Кредитование: дифференцированная система

Вы взяли в кредит определенную сумму денег S под определенный процент годовых.

Дифференцированные платежи — это система выплат, при которой сумма долга уменьшается равномерно, то есть на одну и ту же величину каждый год. При этом платежи каждый год разные.
Таким образом, если в кредит взята сумма S на n лет под $r\%$ процентов годовых, это означает, что

- каждый год на текущий долг начисляются проценты, то есть долг увеличивается на величину $k\cdot$ «текущий долг», где $k = 0,01\cdot r$;
- платежи состоят из двух частей: первая часть — это начисленные проценты, вторая — сумма S, разделенная на n равных частей.
  Тогда долг каждый год уменьшается на $\frac{1}{n}S$.

Год	Долг до начисления %	Долг после начисления %	Выплата	Долг после выплаты
1	S	$S+k\cdot S$	$k\cdot S+\frac{1}{n}S$	$S-\frac{1}{n}S$
2	$S-\frac{1}{n}S=\frac{n-1}{n}S$	$\frac{n-1}{n}S+k\cdot\frac{n-1}{n}S$	$k\cdot\frac{n-1}{n}S+\frac{1}{n}S$	$\frac{n-1}{n}S-\frac{1}{n}S$
3	$S-\frac{2}{n}S=\frac{n-2}{n}S$	$\frac{n-2}{n}S+k\cdot\frac{n-2}{n}S$	$k\cdot\frac{n-2}{n}S+\frac{1}{n}S$	$\frac{n-2}{n}S-\frac{1}{n}S$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
k	$S-\frac{k-1}{n}S=\frac{n-k+1}{n}S$	$\frac{n-k+1}{n}S+k\cdot\frac{n-k+1}{n}S$	$k\cdot\frac{n-k+1}{n}S+\frac{1}{n}S$	$\frac{n-k+1}{n}S-\frac{1}{n}S$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
n	$S-\frac{n-1}{n}S=\frac{1}{n}S$	$\frac{1}{n}S+k\cdot\frac{1}{n}S$	$k\cdot\frac{1}{n}S+\frac{1}{n}S$	$\frac{1}{n}S-\frac{1}{n}S=0$

Пример, где встречается

Клиент взял в банке кредит на некоторую сумму S рублей на 3 года под 15% годовых. Выплачивать кредит он должен ежегодными платежами так, чтобы каждый год сумма долга уменьшалась равномерно.
Составьте таблицу, демонстрирующую изменения, происходящие с суммой долга.
Чему равно S, если оказалось, что в итоге клиент заплатил банку 390 000 рублей?

- Если кредит взят на n лет, то сумма долга каждый год уменьшается равномерно на $\frac{1}{n}$ часть от суммы, взятой в кредит, то есть на $\frac{1}{n}S$.

Так как в нашем случае кредит взят на 3 года, значит, тело долга S разделили на 3 равные части и долг должен каждый год уменьшаться на $\frac{1}{3}S$.
Следовательно, после первой выплаты долг должен составлять $S-\frac{1}{3}S=\frac{2}{3}S$ рублей, после второй выплаты долг будет равен $\frac{2}{3}S-\frac{1}{3}S=\frac{1}{3}S$ рублей, а после последней третьей долг будет равен $\frac{1}{3}S-\frac{1}{3}S=0$.
Таким образом, первым делом мы можем заполнить столбцы «Сумма долга до начисления %» и «Сумма долга после платежа».

- Столбец «Сумма долга после начисления %» стоит заполнять в виде «текущий долг» + «начисленные на него $r\%$».

В общем виде это выглядит так: «текущий долг» + $k\cdot$ «текущий долг», где $k=0,01r$. В нашем случае $k=0,15$.

- Как удобнее находить платеж?

Представим, что мы вносим платеж всегда двумя частями: сначала — проценты, начисленные на долг (те самые $k\cdot$ «текущий долг»), а затем оставшуюся часть платежа.
Первый платеж строится так: сначала мы вносим $0,15S$, тем самым наш долг снова становится равен S. Так сколько нужно еще выплатить банку, чтобы долг стал равен $\frac{2}{3}S$? Ту самую $\frac{1}{3}S$.
Второй платеж строится так: долг стал равен $\frac{2}{3}S$, вносим сначала начисленные проценты $0,15\cdot\frac{2}{3}S$, долг становится снова равен $\frac{2}{3}S$, и теперь, чтобы долг стал равен $\frac{1}{3}S$, нужно снова внести $\frac{1}{3}S$.
Третий платеж строится так: долг равен $\frac{1}{3}S$, вносим сначала начисленные проценты $0,15\cdot\frac{1}{3}S$, долг становится снова равен $\frac{1}{3}S$, и теперь, чтобы долг стал равен 0, нужно снова внести $\frac{1}{3}S$.
Следовательно, все платежи в нашем случае будут выглядеть как $0,15\cdot$ «текущий долг» + $\frac{1}{3}S$.

Год	Сумма долга до начисления %	Сумма долга после начисления %	Платеж	Сумма долга после платежа
1	S	$S+0,15S$	$\boxed{0,15\cdot S}+\boxed{\frac{1}{3}S}$	$\frac{2}{3}S$
2	$\frac{2}{3}S$	$\frac{2}{3}S+0,15\cdot\frac{2}{3}S$	$\boxed{0,15\cdot\frac{2}{3}S}+\boxed{\frac{1}{3}S}$	$\frac{1}{3}S$
3	$\frac{1}{3}S$	$\frac{1}{3}S+0,15\cdot\frac{1}{3}S$	$\boxed{0,15\cdot\frac{1}{3}S}+\boxed{\frac{1}{3}S}$	0

Начисленные проценты, составляют арифм. прогрессию с разностью $-0,15\cdot\frac{1}{3}S$

Части, на которые уменьшается тело долга

Можно сказать по-другому: все платежи образуют арифметическую прогрессию с разностью $-0,15\cdot\frac{1}{n}S$.

Продолжение примера

То, что в итоге клиент заплатил банку, является общей суммой выплат.

- Общая сумма выплат — это сумма всех платежей по кредиту. В случае дифференцированных платежей это всегда будет

$$kS\cdot \underbrace{\left(1+\frac{n-1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}_{\text{сумма арифм. прогрессии: } a_1=\frac{1}{n},\, a_n=1}+S=kS\cdot \underbrace{\frac{n+1}{2}}_{=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n}+S,$$

где $k=0,01r$ — проценты $r\%$, переведенные в десятичный вид, n — количество лет, на которое взят кредит.
Получаем таким образом в нашем случае для $n=3,\ k=0,15$:

$$\boxed{\text{Общая сумма выплат}}=\underbrace{0,15\cdot S\cdot \overbrace{\left(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)}^{\text{сумма арифм. прогрессии}}}_{\text{начисленные проценты}}+\underbrace{S}_{=\frac{1}{3}S+\frac{1}{3}S+\frac{1}{3}S}$$

- Переплата по кредиту — это сумма, равная общей сумме выплат за вычетом суммы, взятой в кредит, что в случае дифференцированных платежей равно сумме процентов, начисленных на долг во все годы.

$$\boxed{\text{Переплата}=\text{Общая сумма выплат}-\text{Кредит}=\text{Сумма начисленных процентов}}$$

В нашем случае столбец платежей имеет следующий смысл:

Платеж
$0,15\cdot S+\frac{1}{3}S$
$0,15\cdot \frac{2}{3}S+\frac{1}{3}S$
$0,15\cdot \frac{1}{3}S+\frac{1}{3}S$

Складываем отдельно, получаем Переплату

Складываем отдельно, получаем Сумму S, взятую в кредит

Найдем S, если общая сумма выплат по кредиту составила 390 000 рублей:

$$0,15S\cdot\left(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)+S=390\,000\quad\Leftrightarrow$$

$$\frac{15}{100}\cdot\frac{\frac{1}{3}+1}{2}\cdot 3\cdot S+S=390\,000\quad\Leftrightarrow$$

$$\frac{13}{10}\cdot S=390\,000\quad\Leftrightarrow$$

$$S=300\,000\ (\text{рублей})$$

Типичные ошибки. Рекомендации

- Некоторые проценты в десятичном виде удобнее использовать в виде рациональной дроби.
Например, для $r\%=25\%$ имеем $k=\frac{1}{4}$, для $r\%=12,5\%$ имеем $k=\frac{1}{8}$, для $r\%=20\%$ имеем $k=\frac{1}{5}$.
- Рекомендуют оформлять изменения, происходящие с суммой долга, с помощью таблицы. Столбцы подписывать так, чтобы было понятно проверяющим. Названия столбцов видны на примере.
- Вводите неизвестные, которые вы собираетесь использовать в таблице, вместе с их единицами измерения. Например, если не дана сумма, взятая в кредит, вводим: "пусть S рублей — сумма, взятая в кредит".
- В задачах не может быть никакого округления значений переменных, если об этом не сказано в условии. Поэтому, если вы, например, получили нецелое число лет n — ищите у себя ошибку либо в самой модели, либо арифметического характера.
- Не ленитесь использовать слова, объясняющие ваши действия при решении: "чтобы найти переплату, нужно из суммы всех платежей вычесть сумму, взятую в кредит"; "здесь мы получили сумму арифметической прогрессии, я буду вычислять ее по такой-то формуле", "платежи составляют арифметическую прогрессию, где первый член такой-то, последний — такой-то, следовательно, их сумму можно находить по формуле суммы арифметической прогрессии" и т.д.
- Будет ошибкой: использовать без вывода формулы, не представленные в официальных учебниках, например, формулы для общей суммы выплат, переплаты; не демонстрировать арифметическую или геометрическую прогрессии, если они есть, и т.п.