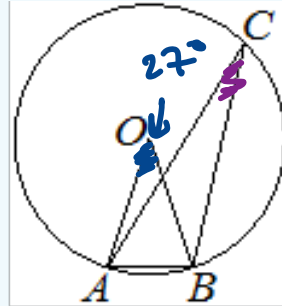


Щелчок. Решение №16, 23. 06.06

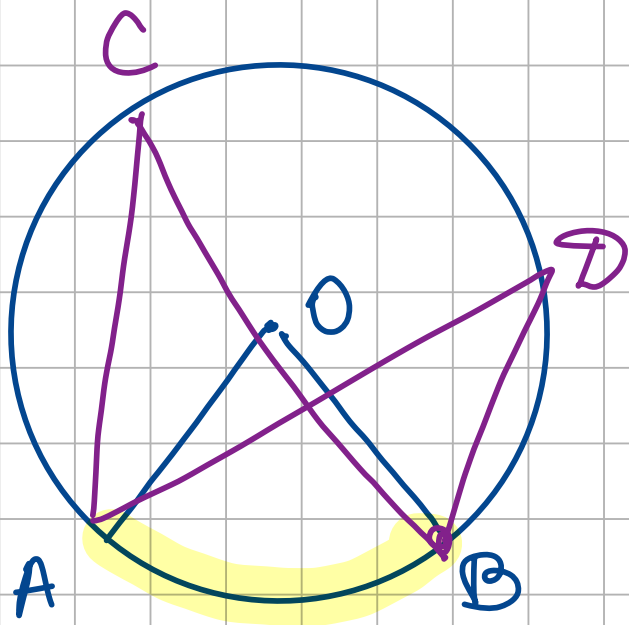
1

Треугольник ABC вписан в окружность с центром в точке O . Точки O и C лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB . Найдите угол ACB , если угол AOB равен 27° . Ответ дайте в градусах.



$$\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{27}{2} = 13,5$$

I.

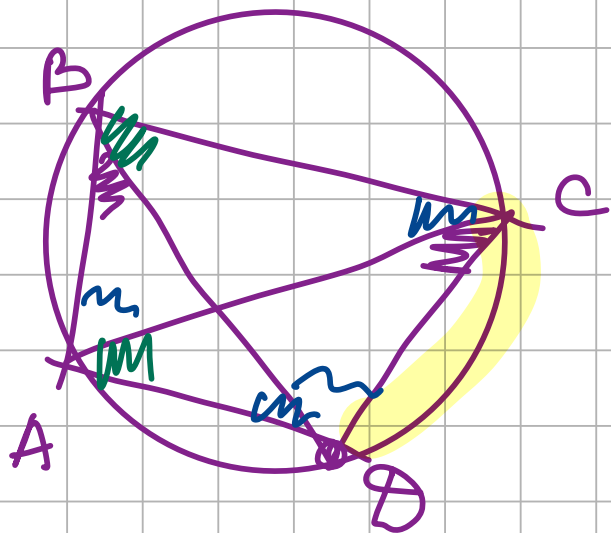


$\angle AOB$ - центр. угол на $\cup AB$

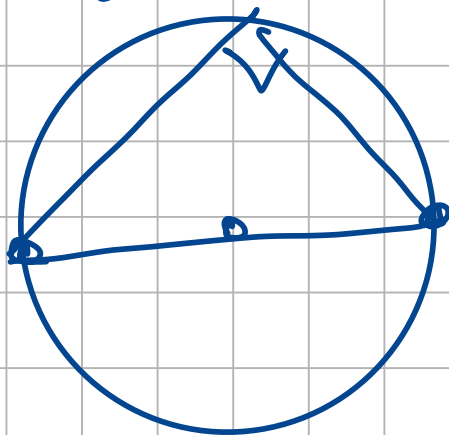
$\angle ACB$ и $\angle ADB$ - впис.,
опер на $\cup AB$

Впис $\angle = \frac{1}{2}$ центр
 $\frac{1}{2}$ дуги, на
котор. он опер.

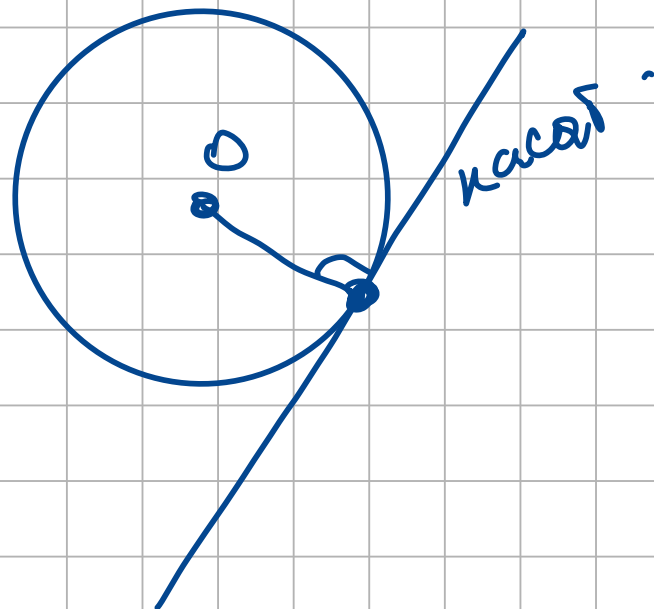
II. Впис. $\angle$, опер. на одну дугу, равен.



III. Вписанный угол, опер. на диаметр, равен 90°

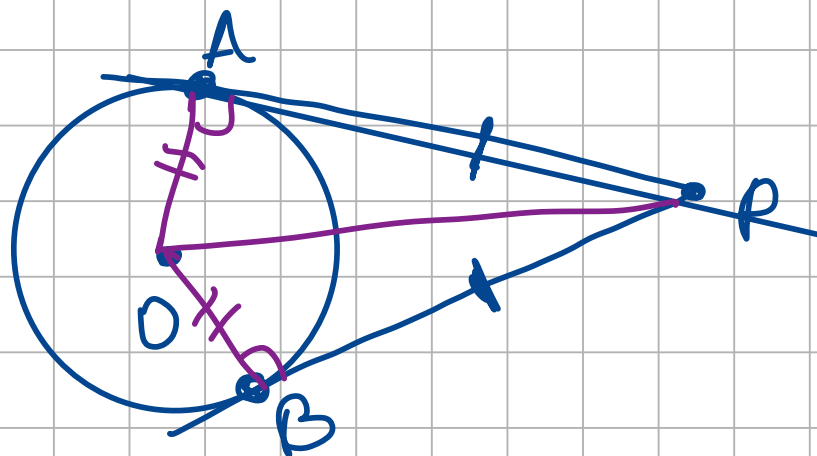


IV.



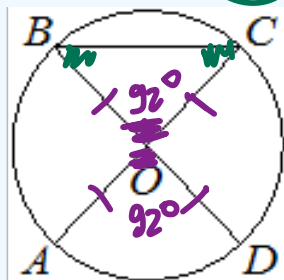
Радиус, пров. в т.
кас., $\perp$ касая.

V. Отрезки касая - равны



2

В окружности с центром в точке O отрезки AC и BD — диаметры. Угол AOD равен 92° . Найдите угол ACB . Ответ дайте в градусах.

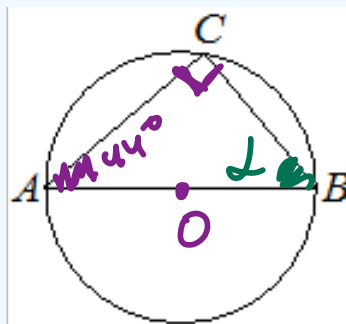


$\triangle BOC - \text{p.r.}$

$$\angle C = \frac{180 - 92}{2} = \frac{88}{2} = 44^\circ$$

3

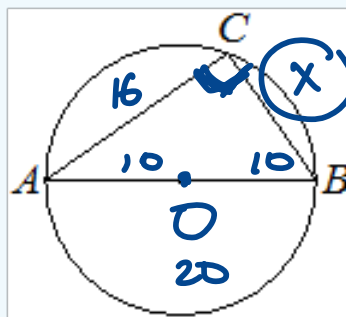
Центр окружности, описанной около треугольника ABC , лежит на стороне AB . Найдите угол ABC , если угол BAC равен 44° . Ответ дайте в градусах.



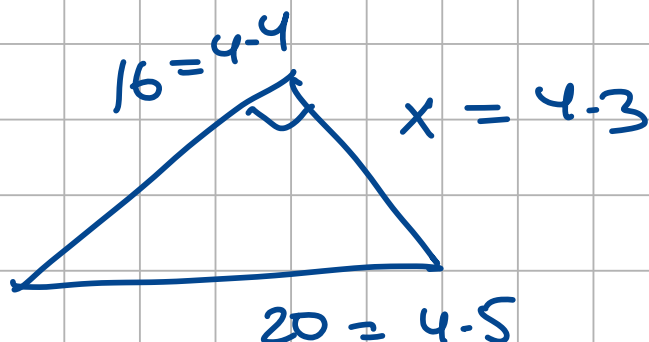
$$\angle B = 90^\circ - 44^\circ = 46^\circ$$

4

Центр окружности, описанной около треугольника ABC , лежит на стороне AB . Радиус окружности равен 10. Найдите BC , если $AC = 16$.



$$R = 10$$



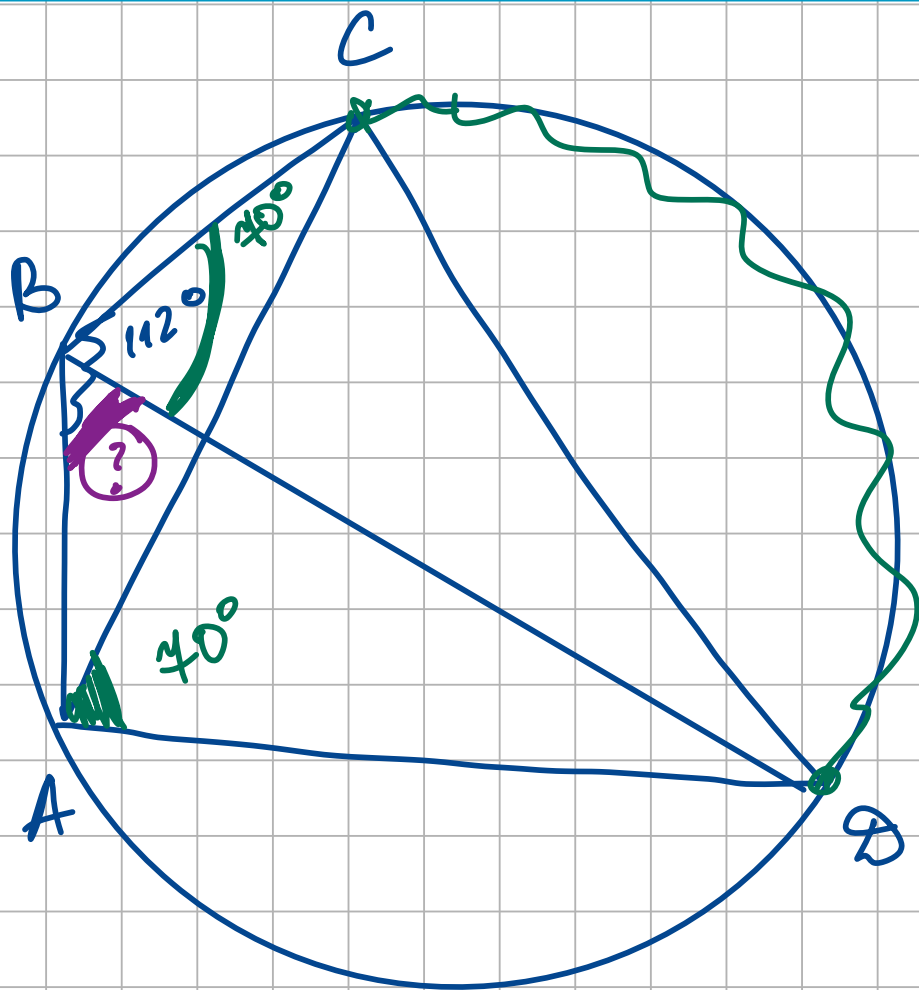
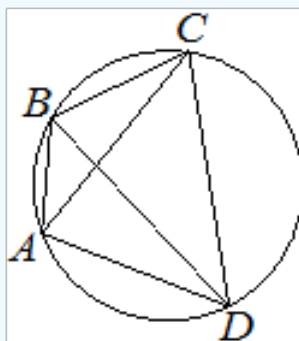
$$12$$

$$x^2 = 20^2 - 16^2 = 400 - 256 = 144$$

$$x = 12$$

5

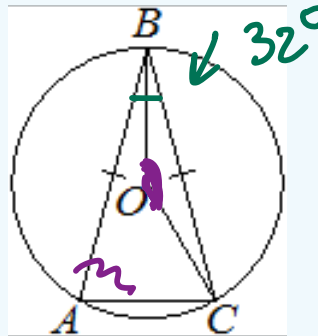
Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 112° , угол CAD равен 70° . Найдите угол ABD . Ответ дайте в градусах.



$$x = 112^\circ - 70^\circ = 42^\circ$$

6

Окружность с центром в точке O описана около равнобедренного треугольника ABC , в котором $AB = BC$ и $\angle ABC = 32^\circ$. Найдите угол BOC . Ответ дайте в градусах.



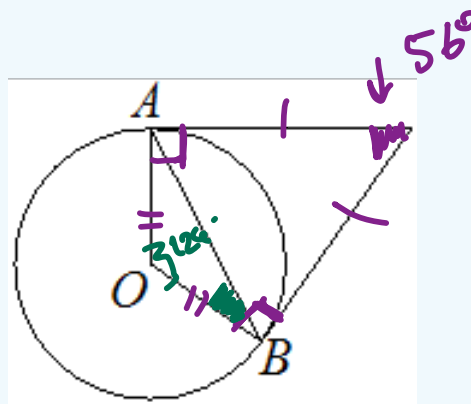
← центр.

$$\angle A = \frac{180 - 32}{2} = \frac{148}{2} = 74^\circ$$

$$\begin{aligned} \angle A &= \frac{1}{2} \angle BOC \quad \Rightarrow \quad \angle BOC = 2 \angle A = \\ &= 74 \cdot 2 = 148 \end{aligned}$$

7

Касательные в точках A и B к окружности с центром в точке O пересекаются под углом 56° . Найдите угол ABO . Ответ дайте в градусах.



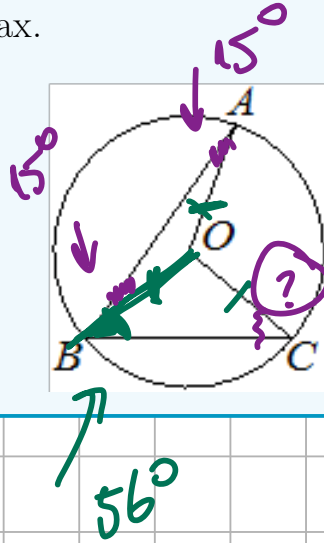
$$1) \angle AOB = 180^\circ - 56^\circ = 124^\circ$$

$$2) \triangle AOB - \text{p.l.s.}$$

$$\angle OBA = \frac{180 - 124}{2} = \frac{56}{2} = 28^\circ$$

8

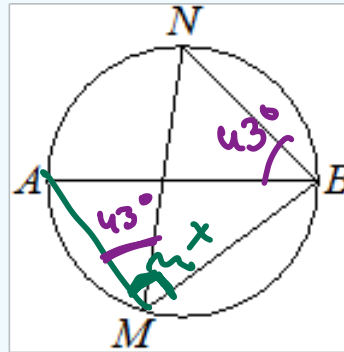
Точка O — центр окружности, на которой лежат точки A , B и C . Известно, что $\angle ABC = 56^\circ$ и $\angle OAB = 15^\circ$. Найдите угол BCO . Ответ дайте в градусах.



$$\angle OBC = 56^\circ - 15^\circ = 41^\circ = \angle OCB$$

9

На окружности по разные стороны от диаметра AB взяты точки M и N . Известно, что $\angle NBA = 43^\circ$. Найдите угол NMB . Ответ дайте в градусах.

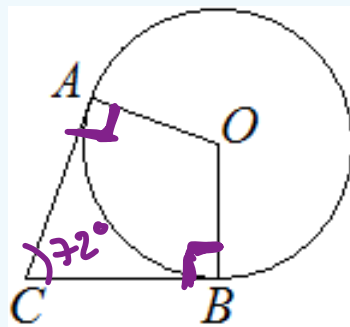


AB - диам.

$$x = 90^\circ - 43^\circ = 47^\circ$$

10

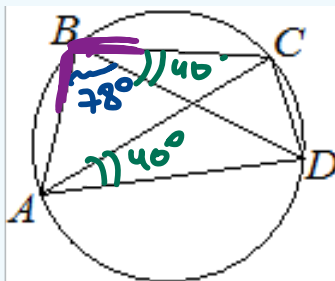
В угол C величиной 72° вписана окружность, которая касается сторон угла в точках A и B , точка O — центр окружности. Найдите угол AOB . Ответ дайте в градусах.



$$\angle O = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$$

11

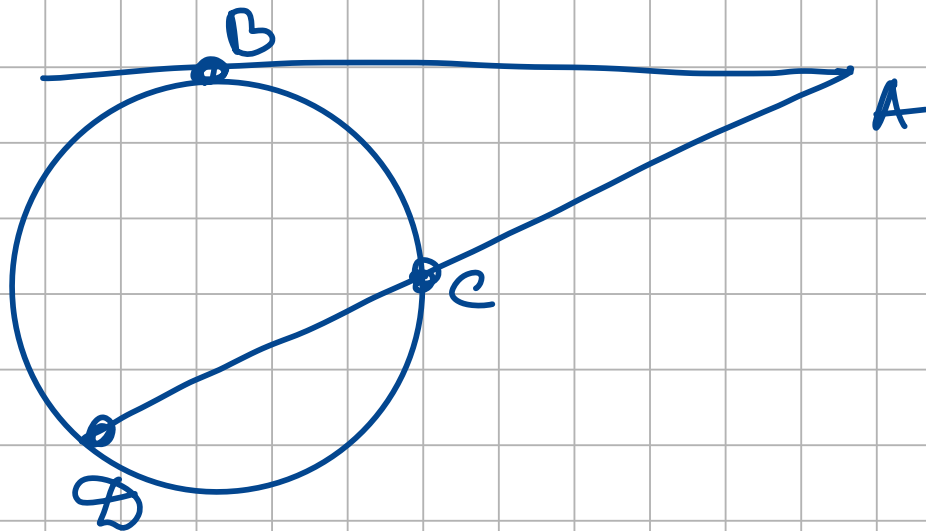
Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABD равен 78° , угол CAD равен 40° . Найдите угол ABC . Ответ дайте в градусах.



$$\angle ABC = 78^\circ + 40^\circ = 118^\circ$$

Теор (пословице)

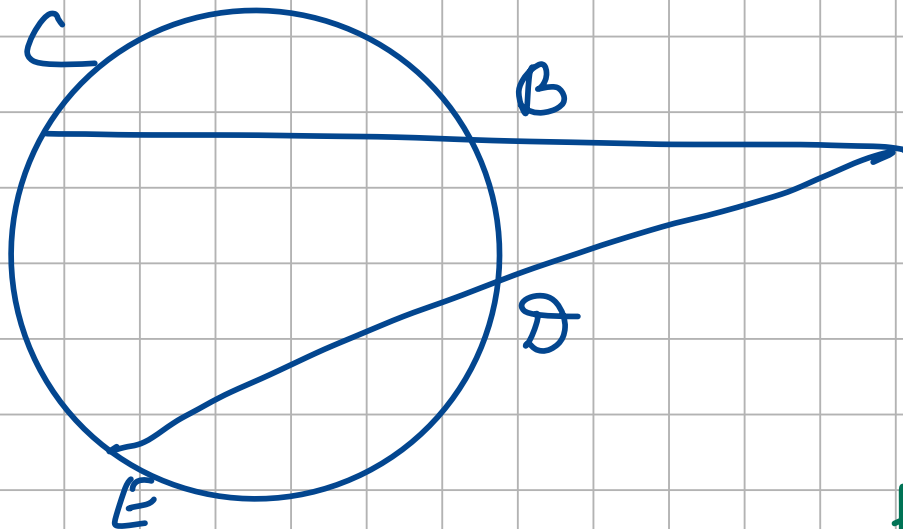
1) Теор. о касат. и секущ.



$$\text{касат}^2 = \text{внеш.} \cdot \text{всю сек}$$

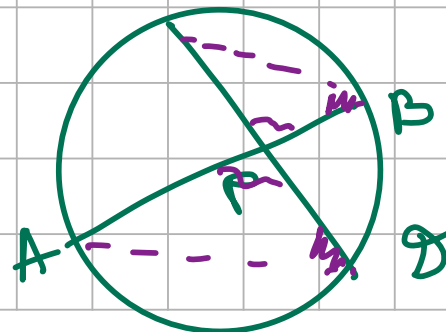
$$AB^2 = AC \cdot AD$$

2) Теор. о двух секущих

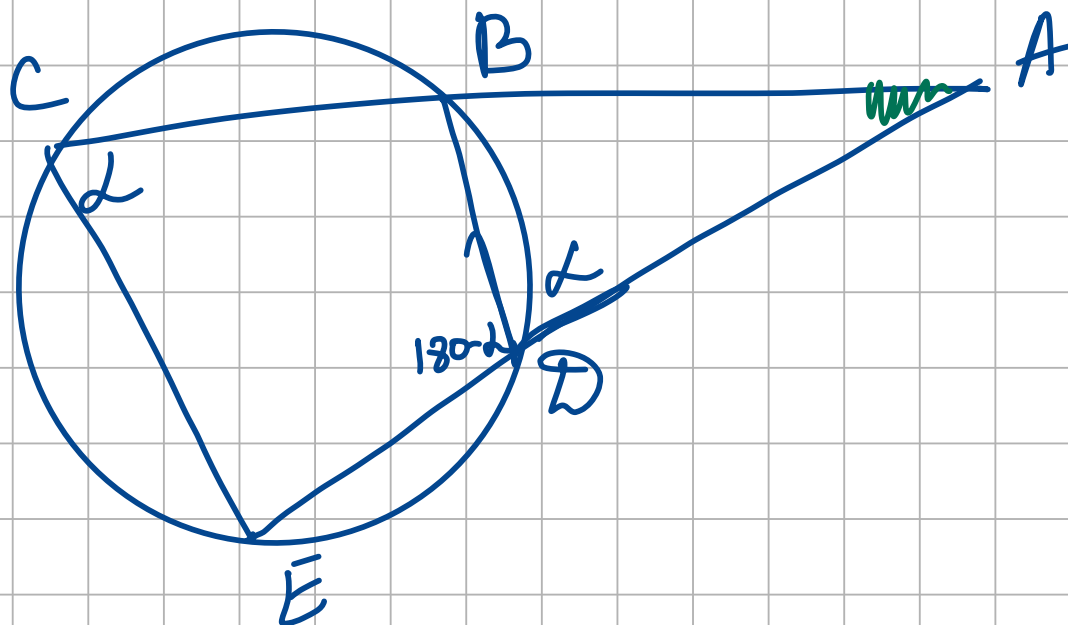


$$AB \cdot AC = AD \cdot AE$$

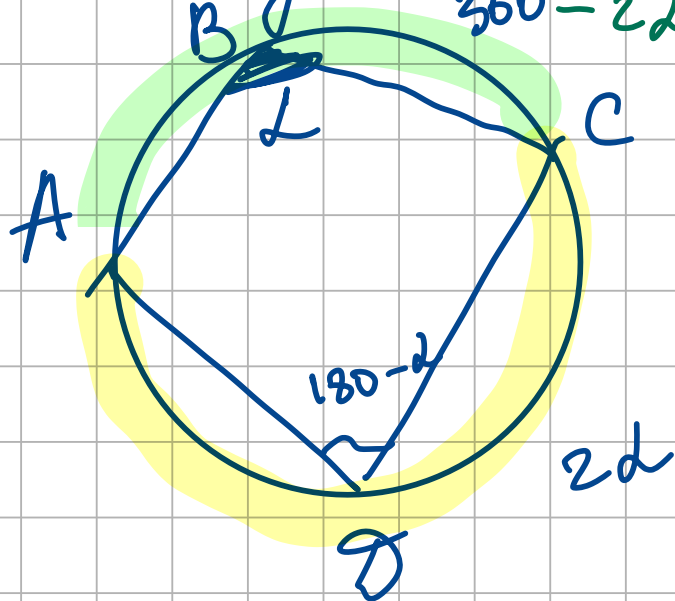
3) Теор. о двух хордах

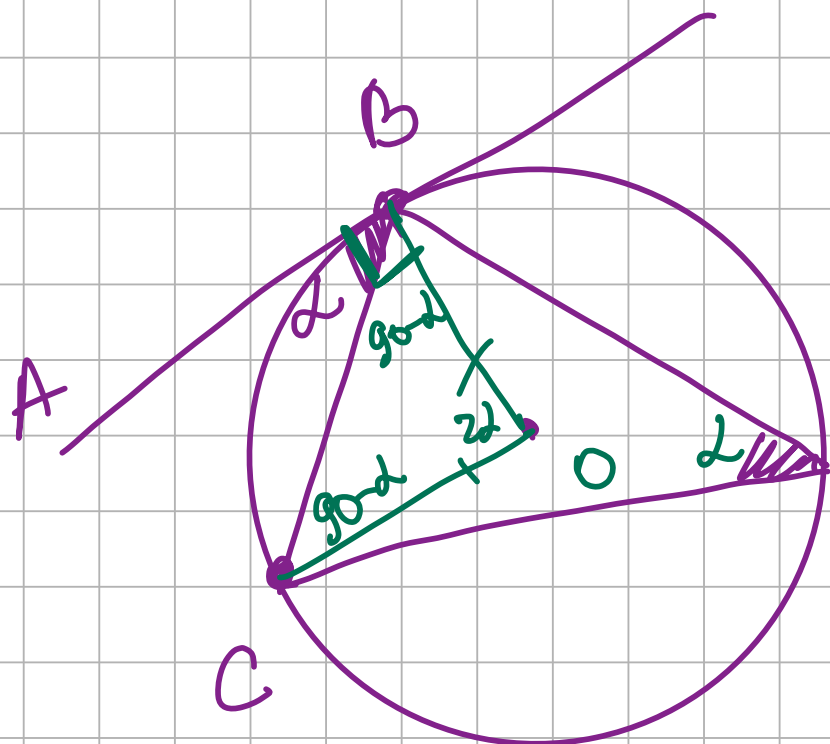


$$AP \cdot PB = CP \cdot PD$$



Реш. Если $\angle$ впис. в окр. то
 $\angle = 180^\circ$
 сумма $360 - 2d$





Угол между касат.
и хордой =

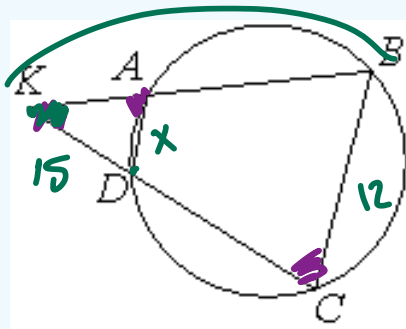
$$= \frac{1}{2} \text{ г/см}^3, \text{ закон.}$$

м/ру кас. ч хор.

12

Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Прямые AB и CD пересекаются в точке K , $BK = 20$, $DK = 15$, $BC = 12$. Найдите AD .

20



$\triangle KAD \sim \triangle KCB$ по углу $\angle$

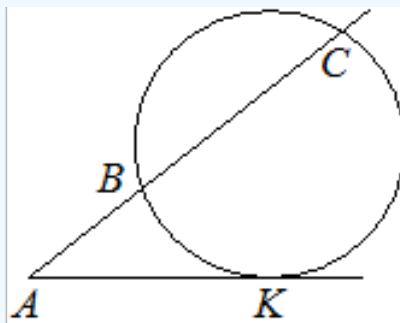
$$\frac{KD}{KB} = \frac{AD}{BC}$$

$$\frac{15}{20} = \frac{x}{12}$$

$$x = \frac{3 \cdot 15}{20} = 3 \cdot 3 = 9$$

13

Через точку A , лежащую вне окружности, проведены две прямые. Одна прямая касается окружности в точке K . Другая прямая пересекает окружность в точках B и C , причём $AB = 6$, $AC = 24$. Найдите AK .



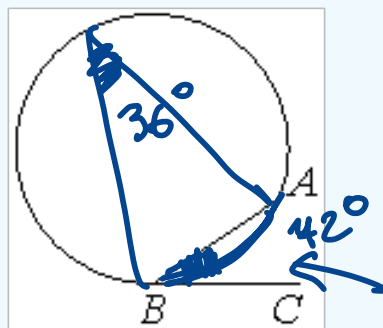
$$AK^2 = AB \cdot AC$$

$$AK^2 = 6 \cdot 24$$

$$AK = \sqrt{6 \cdot 24} = \sqrt{6 \cdot 6 \cdot 4} = 6 \cdot 2 = 12$$

14

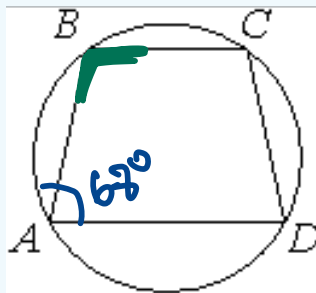
На окружности отмечены точки A и B так, что меньшая дуга AB равна 72° . Прямая BC касается окружности в точке B так, что угол ABC острый. Найдите угол ABC . Ответ дайте в градусах.



36

15

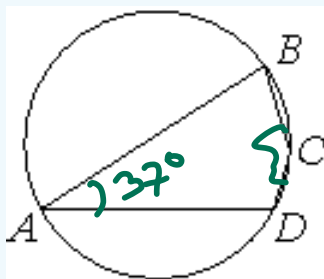
Угол A трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC , вписанной в окружность, равен 68° . Найдите угол B этой трапеции. Ответ дайте в градусах.



$$\angle B = 180^\circ - 68^\circ = 112^\circ$$

16

Угол A четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, равен 37° . Найдите угол C этого четырёхугольника. Ответ дайте в градусах.

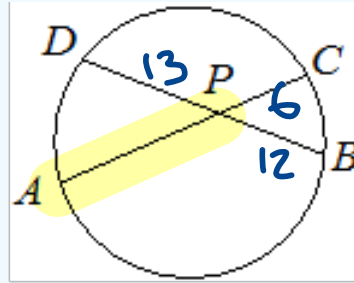


$$\angle A + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle C = 180^\circ - 37^\circ = 143^\circ$$

17

Хорды AC и BD окружности пересекаются в точке P , $BP = 12$, $CP = 6$, $DP = 13$. Найдите AP .



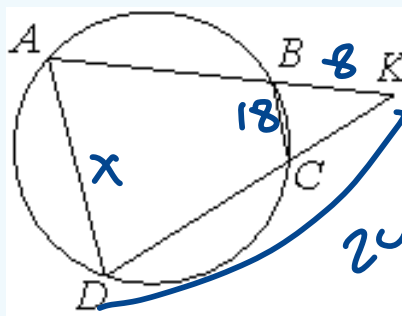
$$AP \cdot PC = DP \cdot PB$$

$$AP \cdot 6 = 13 \cdot 12$$

$$AP = \frac{13 \cdot 12}{6} = 26$$

18

Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Прямые AB и CD пересекаются в точке K , $BK = 8$, $DK = 24$, $BC = 18$. Найдите AD .



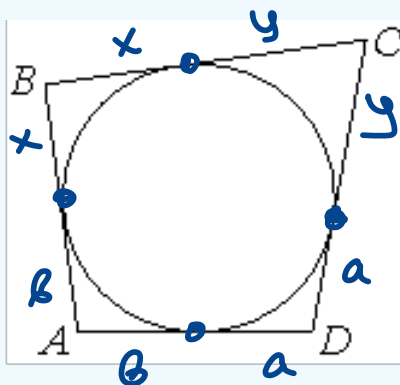
$$\frac{8}{24} = \frac{18}{x}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{18}{x}$$

$$x = 18 \cdot 3 = 54$$

19

Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности, $AB = 8$, $BC = 20$, $CD = 17$. Найдите AD .



Если окр-ва впис. в чп, то
сумма прот-сторон равна

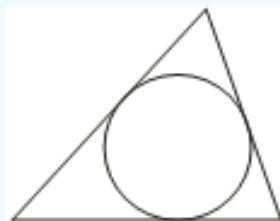
$$BC + AD = AB + CD$$

$$20 + AD = 8 + 17$$

$$AD = 8 + 17 - 20 = 5$$

20

Периметр треугольника равен 120, одна из сторон равна 40, а радиус вписанной в него окружности равен 7. Найдите площадь этого треугольника.



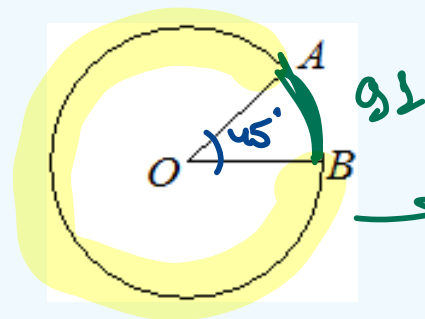
$$S = p \cdot r =$$
$$= 60 \cdot 7 = 420$$

, p — полупер.

$$P = 120 ; \quad p = \frac{120}{2} = 60$$
$$r = 7$$

21

На окружности с центром в точке O отмечены точки A и B так, что $\angle AOB = 45^\circ$. Длина меньшей дуги AB равна 91. Найдите длину большей дуги AB .



$$\rightarrow 360^\circ - 45^\circ = 315^\circ$$

$$45^\circ \quad \text{---} \quad 91$$

$$315^\circ \quad \text{---} \quad x$$

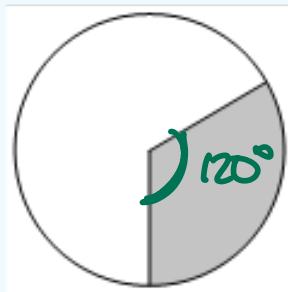
$$\frac{45}{315} = \frac{91}{x}$$

$$x = \frac{91 \cdot 315}{45} =$$

$$= 637$$

22

Площадь круга равна 123. Найдите площадь сектора этого круга, центральный угол которого равен 120° .



$$S_{\text{кр}} = 123$$

$$\begin{array}{ccc} 120^\circ & \text{---} & x \\ 360^\circ & \text{---} & 123 \end{array}$$

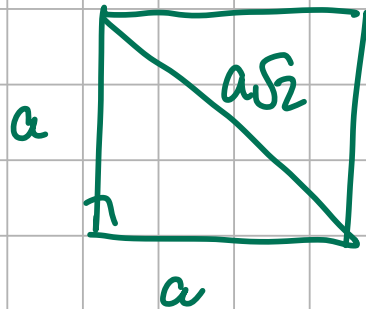
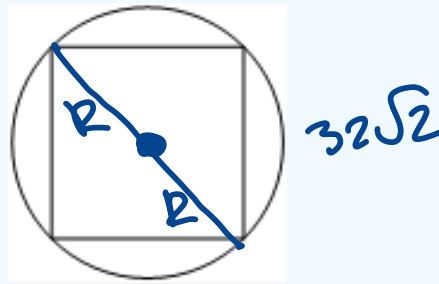
$$\frac{120}{360} = \frac{x}{123}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{x}{123}$$

$$x = \frac{123}{3} \approx$$

$$41$$

23 Сторона квадрата равна $32\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого квадрата.



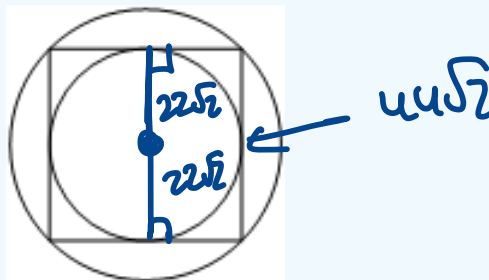
$$a = 32\sqrt{2}$$

$$d = 32\sqrt{2} - \sqrt{2} = 64$$

$$R = \frac{64}{2} = 32$$

24

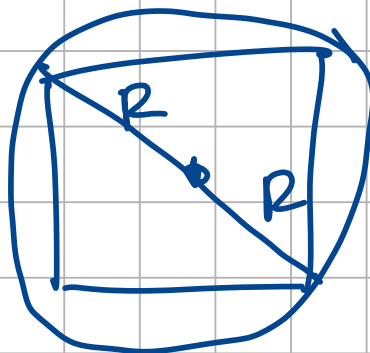
Радиус вписанной в квадрат окружности равен $22\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого квадрата.



$$a = 2r = 44\sqrt{2}$$

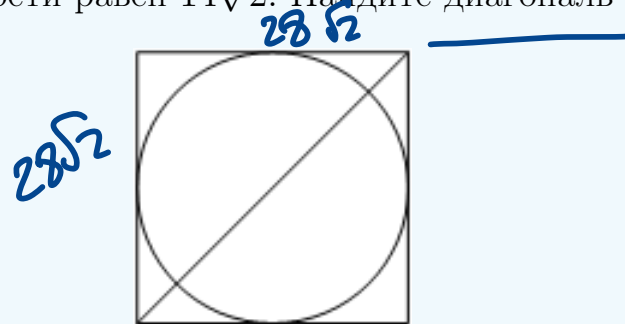
$$d = 44\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 88$$

$$R = \frac{d}{2} = 44$$



25

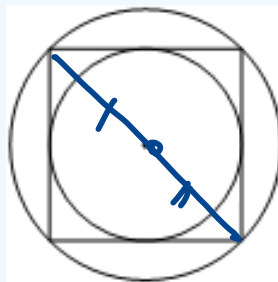
Радиус вписанной в квадрат окружности равен $14\sqrt{2}$. Найдите диагональ этого квадрата.



$$d = 28\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 56$$

26

Радиус окружности, описанной около квадрата, равен $14\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, вписанной в этот квадрат.

 $r = ?$

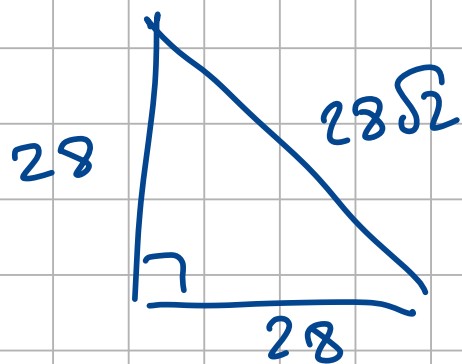
$$R = 14\sqrt{2} = d = 28\sqrt{2}$$

 $\Downarrow$

$$a = 28$$

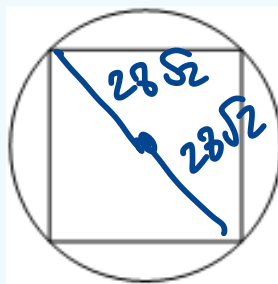
 $\Downarrow$

$$r = 14$$



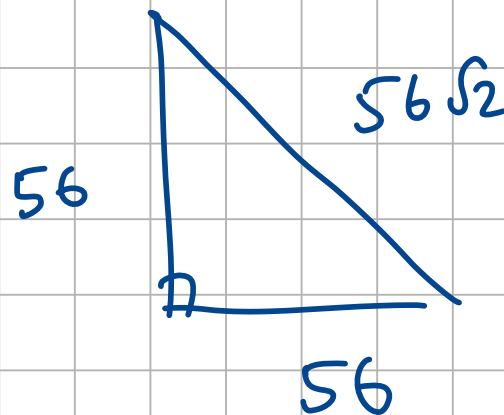
27

Радиус окружности, описанной около квадрата, равен $28\sqrt{2}$. Найдите длину стороны этого квадрата.



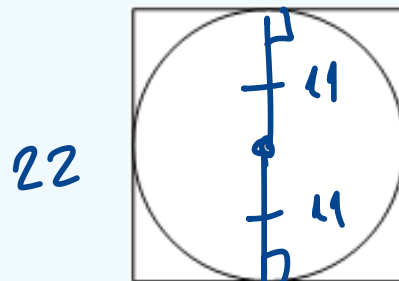
$$d = 56\sqrt{2}$$

$$a = 56$$



28

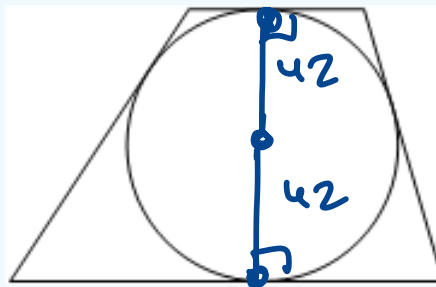
Сторона квадрата равна 22. Найдите радиус окружности, вписанной в этот квадрат.



11

29

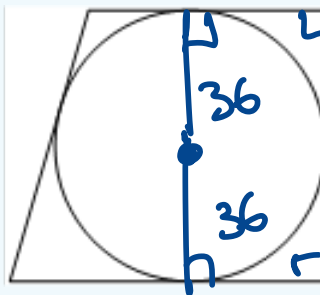
Радиус окружности, вписанной в трапецию, равен 42. Найдите высоту этой трапеции.

 $h = ?$ 

$$h = 42 + 42 = 84$$

30

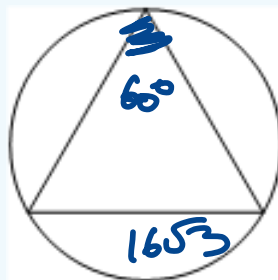
Радиус окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, равен 36. Найдите высоту этой трапеции.



$$h = 36 \cdot 2 = 72$$

31

Сторона равностороннего треугольника равна $16\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

 $R = ?$

$$\frac{16\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 2R$$

$$\frac{16\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R$$

$$16\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2R$$

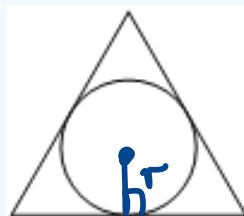
$$16\sqrt{3} = \sqrt{3} R$$

$$| : \sqrt{3}$$

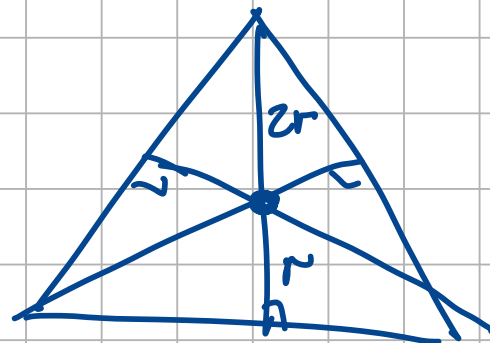
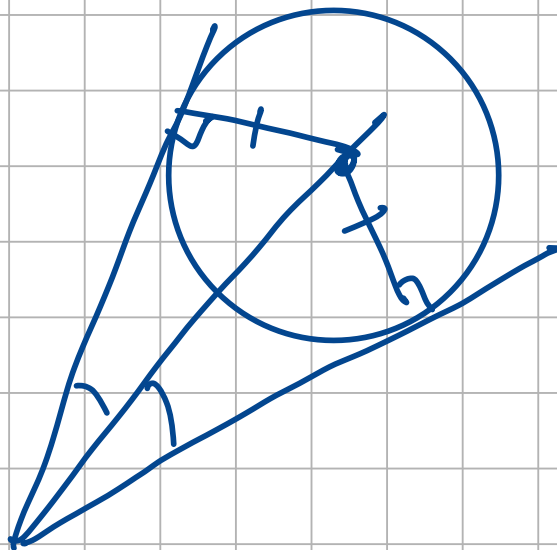
$$R = 16$$

32

Сторона равностороннего треугольника равна $14\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.


 $14\sqrt{3}$

Центр впис. окр-ти -
точка пересек. биссектр.



$$h = 3r$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} a = 3r$$

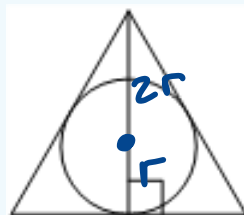
$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 14\sqrt{3} = 3r$$

$$7 \cdot 3 = 3r$$

$$r = 7$$

33

Радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, равен 11. Найдите высоту этого треугольника.



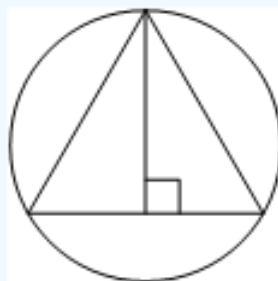
$$r = 11$$

$$h = 3r =$$

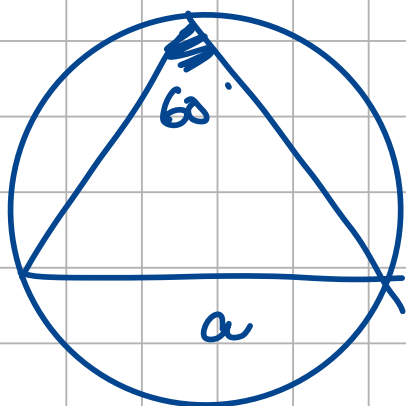
$$= 3 \cdot 11 = 33$$

34

Радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника, равен 4. Найдите высоту этого треугольника.



$$R = 4$$



$$\frac{a}{\sin 60^\circ} = 2R$$

$$\frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R$$

$$a = \sqrt{3}R$$

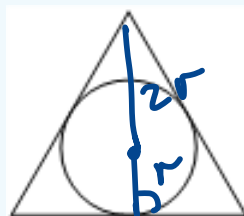
$$a = 4\sqrt{3}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4\sqrt{3} = 2 \cdot 3 = 6$$

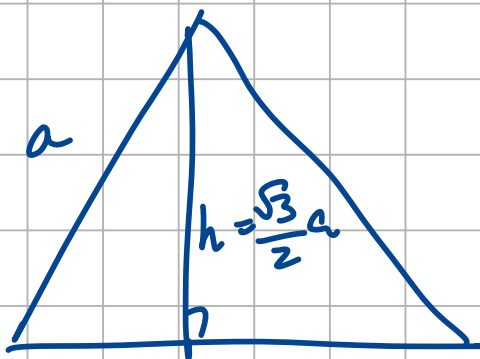
$$\frac{\sqrt{3} \cdot 4 \cdot \sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot 3$$

35

Радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, равен $8\sqrt{3}$. Найдите длину стороны этого треугольника.



$$h = 3r = 3 \cdot 8\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$$



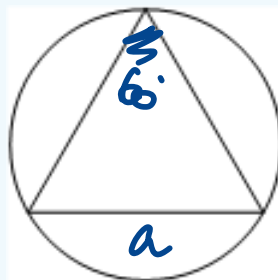
$$\frac{\sqrt{3}}{2} a = 24\sqrt{3} \quad | : \sqrt{3}$$

$$\frac{a}{2} = 24$$

$$a = 48$$

36

Радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника, равен $7\sqrt{3}$. Найдите длину стороны этого треугольника.



$$R = 7\sqrt{3}$$

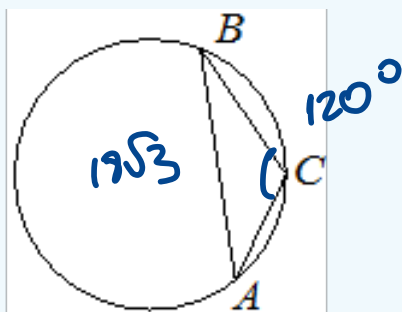
$$\frac{a}{\sin 60^\circ} = 2R$$

$$\frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R$$

$$a = \sqrt{3} R = \sqrt{3} \cdot 7\sqrt{3} = 7 \cdot 3 = 21$$

37

В треугольнике ABC угол C равен 120° , $AB = 18\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.



$$\frac{AB}{\sin 120^\circ} = 2R$$

$$\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{AB}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R$$

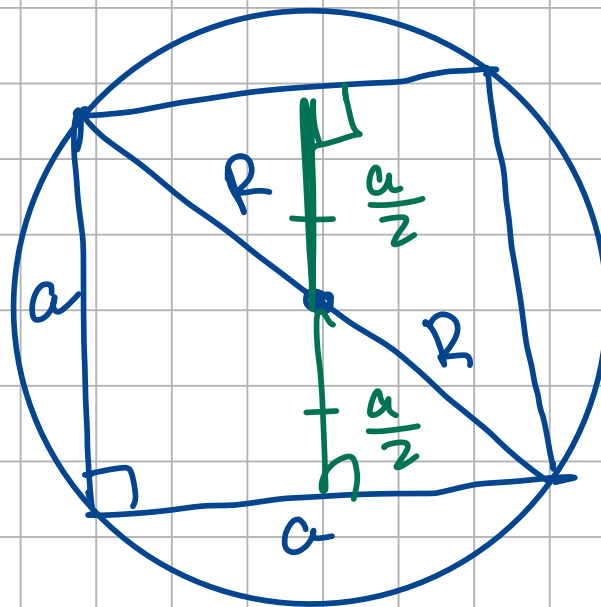
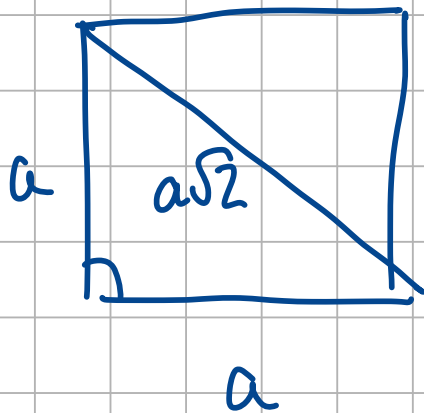
$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\begin{aligned} \sin 120^\circ &= \sin(180^\circ - 60^\circ) \\ &= \sin 60^\circ \end{aligned}$$

$$AB = \sqrt{3} R$$

$$18\sqrt{3} = \sqrt{3} R \quad | : \sqrt{3}$$

$$R = 18$$



стор:

a

гипот.

$\sqrt{2}a$

R отсюда:

$\frac{\sqrt{2}a}{2}$

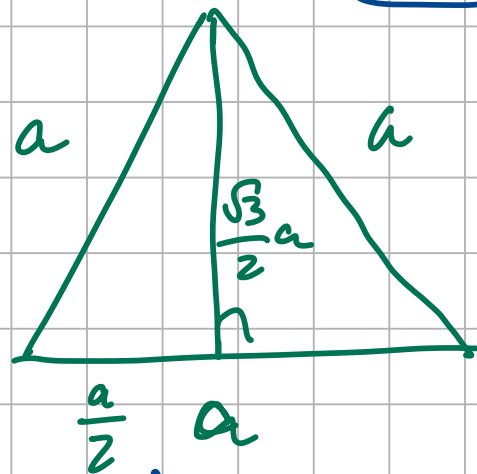
R отсюда:

$\frac{a}{2}$

$$r = \frac{1}{3} h =$$

$$r = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{\sqrt{3}a}{6}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$



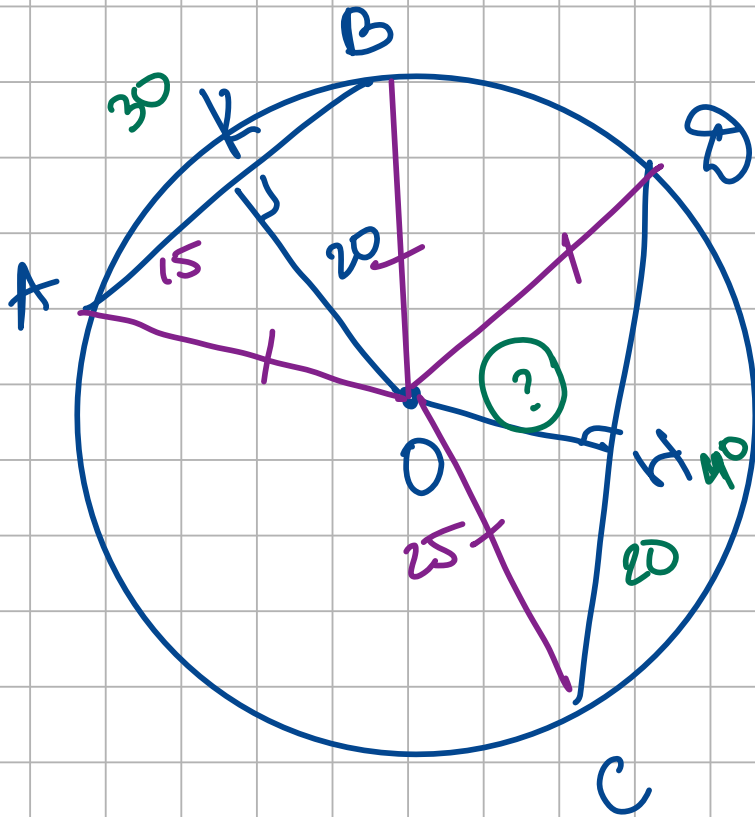
$$\frac{a}{\sin 60^\circ} = 2R$$

$$\frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R$$

$$a = \sqrt{3} R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите расстояние от центра окружности до хорды CD , если $AB = 30$, $CD = 40$, а расстояние от центра окружности до хорды AB равно 20.



23

1) Пусть $OK \perp AB$
 $OL \perp CD$
 $OK = 20$ (по условию)

2) Прав. $OA = OB = OC = OD = R$
 радиусов

3) $\triangle AOB$ - равносторонний (т.к. $OA = OB = R$)

OK - вис. $\Rightarrow OK$ и медиана $\Rightarrow$

$$\Rightarrow AK = KB = 15$$

теор. Пифаг.

4) $\triangle AOK$ - прямоугольный, по

$$AO^2 = AK^2 + KO^2$$

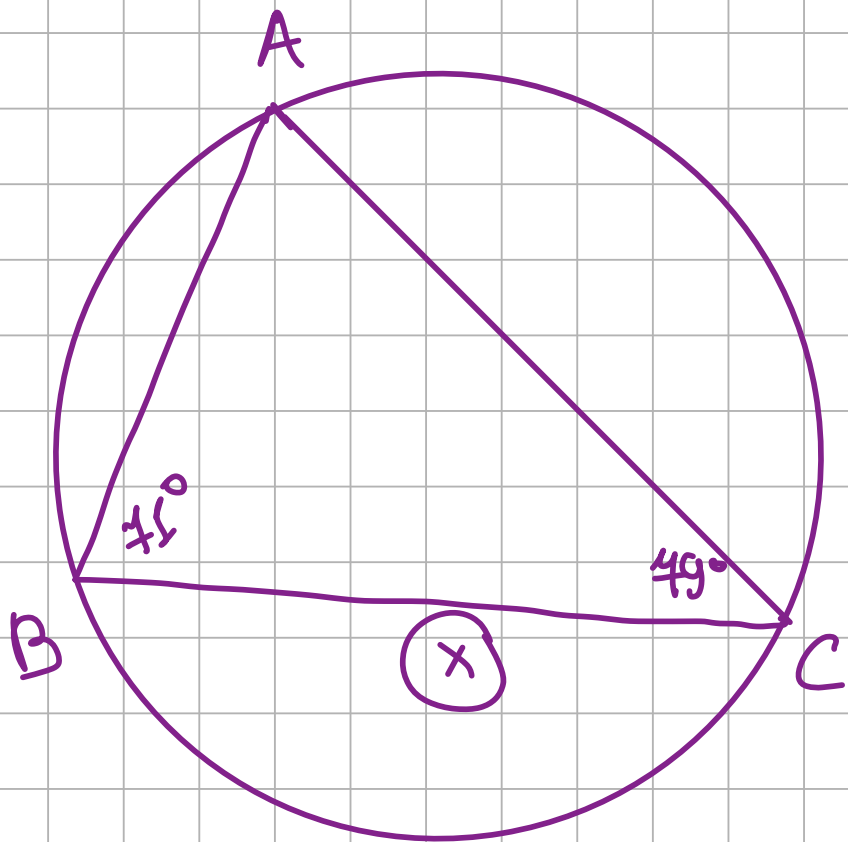
$$AO^2 = 15^2 + 20^2 = 225 + 400 = 625 \Rightarrow AO = R = 25$$

5) $\triangle COD$ - равнобедренный ($OC = OD = R$) $\Rightarrow OL$ - вис. и медиана $\Rightarrow$
 $\Rightarrow CL = LD = \frac{CD}{2} = 20$; $OC = R = 25$
 $= 625 - 400 = 225$

6) $\triangle OLC$ - прямоугольный по теор. Пифаг. $OC^2 = OL^2 + LC^2 \Rightarrow OL^2 = OC^2 - LC^2 =$

39

Углы B и C треугольника ABC равны соответственно 71° и 79° . Найдите BC , если радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен 8.



$$R = 8$$

$$\begin{aligned} 1) \angle A &= 180^\circ - \angle B - \angle C = \\ &= 180^\circ - 71^\circ - 79^\circ = \\ &= 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ \end{aligned}$$

2) По теор. син. для $\triangle ABC$

$$\frac{BC}{\sin \angle A} = 2R, \text{ где } R - \text{радиус опис. окр.}$$

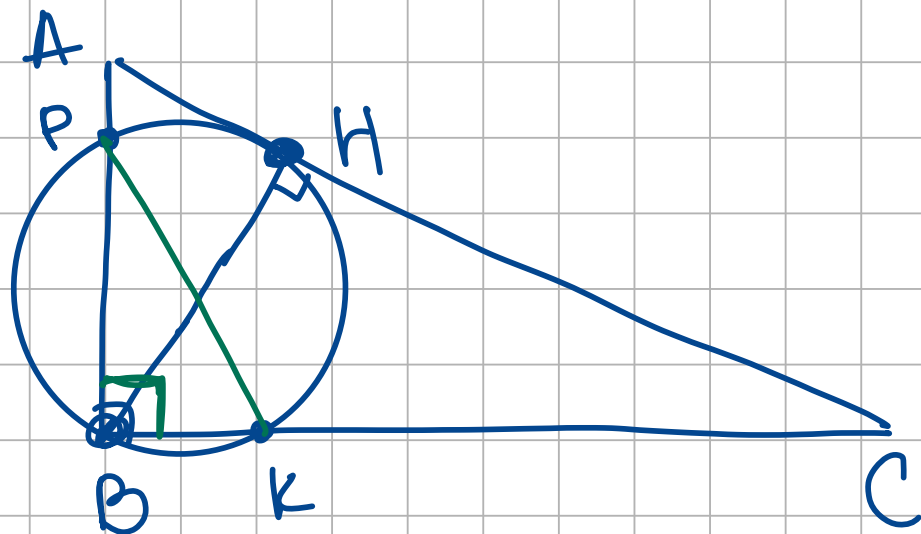
$$\frac{BC}{\sin 30^\circ} = 2R$$

$$\frac{BC}{\frac{1}{2}} = 2R \quad \angle \triangleright BC = R = 8$$

$$BC = \textcircled{8}$$

40

Точка H является основанием высоты BH , проведённой из вершины прямого угла B прямоугольного треугольника ABC . Окружность с диаметром BH пересекает стороны AB и CB в точках P и K соответственно. Найдите PK , если $BH = 13$.



1) $\angle PBK$ вкл. вкл.

В окр-ти $\angle PBK = 90^\circ$

(т. к. $\triangle ABC$ — п/у)

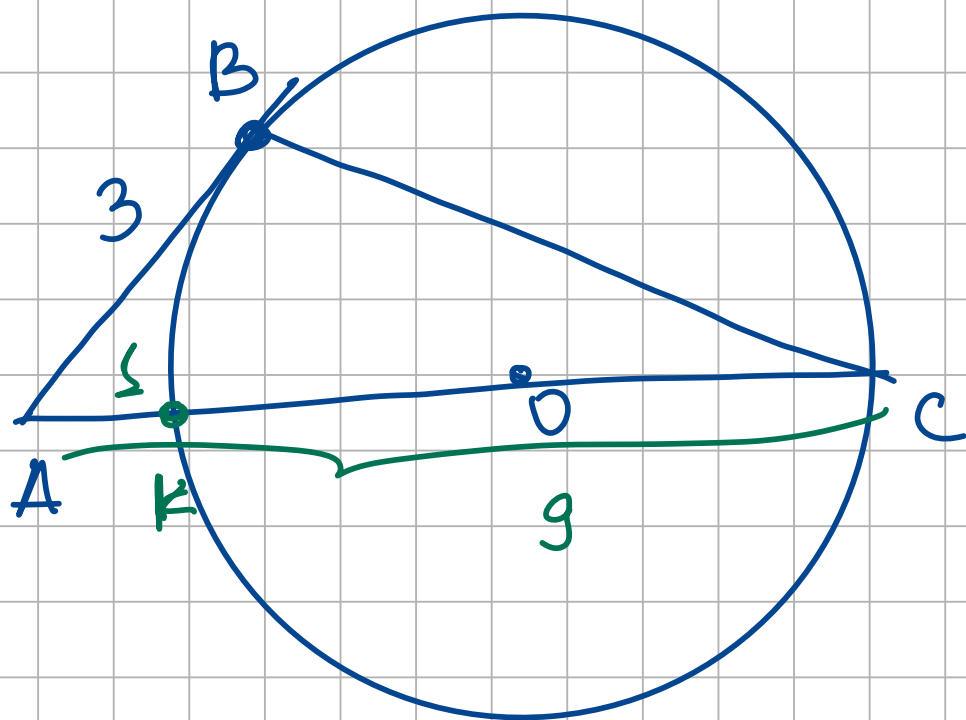
$\angle PBK$ опирается на диаметр $\Rightarrow$

$\Rightarrow PK$ — diam.

2) PK — diam (из п. 1) $\Rightarrow PK = BH = 13$
 BH — diam (по усл)

41

Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B . Найдите диаметр окружности, если $AB = 3$, $AC = 9$.



$$d = ? \quad AB = 3$$

$$AC = 9$$

0) Пусть AC пересек. окруж. в т. K

1) По теор. о кас. и сек.

(AB — кас.;
 AC — сек.)

$$AB^2 = AK \cdot AC$$

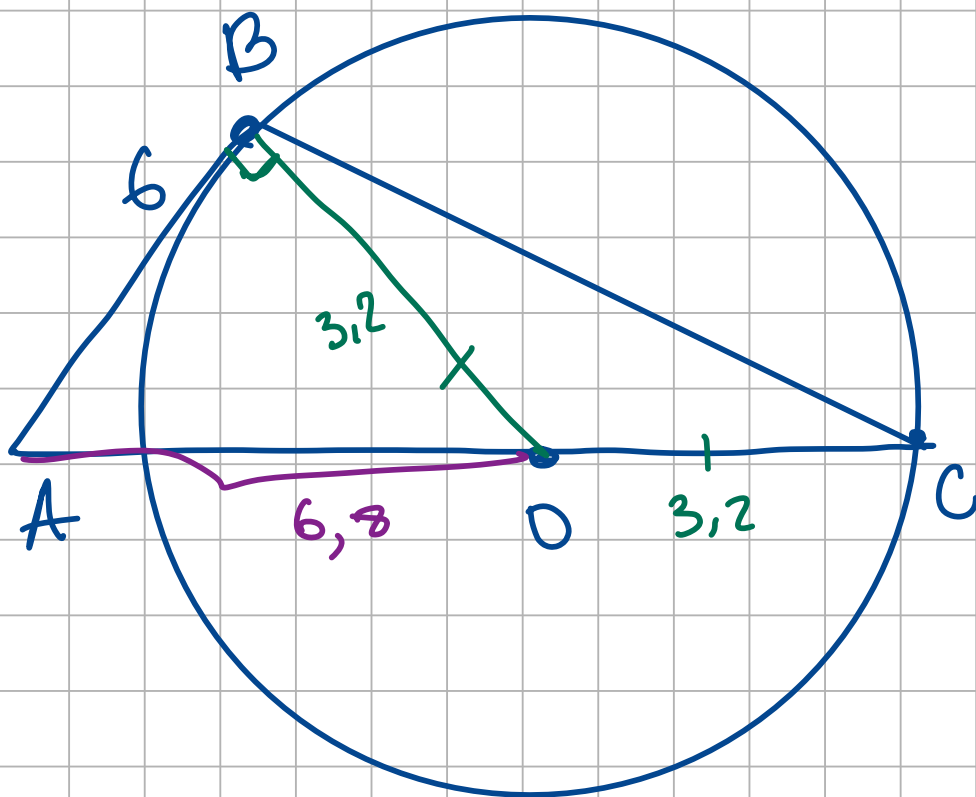
$$3^2 = AK \cdot 9$$

$$9 = AK \cdot 9 \Rightarrow AK = 1$$

2) Т.к. $O \in AC$ по усл., то KC — хорда, прох. центр $\Rightarrow KC$ — диаметр

$$d = KC = AC - AK = 9 - 1 = 8$$

Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B . Найдите AC , если диаметр окружности равен $6,4$, а $AB = 6$.



$$1) d = 6,4$$

$$AC = ?$$

$$AB = 6$$



$$r = \frac{d}{2} = 3,2$$

2) Пров. OB — радиус
 B — точку кас.
 $OB \perp AB$ (т.к. радиус, пр. в т. кас. $\perp$ касат.)
 OC — радиус $\Rightarrow$
 $OB = OC = r = 3,2$

3) $\triangle ABO$ — н/ч ($AB \perp OB$)

по теор. Пифаг.

$$AO^2 = AB^2 + BO^2$$

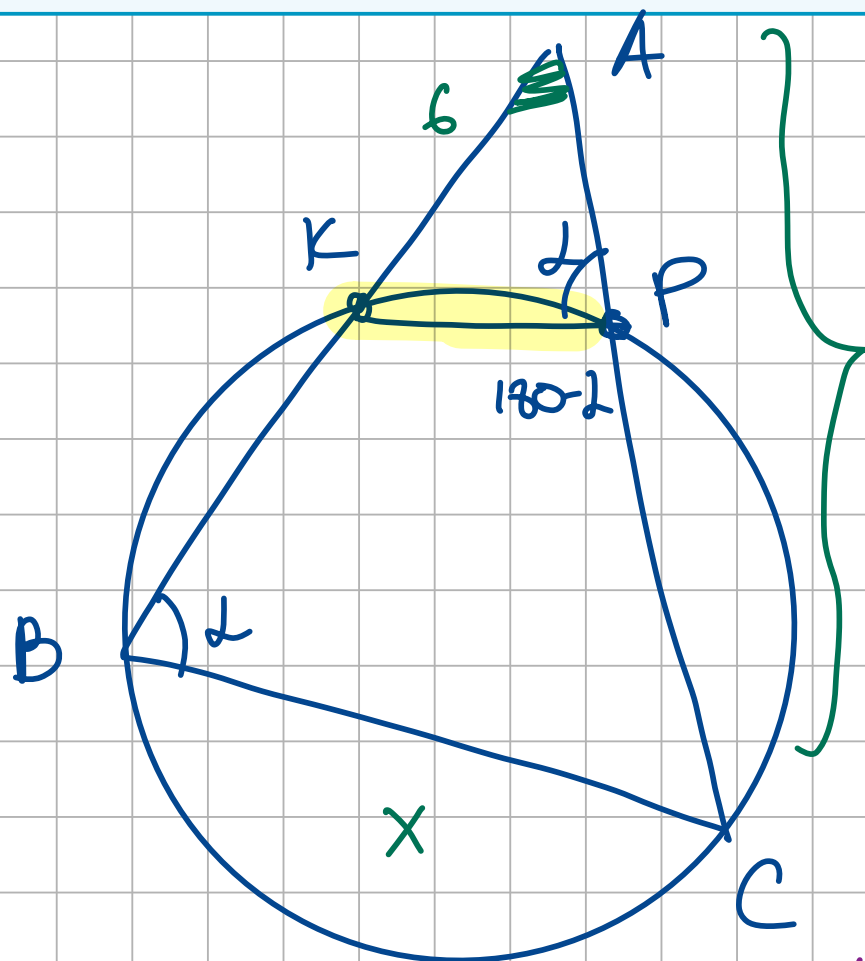
$$AO^2 = 6^2 + 3,2^2 = 36 + 10,24 = 46,24$$

$$AO = 6,8$$

$$4) AC = AO + OC = 6,8 + 3,2 = 10$$

43

Окружность пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках K и P соответственно и проходит через вершины B и C . Найдите длину отрезка KP , если $AK = 6$, а сторона AC в 1,5 раза больше стороны BC .



1) Пусть $\angle B = \alpha$, тогда
т.к. чкр $BKPC$ впис-
в окр - α , то $\angle KPC =$

$= 180 - \alpha$, тогда

$\angle KPA = 180 - (180 - \alpha) =$
 $= \alpha$ (т.к. $\angle KPA$ и $\angle KPC$ - смеж.)

2) $\angle A$ - общ.

$\angle KPA = \angle B = \alpha \quad | \Rightarrow$

$\triangle KAP \sim \triangle CAB$ по
2-м углам

$$\frac{KA}{AC} = \frac{KP}{BC}$$

$$6x = 1,5x \cdot KP \quad | : x > 0 \Rightarrow$$

$$6 = 1,5 KP \Rightarrow$$

$$\Rightarrow KP = \frac{6}{1,5} = 4$$

3) Пусть $BC = x$, тогда $AC = 1,5x$

$$\frac{6}{1,5x} = \frac{KP}{x}$$

44

Окружность пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках K и P соответственно и проходит через вершины B и C . Найдите длину отрезка KP , если $AP = 21$, а сторона BC в 1,5 раза меньше стороны AB .

