

Рациональное неравенство — это неравенство, которое можно свести к виду

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \vee 0$$

где $P(x)$, $Q(x)$ — многочлены.

($\vee$ — один из знаков $\geq$, $\leq$, $>$, $<$)

Например, следующие неравенства являются рациональными:

$$\frac{1}{x+1} > 0, \quad x+2+\frac{x-1}{x+3} < 1, \quad x^2+x-2 \leq 0$$

1 ШАГ

Необходимо перенести все слагаемые в одну часть (пусть это будет левая часть) неравенства так, чтобы в другой части неравенства остался 0, и привести эти слагаемые к общему знаменателю так, чтобы в левой части неравенства получилась дробь. Затем нужно разложить числитель и знаменатель полученной дроби, то есть многочлены $P(x)$, $Q(x)$, на множители.

Например, неравенство $\frac{1}{x+1} < 1$ нужно переписать в виде $\frac{1}{x+1} - 1 < 0$, затем привести к общему

знаменателю $\frac{1}{x+1} - \frac{x+1}{x+1} < 0$, затем записать в виде одной дроби левую часть:

$$\frac{1-(x+1)}{x+1} < 0 \text{ и привести подобные слагаемые: } \frac{-x}{x+1} < 0.$$

Итак, пусть после разложения на множители неравенство приняло вид

$$\frac{x^2(x-1)^3(x+1)(2x^2+3x+5)(2x-x^2-3)}{(x+1)^3(3-x)(2-3x)^2} \geq 0$$

Заметим, что любой многочлен НУЖНО разложить до произведения только линейных скобок $(ax+b)$ и квадратичных скобок с отрицательным дискриминантом (ax^2+bx+c) , $D < 0$.

2 ШАГ

Рассмотрим скобки, в которых остался квадратичный трехчлен (ax^2+bx+c) с $D < 0$. Их можно просто вычеркнуть, причем при вычеркивании скобок с $a > 0$ знак неравенства остается прежним, а вот при вычеркивании скобок с $a < 0$ знак неравенства меняется на противоположный столько раз, сколько было таких скобок. Лучше вычеркивать их последовательно по одной, каждый раз меняя знак неравенства на противоположный.

Почему так?

- Если при x^2 находится положительный коэффициент $a > 0$, то при всех значениях x выражение ax^2+bx+c положительно (не может быть равно нулю!). Так как мы имеем право делить неравенство на любое число/выражение, не равное 0, то разделим обе части неравенства на такие скобки (в нашем неравенстве такой скобкой является $(2x^2+3x+5)$). Причем заметим, что так как мы делим на положительное выражение, то знак неравенства не меняется!

- Если при x^2 находится отрицательный коэффициент $a < 0$, то при всех значениях x выражение ax^2+bx+c отрицательно. Так как мы имеем право делить неравенство на любое число/выражение, не равное 0, то разделим обе части неравенства на такие скобки (в нашем неравенстве такой скобкой является $(2x-x^2-3)$). Причем заметим, что так как мы делим на отрицательное выражение, то знак неравенства должен измениться на противоположный!

Таким образом, неравенство примет вид

$$\frac{x^2(x-1)^3(x+1)}{(x+1)^3(3-x)(2-3x)^2} \leq 0$$

3 ШАГ

Рассмотрим линейные скобки $(ax+b)$.

Назовем скобку «хорошей», если при x находится положительный коэффициент, и «плохой», если при x находится отрицательный коэффициент. Хорошие скобки мы не трогаем, а каждую плохую скобку делаем хорошей, при этом каждый раз меняя знак неравенства на противоположный. Значит, если плохих скобок четное количество, то знак неравенства не изменится, если нечетное — то знак неравенства изменится на противоположный.

Чтобы сделать плохую скобку хорошей, нужно поменять в ней все знаки на противоположные.

Заметим, что выражение $(ax+b)^n$ — это не что иное, как произведение n скобок $(ax+b)$.

В нашем неравенстве среди плохих одна скобка $(3-x)$ и две скобки $(2-3x)$ (так как $(2-3x)^2 = (2-3x)(2-3x)$), то есть всего три плохих скобки, следовательно, знак неравенства изменится с $\leq$ на $\geq$.

Неравенство примет вид

$$\frac{x^2(x-1)^3(x+1)}{(x+1)^3(x-3)(3x-2)^2} \geq 0 \quad (***)$$

Заметим, что множитель x^2 — это скобка $(x-0)^2$, или, что то же самое, $(x-0)(x-0)$ — произведение двух одинаковых линейных скобок.

Теперь, когда левая часть неравенства состоит из произведения только хороших линейных скобок (в каких-то степенях), можно приступить к самому методу интервалов.

4 ШАГ

- Отметим нули каждой скобки на вещественной прямой, причем нули знаменателя — выколотые, нули числителя — закрашенные (если знак неравенства нестрогий, как в примере, то есть $\geq$ или $\leq$) или выколотые (если знак неравенства строгий, то есть $>$ или $<$).
- Расставим знаки на каждом промежутке **справа налево**. Так как все скобки — хорошие, то первый знак всегда будет «+».
- При переходе справа налево через корень, который встречается в нечетном количестве скобок, знак будет чередоваться, а если корень встречается четное количество раз, то знак чередоваться не будет.

- В чем суть?

Суть метода интервалов состоит в том, что левая часть неравенства — всюду непрерывная функция, кроме тех точек, где знаменатель дроби равен нулю. Поэтому точки, в которых эта функция равна нулю (то есть ее числитель равен нулю) и точки, в которых эта функция не существует (то есть ее знаменатель равен нулю), разбивают область определения этой функции на промежутки, причем

на каждом промежутке функция принимает значения строго одного знака.

А нам как раз нужно найти те значения x , при которых функция ≥ 0 . Причем, так как наша функция — рациональная, то ее область определения — это все действительные числа ($\mathbb{R}$), кроме нулей знаменателя. Поэтому мы берем всю область определения, то есть всю числовую прямую, и отмечаем на ней нули числителя и нули знаменателя.

Заметим, что если мы отметили n точек, то числовая прямая разобьется на $n + 1$ промежутков.

- Что означают знаки, которые мы расставляем на каждом промежутке?

Будем ставить «+», если функция на этом промежутке принимает положительные значения, и «−» — если отрицательные. В закрашенных точках функция равна 0.

- Почему первый знак всегда «+»?

Если подставить любое число, превышающее самый большой корень (у нас самый большой корень $x = 3$), то каждая скобка будет положительна, значит, и произведение таких скобок будет всегда положительно.

- Что с чередованием знаков?

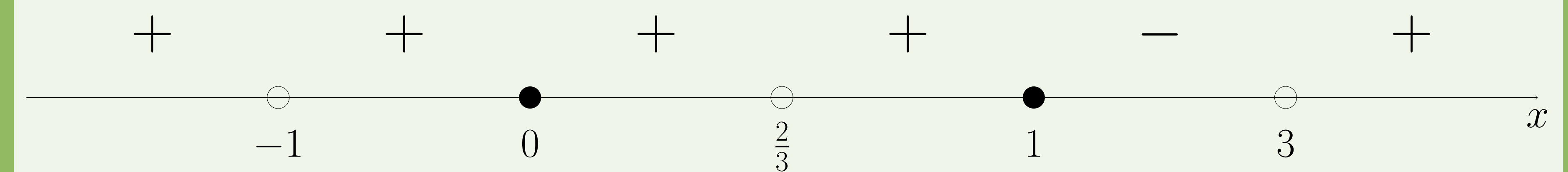
Если какой-то корень входит в четное количество скобок, то при переходе через него (справа налево!) знак меняться не будет. В нашем неравенстве это точки -1 , 0 , $\frac{2}{3}$ (например, точка -1 входит в четное количество скобок: одна в числителе $(x + 1)$ и три в знаменателе $(x + 1)^3$).

Если точка входит в нечетное количество скобок, то при переходе через эту точку (справа налево!) знак будет меняться (в нашем неравенстве это точки 3 и 1).

Объясним, почему так происходит. Каждая линейная скобка в нечетной степени $(x - a)^{2n+1}$ имеет ровно один корень $x = a$, причем, так как мы сделали ее хорошей, то для всех $x > a$ она будет положительной, для всех $x < a$ она будет отрицательной (а для $x = a$, естественно, равной нулю). Значит, когда $x \in (1; 3)$, то все скобки, кроме $(x - 3)$, будут оставаться положительными, и лишь эта скобка $(x - 3)$ станет отрицательной. Значит, их произведение также станет отрицательным. Аналогично при переходе через точку $x = 1$.

Каждая линейная скобка в четной степени $(x - b)^{2n}$ также имеет ровно один корень $x = b$, но так как она в четной степени, то при всех $x \neq b$ она всегда будет положительной! И только при $x = b$ она будет равна нулю. Именно поэтому при переходе через точку $x = \frac{2}{3}$, то есть на $x \in (0; \frac{2}{3})$, скобка $(3x - 2)^2$ не сменит свой знак на отрицательный, поэтому вся левая часть останется по знаку такой же, как и была на $(\frac{2}{3}; 1)$ (то есть положительной). Аналогично при переходе через точки $0, -1$.

Получаем такие знаки:



5 ШАГ

Осталось записать ответ.

- Если знак неравенства $\geq$, то в ответ пойдут все промежутки со знаком «+», а также закрашенные точки.
- Если знак неравенства $\leq$, то в ответ пойдут все промежутки со знаком «−», а также закрашенные точки.
- Если знак неравенства $>$, то в ответ пойдут все промежутки со знаком «+».
- Если знак неравенства $<$, то в ответ пойдут все промежутки со знаком «−».

Выколотые точки и бесконечность мы окружаем скобками (или), а закрашенные — скобками [или].

В нашем случае, так как знак преобразованного $(***)$ неравенства ≥ 0 (нестрогий), то в ответ пойдут промежутки со знаком «+» (где значение функции больше нуля) и закрашенные точки (где значение функции равно нулю).

Получаем ответ:

$$x \in (-\infty; -1) \cup (-1; \frac{2}{3}) \cup (\frac{2}{3}; 1] \cup (3; +\infty)$$