

Кредитование: дифференцированная система

Вы взяли в кредит определенную сумму денег  $S$  под определенный процент годовых.

Дифференцированные платежи — это система выплат, при которой сумма долга уменьшается равномерно, то есть на одну и ту же величину каждый год. При этом платежи каждый год разные.

Таким образом, если в кредит взята сумма  $S$  на  $n$  лет под  $r\%$  процентов годовых, это означает, что

- каждый год на текущий долг начисляются проценты, то есть долг увеличивается на величину  $k \cdot$  «текущий долг», где  $k = 0,01 \cdot r$ ;
- платежи состоят из двух частей: первая часть — это начисленные проценты, вторая — сумма  $S$ , разделенная на  $n$  равных частей.

Тогда долг каждый год уменьшается на  $\frac{1}{n}S$ .

Год	Долг до начисления %	Долг после начисления %	Выплата	Долг после выплаты
1	$S$	$S + k \cdot S$	$k \cdot S + \frac{1}{n}S$	$S - \frac{1}{n}S$
2	$S - \frac{1}{n}S = \frac{n-1}{n}S$	$\frac{n-1}{n}S + k \cdot \frac{n-1}{n}S$	$k \cdot \frac{n-1}{n}S + \frac{1}{n}S$	$\frac{n-1}{n}S - \frac{1}{n}S$
3	$S - \frac{2}{n}S = \frac{n-2}{n}S$	$\frac{n-2}{n}S + k \cdot \frac{n-2}{n}S$	$k \cdot \frac{n-2}{n}S + \frac{1}{n}S$	$\frac{n-2}{n}S - \frac{1}{n}S$
...	...	...	...	...
$k$	$S - \frac{k-1}{n}S = \frac{n-k+1}{n}S$	$\frac{n-k+1}{n}S + k \cdot \frac{n-k+1}{n}S$	$k \cdot \frac{n-k+1}{n}S + \frac{1}{n}S$	$\frac{n-k+1}{n}S - \frac{1}{n}S$
...	...	...	...	...
$n$	$S - \frac{n-1}{n}S = \frac{1}{n}S$	$\frac{1}{n}S + k \cdot \frac{1}{n}S$	$k \cdot \frac{1}{n}S + \frac{1}{n}S$	$\frac{1}{n}S - \frac{1}{n}S = 0$

Пример, где встречается

Клиент взял в банке кредит на некоторую сумму  $S$  рублей на 3 года под 15% годовых. Выплачивать кредит он должен ежегодными платежами так, чтобы каждый год сумма долга уменьшалась равномерно.

Составьте таблицу, демонстрирующую изменения, происходящие с суммой долга.

Чему равно  $S$ , если оказалось, что в итоге клиент заплатил банку 390 000 рублей?

- Если кредит взят на  $n$  лет, то сумма долга каждый год уменьшается равномерно на  $\frac{1}{n}$  часть от суммы, взятой в кредит, то есть на  $\frac{1}{n}S$ .

Так как в нашем случае кредит взят на 3 года, значит, тело долга  $S$  разделили на 3 равные части и долг должен каждый год уменьшаться на  $\frac{1}{3}S$ .

Следовательно, после первой выплаты долг должен составлять  $S - \frac{1}{3}S = \frac{2}{3}S$  рублей, после второй выплаты долг будет равен  $\frac{2}{3}S - \frac{1}{3}S = \frac{1}{3}S$  рублей, а после последней третьей долг будет равен  $\frac{1}{3}S - \frac{1}{3}S = 0$ .

Таким образом, первым делом мы можем заполнить столбцы «Сумма долга до начисления %» и «Сумма долга после платежа».

- Столбец «Сумма долга после начисления %» стоит заполнять в виде «текущий долг» + «начисленные на него  $r\%$ ».

В общем виде это выглядит так: «текущий долг» +  $k \cdot$  «текущий долг», где  $k = 0,01r$ . В нашем случае  $k = 0,15$ .

- Как удобнее находить платежи?

Представим, что мы вносим платеж всегда двумя частями: сначала — проценты, начисленные на долг (те самые  $k \cdot$  «текущий долг»), а затем оставшуюся часть платежа.

Первый платеж строится так: сначала мы вносим  $0,15S$ , тем самым наш долг снова становится равен  $S$ . Так сколько нужно еще выплатить банку, чтобы долг стал равен  $\frac{2}{3}S$ ? Ту самую  $\frac{1}{3}S$ .

Второй платеж строится так: долг стал равен  $\frac{2}{3}S$ , вносим сначала начисленные проценты  $0,15 \cdot \frac{2}{3}S$ , долг становится снова равен  $\frac{2}{3}S$ , и теперь, чтобы долг стал равен  $\frac{1}{3}S$ , нужно снова внести  $\frac{1}{3}S$ .

Третий платеж строится так: долг равен  $\frac{1}{3}S$ , вносим сначала начисленные проценты  $0,15 \cdot \frac{1}{3}S$ , долг становится снова равен  $\frac{1}{3}S$ , и теперь, чтобы долг стал равен 0, нужно снова внести  $\frac{1}{3}S$ .

Следовательно, все платежи в нашем случае будут выглядеть как  $0,15 \cdot$  «текущий долг» +  $\frac{1}{3}S$ .

Год	Сумма долга до начисления %	Сумма долга после начисления %	Платеж	Сумма долга после платежа
1	$S$	$S + 0,15S$	$0,15 \cdot S + \frac{1}{3}S$	$\frac{2}{3}S$
2	$\frac{2}{3}S$	$\frac{2}{3}S + 0,15 \cdot \frac{2}{3}S$	$0,15 \cdot \frac{2}{3}S + \frac{1}{3}S$	$\frac{1}{3}S$
3	$\frac{1}{3}S$	$\frac{1}{3}S + 0,15 \cdot \frac{1}{3}S$	$0,15 \cdot \frac{1}{3}S + \frac{1}{3}S$	0

Начисленные проценты, составляют арифм. прогрессию с разностью  $-0,15 \cdot \frac{1}{3}S$

Части, на которые уменьшается тело долга

Можно сказать по-другому: все платежи образуют арифметическую прогрессию с разностью  $-0,15 \cdot \frac{1}{n}S$ .

Продолжение примера

То, что в итоге клиент заплатил банку, является общей суммой выплат.

- Общая сумма выплат — это сумма всех платежей по кредиту. В случае дифференцированных платежей это всегда будет

$$kS \cdot \left(1 + \frac{n-1}{n} + \dots + \frac{1}{n}\right) + S = kS \cdot \frac{n+1}{2} + S,$$

сумма арифм. прогрессии:  $a_1 = \frac{1}{n}, a_n = 1$   $= \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n$

где  $k = 0,01r$  — проценты  $r\%$ , переведенные в десятичный вид,  $n$  — количество лет, на которое взят кредит.

Получаем таким образом в нашем случае для  $n = 3, k = 0,15$ :

$$\text{Общая сумма выплат} = 0,15 \cdot S \cdot \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) + S$$

сумма арифм. прогрессии  $= \frac{1}{3}S + \frac{1}{3}S + \frac{1}{3}S$   
начисленные проценты

- Переплата по кредиту — это сумма, равная общей сумме выплат за вычетом суммы, взятой в кредит, что в случае дифференцированных платежей равно сумме процентов, начисленных на долг во все годы.

$$\text{Переплата} = \text{Общая сумма выплат} - \text{Кредит} = \text{Сумма начисленных процентов}$$

В нашем случае столбец платежей имеет следующий смысл:

Платеж
$0,15 \cdot S + \frac{1}{3}S$
$0,15 \cdot \frac{2}{3}S + \frac{1}{3}S$
$0,15 \cdot \frac{1}{3}S + \frac{1}{3}S$

Складываем отдельно, получаем Переплату

Складываем отдельно, получаем Сумму  $S$ , взятую в кредит

Найдем  $S$ , если общая сумма выплат по кредиту составила 390 000 рублей:

$$0,15S \cdot \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) + S = 390\,000 \Leftrightarrow$$

$$\frac{15}{100} \cdot \frac{\frac{1}{3} + 1}{2} \cdot 3 \cdot S + S = 390\,000 \Leftrightarrow$$

$$\frac{13}{10} \cdot S = 390\,000 \Leftrightarrow$$

$$S = 300\,000 \text{ (рублей)}$$

Типичные ошибки. Рекомендации

- Некоторые проценты в десятичном виде удобнее использовать в виде рациональной дроби. Например, для  $r\% = 25\%$  имеем  $k = \frac{1}{4}$ , для  $r\% = 12,5\%$  имеем  $k = \frac{1}{8}$ , для  $r\% = 20\%$  имеем  $k = \frac{1}{5}$ .
- Рекомендуют оформлять изменения, происходящие с суммой долга, с помощью таблицы. Столбцы подписывать так, чтобы было понятно проверяющим. Названия столбцов видны на примере.
- Вводите неизвестные, которые вы собираетесь использовать в таблице, вместе с их единицами измерения. Например, если не дана сумма, взятая в кредит, вводим: "пусть  $S$  рублей — сумма, взятая в кредит".
- В задачах не может быть никакого округления значений переменных, если об этом не сказано в условии. Поэтому, если вы, например, получили нецелое число лет  $n$  — ищите у себя ошибку либо в самой модели, либо арифметического характера.
- Не ленитесь использовать слова, объясняющие ваши действия при решении: "чтобы найти переплату, нужно из суммы всех платежей вычесть сумму, взятую в кредит"; "здесь мы получили сумму арифметической прогрессии, я буду вычислять ее по такой-то формуле", "платежи составляют арифметическую прогрессию, где первый член такой-то, последний — такой-то, следовательно, их сумму можно находить по формуле суммы арифметической прогрессии" и т.д.
- Будет ошибкой: использовать без вывода формулы, не представленные в официальных учебниках, например, формулы для общей суммы выплат, переплаты; не демонстрировать арифметическую или геометрическую прогрессии, если они есть, и т.п.