

Банковский вклад

Банковский вклад — это сумма денег, переданная банку на хранение с целью получить доход в виде начисленных процентов. Пусть вы положили в банк на хранение S рублей.

Раз в какой-то промежуток времени (в задачах это, как правило, месяц или год) банк начисляет на текущую сумму некоторое количество r процентов. Следовательно, можно сказать, что после первого начисления процентов сумма на вашем счету увеличивается на $0,01r \cdot S$ рублей, либо же сказать, что сумма на вашем счету увеличивается в $\frac{100+r}{100} = 1 + 0,01r$ раз. То есть после первого начисления процентов на вашем счету будет $(1 + 0,01r) \cdot S$ рублей. Раз в год после начисления процентов клиент, как правило, имеет право доложить на счет любую сумму денег. Также клиент имеет право снимать со счета любую сумму (естественно, не превышающую имеющуюся). Время, когда он может это сделать, указывается в задаче.

Пример 1

Клиент вложил некоторую сумму под 10% годовых, начисляемых на вклад раз в год. Известно, что в конце первого года (после начисления процентов) он снял со своего счета 10% от имеющейся на тот момент суммы, а в конце второго года (также после начисления процентов) он доложил на счет 10% от имеющейся суммы.

Составьте таблицу, отслеживающую изменения суммы на счету клиента вплоть до конца третьего года (после начисления процентов).

Определите, в конце третьего года (после начисления процентов) увеличилась или уменьшилась сумма на счете после таких манипуляций по сравнению с первоначальным вкладом и на сколько процентов.

- Для начала введем неизвестную в качестве той суммы, которую вложил клиент. Пусть это будет S рублей.
- Составим таблицу, в которой будем отслеживать сумму на счету клиента. Для этого нам понадобятся следующие столбцы:

Номер года	Сумма до начисления %	Сумма после начисления %	Манипуляция	Сумма после манипуляции
------------	-----------------------	--------------------------	-------------	-------------------------

- Каждый год после начисления процентов сумма на счету клиента увеличивается в 1,1 раза, то есть равна $1,1 \cdot$ «сумма до начисления %».
- Первый год. Если клиент вложил S рублей, то на конец первого года (после первого начисления процентов) сумма на счету составит $1,1S$ рублей. Сказано, что после первого начисления процентов клиент снял со своего счета 10% от имеющейся на тот момент суммы, то есть от $1,1S$ рублей. Следовательно, на счету у него осталось 90% от суммы в $1,1S$ рублей, иначе говоря, у него осталось $0,9 \cdot (1,1S)$ рублей.
- Второй год. На счету $0,9 \cdot (1,1S)$ рублей. После второго начисления процентов сумма на счету также увеличится в 1,1 раза, то есть составит $1,1 \cdot (0,9 \cdot 1,1S)$ рублей. После этого клиент доложил на счет 10% от имеющейся уже там суммы, то есть на счету после этой манипуляции у него станет 110% от $1,1 \cdot (0,9 \cdot 1,1S)$ рублей. Другими словами, на счету клиент будет иметь $1,1 \cdot (1,1 \cdot 0,9 \cdot 1,1S)$ рублей.
- Третий год. На счету $1,1 \cdot (1,1 \cdot 0,9 \cdot 1,1S)$ рублей. После третьего начисления процентов сумма на счету также увеличится в 1,1 раза. Следовательно, в конце третьего года размер вклада составит $1,1 \cdot (1,1 \cdot 1,1 \cdot 0,9 \cdot 1,1S)$ рублей. Конец.

Таким образом, мы получаем следующую таблицу (ведем все вычисления в рублях):

Номер года	Сумма до начисления %	Сумма после начисления %	Манипуляция	Сумма после манипуляции
1	S	$1,1S$	$-0,1 \cdot (1,1S)$	$0,9 \cdot (1,1S)$
2	$0,9 \cdot (1,1S)$	$1,1 \cdot (0,9 \cdot 1,1S)$	$+0,1 \cdot (1,1 \cdot 0,9 \cdot 1,1S)$	$1,1 \cdot (1,1 \cdot 0,9 \cdot 1,1S)$
3	$1,1 \cdot (1,1 \cdot 0,9 \cdot 1,1S)$	$1,1 \cdot (1,1 \cdot 1,1 \cdot 0,9 \cdot 1,1S)$	нет	$1,1 \cdot (1,1 \cdot 1,1 \cdot 0,9 \cdot 1,1S) = S_1$

Это выражение необходимо сравнить с S

- Следовательно, на счете у клиента (в рублях) стало

$$S_1 = 1,1 \cdot (1,1 \cdot 1,1 \cdot 0,9 \cdot 1,1S) = 1,1^4 \cdot 0,9S = 1,31769S$$

S_1 больше первоначального вклада S на 31,769%.

Пример 2

В марте 2016 года Мария сделала вклад в банк в размере 100 000 рублей на 3 года. Раз в год в ноябре банк начисляет на имеющуюся на счете сумму 5%. Какую максимальную сумму денег может снять Мария в декабре 2017 года, чтобы в марте 2019 года сумма на счете была не менее 105 000 рублей?

- Каждый год после начисления процентов сумма на счету клиента увеличивается в 1,05 раз.

Составим таблицу, делая все вычисления в тыс. рублей и обозначив за x тыс. рублей сумму, которую Мария снимет со счета в декабре 2017 года:

Год	Сумма на счете до начисления % (март)	Сумма на счете после начисления % (ноябрь)	Снятая сумма	Сумма на счете после снятия (декабрь)
2016	100	$1,05 \cdot 100$	0	$1,05 \cdot 100$
2017	$1,05 \cdot 100$	$1,05^2 \cdot 100$	x	$1,05^2 \cdot 100 - x$
2018	$1,05^2 \cdot 100 - x$	$1,05(1,05^2 \cdot 100 - x)$	0	$1,05(1,05^2 \cdot 100 - x)$

Это выражение должно быть не менее 105

- Заметим, что в марте 2019 года на счете у Марии будет столько же денег, сколько и в декабре 2018. Таким образом, необходимо найти такой максимальный x , чтобы

$$1,05(1,05^2 \cdot 100 - x) \geq 105$$

- Решая данное неравенство, получим, что $x \leq 10,25$. Таким образом, максимальная сумма, которую можно снять со счета, это 10 250 рублей.

Пример 3

Планируется сделать вклад в размере 1 млн рублей под целое число процентов. Раз в год после начисления процентов планируется снимать со счета 100 тыс. рублей.

Какой должен быть наименьший годовой процент в банке, чтобы после трех таких снятий сумма на счете была не менее 1 млн рублей?

- Обозначим годовой процент банка за $r\%$. Тогда после начисления процентов сумма на счете будет увеличиваться в $1 + 0,01r$ раз. Поэтому обозначим $1 + 0,01r$ за t и составим таблицу, производя все вычисления в тыс. рублей:

Год	Сумма на счете до начисления %	Сумма на счете после начисления %	Снятая сумма после снятия	Сумма на счете
1	1000	$t \cdot 1000$	100	$t \cdot 1000 - 100$
2	$t \cdot 1000 - 100$	$t(t \cdot 1000 - 100)$	100	$t(t \cdot 1000 - 100) - 100$
3	$t(t \cdot 1000 - 100) - 100$	$t(t(t \cdot 1000 - 100) - 100)$	100	$t(t(t \cdot 1000 - 100) - 100) - 100$

Это выражение должно быть не менее 1000

- Таким образом, необходимо, чтобы

$$\begin{aligned} t(t(t \cdot 1000 - 100) - 100) - 100 &\geq 1000 \Leftrightarrow 1000t^3 - 100t^2 - 100t - 100 \geq 1000 \Leftrightarrow 1000(t^3 - 1) - 100(t^2 + t + 1) \geq 0 \Leftrightarrow \\ 1000(t - 1)(t^2 + t + 1) - 100(t^2 + t + 1) &\geq 0 \Leftrightarrow (t^2 + t + 1)(1000t - 1000 - 100) \geq 0 \end{aligned}$$

- Так как процент в банке не может быть отрицательным, то есть $r \geq 0 \Rightarrow t \geq 1$, то выражение $t^2 + t + 1$ всегда положительно. Следовательно, полученное неравенство равносильно

$$1000t - 1000 - 100 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 1,1 \Rightarrow 1 + 0,01r \geq 1,1 \Leftrightarrow r \geq 10$$

Значит, наименьший годовой процент в банке должен быть 10%.