100$
2017	$1,05 \cdot 100$	$1,05^2 \cdot 100$	$1,05^2 \cdot 100 - x$
2018	$1,05^2 \cdot 100 - x$	$1,05(1,05^2 \cdot 100 - x)$	$1,05(1,05^2 \cdot 100 - x)$

Заметим, что в марте 2019 года на счете у Марии будет столько же денег, сколько и в декабре 2018. Таким образом, необходимо найти такой максимальный x , чтобы

$$1,05(1,05^2 \cdot 100 - x) \geq 105$$

Решая данное неравенство, получим, что $x \leq 10,25$ тыс. рублей. Таким образом, максимальная сумма, которую можно снять со счета, это 10250 рублей. ■

Пример 3 Планируется сделать вклад в размере 1 млн. рублей под целое число процентов. Раз в год после начисления процентов планируется снимать со счета 100 тыс. рублей. Какой должен быть наименьший годовой процент в банке, чтобы после трех таких снятий сумма на счете была не менее 1 млн. рублей?

Обозначим годовой процент банка на $r\%$. Тогда после начисления процентов сумма на счете будет увеличиваться в $\frac{100+r}{100}$ раз. Поэтому обозначим $\frac{100+r}{100}$ за t и составим таблицу, производя все вычисления в тыс. рублей:

Год	Сумма на счете до начисления %	Сумма на счете после начисления %	Сумма на счете после снятия
1	1000	$t \cdot 1000$	$t \cdot 1000 - 100$
2	$t \cdot 1000 - 100$	$t(t \cdot 1000 - 100)$	$t(t \cdot 1000 - 100) - 100$
3	$t(t \cdot 1000 - 100) - 100$	$t(t(t \cdot 1000 - 100) - 100)$	$t(t(t \cdot 1000 - 100) - 100) - 100$

Таким образом, необходимо, чтобы

$$\begin{aligned}
 t(t(t \cdot 1000 - 100) - 100) - 100 &\geq 1000 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow 1000t^3 - 100t^2 - 100t - 100 \geq 1000 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow 1000(t^3 - 1) - 100(t^2 + t + 1) \geq 0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow 1000(t - 1)(t^2 + t + 1) - 100(t^2 + t + 1) \geq 0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow (t^2 + t + 1)(1000t - 1000 - 100) \geq 0
 \end{aligned}$$

Так как процент в банке не может быть отрицательным, то есть $r \geq 0 \Rightarrow t \geq 1 \Rightarrow$ выражение $t^2 + t + 1$ всегда положительно. Следовательно, полученное неравенство равносильно

$$1000t - 1000 - 100 \geq 0 \Rightarrow t \geq 1,1 \Rightarrow r \geq 10$$

Значит, наименьший годовой процент в банке должен быть 10%. ■