Метод рационализации — это способ решения некоторых неравенств, который позволяет довольно сильно упростить решение и вычисления. Он применим для некоторых неравенств, в которых присутствуют функции разного типа: и рациональные, и показательные, и логарифмические, и др.

Метод рационализации для показательных неравенств

Рассмотрим метод рационализации для решения показательных неравенств вида

$$(h(x))^{f(x)} \geqslant (h(x))^{g(x)} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (h(x)-1)(f(x)-g(x)) \geqslant 0 \\ h(x) > 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Если бы мы решали данное неравенство классическим способом, то оно было бы равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} h(x) > 1 \\ f(x) \geqslant g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < h(x) < 1 \\ f(x) \leqslant g(x) \end{cases} \\ h(x) = 1 \end{array}\right. \qquad (1')$$

Доказательство

Покажем, что решения системы (1) и совокупности (1′) совпадают. Первое неравенство системы (1) равносильно совокупности

$$(a): \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} h(x) \geqslant 1 \\ f(x) \geqslant g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} h(x) \leqslant 1 \\ f(x) \leqslant g(x) \end{cases} \end{array}\right.$$

Совокупность (1′) равносильна совокупности

$$(b): \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} h(x) \geqslant 1 \\ f(x) \geqslant g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < h(x) \leqslant 1 \\ f(x) \leqslant g(x) \end{cases} \end{array}\right.$$

Заметим, что решение совокупности (a) плюс условие $h(x) > 0$ и решение совокупности (b) полностью совпадают.

Пример использования

Решите неравенство

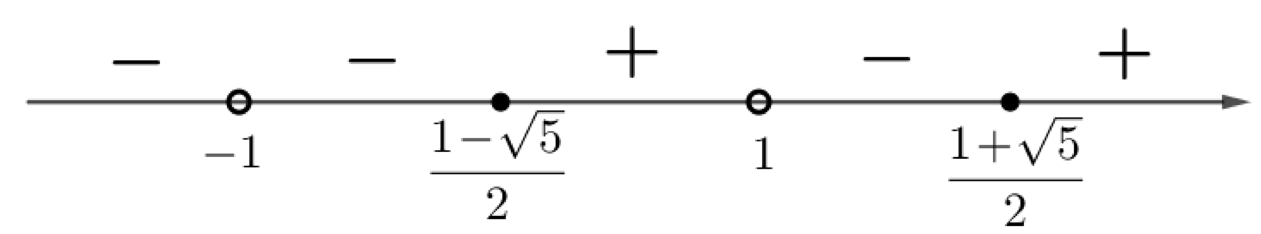
$$\left(\frac{x}{x^2-1}\right)^{x-1} \leqslant \left(\frac{x}{x^2-1}\right)^{2x}$$

► Применим метод рационализации для данного неравенства, так как оно уже записано в нужном нам виде: $h^f \leqslant h^g$.

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x}{x^2-1} - 1\right)((x-1)-(2x)) \leqslant 0 \\ \dfrac{x}{x^2-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x^2-x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)} \leqslant 0 \\ \dfrac{x}{(x-1)(x+1)} > 0 \end{cases}$$

Решим каждое неравенство методом интервалов.
Первое неравенство равносильно

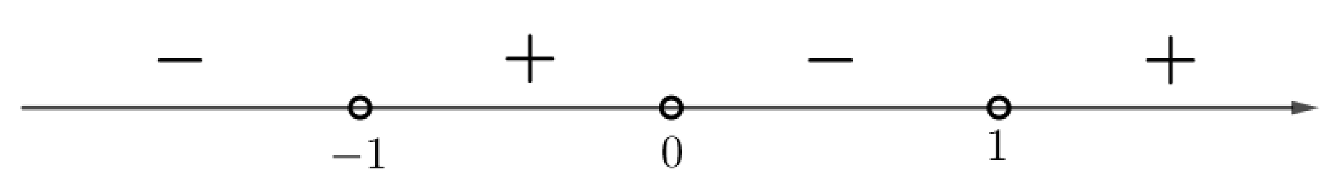
$$\frac{\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)(x+1)}{(x-1)(x+1)} \leqslant 0$$



Следовательно, $x \in (-\infty; -1) \cup \left(-1; \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left(1; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

Решение второго неравенства

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)} > 0$$



Пересечем множества решений этих двух неравенств. Следовательно, итоговый ответ к задаче:

$$x \in \left(-1; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left(1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$$

■

Метод рационализации для логарифмических неравенств

Рассмотрим метод рационализации для решения логарифмических неравенств

$$\log_{h(x)} f(x) \geqslant \log_{h(x)} g(x) \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (h(x)-1)(f(x)-g(x)) \geqslant 0 \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ h(x) > 0 \\ h(x) \neq 1 \end{cases} \qquad (2)$$

Если бы мы решали данное неравенство классическим способом, то оно было бы равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} h(x) > 1 \\ f(x) \geqslant g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < h(x) < 1 \\ f(x) \leqslant g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases} \end{array}\right. \qquad (2')$$

Доказательство

Покажем, что решения совокупности и системы совпадают. Первое неравенство системы (2) равносильно совокупности

$$(c): \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} h(x) \geqslant 1 \\ f(x) \geqslant g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} h(x) \leqslant 1 \\ f(x) \leqslant g(x) \end{cases} \end{array}\right.$$

Совокупность (2′) равносильна (если выписать ОДЗ отдельно) совокупности

$$(d): \quad \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ h(x) > 0 \\ h(x) \neq 1 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} h(x) \geqslant 1 \\ f(x) \geqslant g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} h(x) \leqslant 1 \\ f(x) \leqslant g(x) \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

Заметим, что решение совокупности (c) плюс условия $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, $h(x) > 0$, $h(x) \neq 1$ и решение системы (d) полностью совпадают.

Пример использования

Решите неравенство

$$\log_{(x^2-1)} \frac{2x^2+3x-5}{x+1} \leqslant 1$$

► Выпишем и решим ОДЗ отдельно:

$$\begin{cases} x^2-1>0 \\ x^2-1\neq 1 \\ \dfrac{2x^2+3x-5}{x+1}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+1)>0 \\ x\neq \pm\sqrt{2} \\ \dfrac{2(x-1)(x+2,5)}{x+1}>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty) \\ x\neq\pm\sqrt{2} \\ x\in(-2,5;-1)\cup(1;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x\in(-2,5;-\sqrt{2})\cup(-\sqrt{2};-1)\cup(1;\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};+\infty)$$

Тогда на ОДЗ, учитывая, что $1=\log_{(x^2-1)}(x^2-1)$, наше неравенство равносильно неравенству

$$(x^2-1-1)\left(\frac{2x^2+3x-5}{x+1}-(x^2-1)\right)\leqslant 0 \quad \Leftrightarrow$$

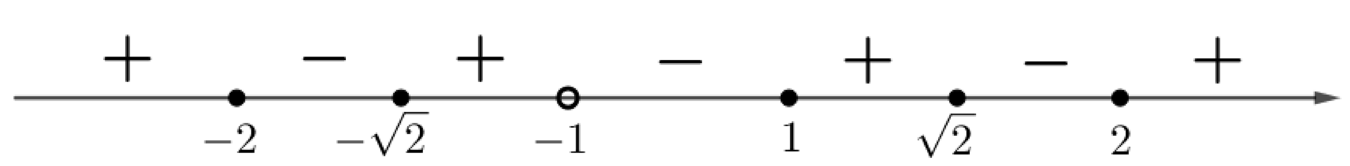
$$\frac{(x^2-2)(-x^3+x^2+4x-4)}{x+1}\leqslant 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2(x-1)-4(x-1))}{x+1}\geqslant 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2-4)(x-1)}{x+1}\geqslant 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-2)(x+2)(x-1)}{x+1}\geqslant 0$$

Полученное неравенство можно решить методом интервалов:



Таким образом, решением будут

$$x\in(-\infty;-2]\cup[-\sqrt{2};-1)\cup[1;\sqrt{2}]\cup[2;+\infty).$$

Пересечем данное решение с ОДЗ и получим итоговый ответ к задаче:

$$x\in(-2,5;-2]\cup(-\sqrt{2};-1)\cup(1;\sqrt{2})\cup[2;+\infty)$$

■

Более общий случай применения метода рационализации

Если неравенство представлено в виде $F(x)\vee 0$ ($\vee$ — один из знаков $\geqslant,\leqslant,>,<$), причем функция $F(x)$ является произведением и/или частным нескольких множителей, то на ОДЗ:

- если какой-то множитель имеет вид $h(x)^{f(x)}-h(x)^{g(x)}$, то его можно заменить на $(h-1)(f-g)$;
- если какой-то множитель имеет вид $\log_{h(x)} f(x)-\log_{h(x)} g(x)$, то его можно заменить на $(h-1)(f-g)$.

Пример использования

Решите неравенство

$$(3+x-2x^2)\log_{x+2}(3x+5)\geqslant 0$$

► Данное неравенство можно переписать в виде

$$(3+x-2x^2)(\log_{x+2}(3x+5)-\log_{x+2}1)\geqslant 0$$

(так как $\log_a 1=0$)

Теперь неравенство представлено в необходимом нам виде: справа ноль, слева произведение двух скобок, причем одна из них — разность логарифмов с одинаковым основанием.

Выпишем отдельно ОДЗ:

$$\begin{cases} x+2>0 \\ x+2\neq 1 \\ 3x+5>0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left(-\frac{5}{3};-1\right)\cup(-1;+\infty)$$

Тогда на ОДЗ можно заменить второй множитель по методу рационализации, то есть исходное неравенство на ОДЗ равносильно неравенству:

$$(3+x-2x^2)(x+2-1)(3x+5-1)\geqslant 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(2x^2-x-3)(x+1)(3x+4)\leqslant 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(2x-3)(x+1)(x+1)(3x+4)\leqslant 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x\in\left[-\frac{4}{3};\frac{3}{2}\right]$$

Пересечем данное решение с ОДЗ и получим итоговый ответ к задаче:

$$x\in\left[-\frac{4}{3};-1\right)\cup\left(-1;\frac{3}{2}\right]$$

■

Пример использования

Решите неравенство

$$(3^x-1)(0,25^x-16)(5x^2-9x-2)\leqslant 0$$

► Данное неравенство уже представлено в нужном нам виде: справа ноль, слева произведение трех множителей. ОДЗ данного неравенства: $x\in\mathbb{R}$.

Таким образом, неравенство равносильно:

$$(3^x-3^0)(0,25^x-0,25^{-2})(5x^2-9x-2)\leqslant 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(3-1)(x-0)(0,25-1)(x-(-2))(5x+1)(x-2)\leqslant 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$2\cdot(-0,75)x(x+2)(x-2)(5x+1)\leqslant 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x(x+2)(x-2)(5x+1)\geqslant 0$$

(мы разделили правую и левую части на отрицательное число $-0,75$)

Решив данное неравенство методом интервалов, получим

$$x\in(-\infty;-2]\cup\left[-\frac{1}{5};0\right]\cup[2;+\infty)$$

Заметим, что даже если в основании степени или логарифма находится конкретное число a, а не функция $h(x)$, то скобку $(a-1)$ опускать нельзя.

■

Пример использования

Решите неравенство

$$\frac{(1-4x^2)^3\cdot\left(\log_5(x+2)-\log_{25}x^2\right)}{2^{x+1}-8}\geqslant 0$$

► Найдем ОДЗ данного неравенства:

$$\begin{cases} x+2>0 \\ x^2>0 \\ 2^{x+1}-8\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x\neq 0 \\ x\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x\in(-2;0)\cup(0;2)\cup(2;+\infty)$$

Решим данное неравенство на ОДЗ.

На ОДЗ $\log_5(x+2)=\log_{25}(x+2)^2$, следовательно, применяя метод рационализации, получим:

$$\frac{(4x^2-1)^3(25-1)((x+2)^2-x^2)}{(2-1)(x+1-3)}\leqslant 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{(2x-1)^3(2x+1)^3(x+1)}{x-2}\leqslant 0$$

Решив данное неравенство методом интервалов, получим

$$x\in[-1;-0,5]\cup[0,5;2)$$

Пересекая данное решение с ОДЗ, получим итоговый ответ:

$$x\in[-1;-0,5]\cup[0,5;2)$$

■