

Кредитование: аннуитетная система

Вы взяли кредит в банке на некоторую сумму денег S под определенный процент $r\%$ годовых.
Аннуитетные платежи – это такая система выплат, при которой кредит выплачивается ежегодно (ежемесячно) равными платежами x . При этом каждый год (месяц) банк начисляет на оставшуюся часть долга некоторый процент $r\%$, то есть оставшаяся сумма долга увеличивается в $p = 1 + 0,01r$ раз.
После этого уже клиент вносит платеж x в счет погашения кредита.

Пример

Клиент взял 546 тыс. рублей в банке под 20% годовых и должен погасить его через 3 года равными ежегодными платежами.

Составьте таблицу, отслеживающую изменение долга.

Сколько тыс. рублей составил ежегодный платеж?

Сколько тыс. рублей составила общая сумма выплат по данному кредиту?

Сколько тыс. рублей составила переплата по данному кредиту?

Как решать подобные задачи? Рассмотрим несколько рекомендаций по вводу неизвестных и составлению таблицы.

- Чаще всего удобно в таблице вместо данной суммы, взятой в кредит, использовать неизвестную, например, S тыс. рублей. С ней будем заполнять столбец «Сумма долга до начисления %».
- Столбец «Сумма долга после начисления %» удобно заполнять в виде $p \cdot$ «сумма долга», где $p = 1 + \frac{r}{100}$, r — число процентов годовых.
В нашем случае, например, первая строка в этом столбце будет равна $S + \frac{20}{100} \cdot S = S + 0,2S = S(1 + 0,2) = 1,2S$. Следующие строки в этом столбце, введя $p = 1 + \frac{20}{100} = 1,2$, будем записывать как $1,2 \cdot$ «сумма долга до начисления %».
- Платеж (выплата) всегда одинаковый, так как это — аннуитетная система кредитования, следовательно, его обозначаем за x тыс. рублей.

Составим таблицу, отслеживающую долг:

Здесь всегда сумма, взятая в кредит

Год	Сумма долга до начисления %	Сумма долга после начисления %	Выплата	Сумма долга после платежа
1	S	$1,2 \cdot S$	x	$1,2S - x$
2	$1,2 \cdot S - x$	$1,2(1,2 \cdot S - x)$	x	$1,2(1,2S - x) - x$
3	$1,2(1,2 \cdot S - x) - x$	$1,2(1,2(1,2 \cdot S - x) - x)$	x	$1,2(1,2(1,2S - x) - x) - x$

Это выражение всегда равно нулю

- После последнего платежа долг равен нулю, следовательно,

$$1,2(1,2(1,2 \cdot S - x) - x) - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1,2^3 \cdot S - \underbrace{(1,2^2 + 1,2 + 1)}_{\text{сумма геом. прогрессии}} \cdot x = 0$$

Это то уравнение, которое вы всегда получаете в итоге после заполнения таблицы в случае аннуитетных платежей.

Из полученного уравнения легко выражается ежегодный платеж x :

$$\begin{aligned} x &= \frac{1,2^3}{1,2^2 + 1,2 + 1} \cdot S \\ x &= \frac{1,2^3}{3,64} \cdot 546 \\ x &= 259,2 \end{aligned}$$

Ежегодный платеж равен 259,2 тыс. рублей.

Продолжение примера

- Общая сумма выплат — это сумма всех платежей по кредиту. В нашем случае это всегда будет $n \cdot x$, где n — число лет (месяцев), на которое взят кредит.

Платеж
$+ x$
$+ x$
$+ x$
= Общая сумма выплат

Следовательно, нужно найти $3x$. Получаем

$$\text{Общая сумма выплат} = 3x = 777,6 \text{ (тыс.рублей)}$$

- Переплата по кредиту — это сумма, равная общей сумме выплат за вычетом суммы, взятой в кредит:

$$\text{Общая сумма выплат} - \text{Кредит} = \text{Переплата}$$

Следовательно, это $n \cdot x - S$.

Значит, нужно найти $3x - S$:

$$\text{Переплата} = 3x - S = 777,6 - 546 = 231,6 \text{ (тыс. рублей)}$$

Типичные ошибки. Рекомендации

- Пусть в условии сказано, что процентная ставка составляет $r\%$ годовых. При решении необходимо ввести новую неизвестную p вместо $0,01r$ или вместо $1 + 0,01r$.
- Будет ошибкой: использовать без вывода формулы, не представленные в официальных учебниках, например, формулы для платежа, для долга после последней выплаты; не демонстрировать арифметическую или геометрическую прогрессии, если они есть, и т.п.
- Рекомендуют оформлять изменения, происходящие с суммой долга/вклада, с помощью таблицы. Столбцы подписывать так, чтобы было понятно проверяющим. Названия столбцов видны на примере.
- В задачах не может быть никакого округления значений переменных, если об этом не сказано в условии. Поэтому, если вы, например, получили нецелое число лет n — ищите у себя ошибку либо в самой модели, либо арифметического характера.
- Некоторые проценты в десятичном виде удобнее использовать в виде рациональной дроби. Например, 125% как $\frac{5}{4}$, $112,5\%$ как $\frac{9}{8}$, 120% как $\frac{6}{5}$.
- Не ленитесь использовать слова, объясняющие ваши действия при решении: «чтобы найти переплату, нужно из суммы всех платежей вычесть сумму, взятую в кредит»; «здесь мы получили сумму арифметической прогрессии, я буду вычислять ее по такой-то формуле» и т.д.