

Рассмотрим алгебраическое уравнение вида

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

где $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ – некоторые числа, причем $a_n \neq 0$.

Корень многочлена

Если уравнение

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

имеет корень $x = x_0$, то оно равносильно уравнению

$$(x - x_0) \cdot P_{n-1}(x) = 0,$$

где $P_{n-1}(x)$ – некоторый многочлен степени $n - 1$.

Для того, чтобы найти $P_{n-1}(x)$, необходимо найти частное от деления многочлена $P_n(x)$ на $(x - x_0)$.

Это действие удобно выполнять в столбик.

Пример деления многочлена на многочлен в столбик

Известно, что $x = 2$ является корнем уравнения

$2x^3 - 9x^2 + x^4 - x + 6 = 0$. Найдите частное от деления $2x^3 - 9x^2 + x^4 - x + 6$ на $x - 2$.

Решение

Будем делить многочлен на многочлен в столбик.

Запишем

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 2x^3 - 9x^2 - x + 6 & x - 2 \end{array}$$

Заметим, что записывать слагаемые в делимом необходимо по убыванию их степеней: в данном случае сначала x^4 , затем $2x^3$ и т.д.

Подбирать слагаемые в частном будем таким образом, чтобы при вычитании уничтожить сначала четвертую степень, затем третью и т.д.

Так как делитель $x - 2$ состоит из двух слагаемых, то при делении в столбик будем сносить по два слагаемых.

На что необходимо домножить $x - 2$, чтобы после вычитания из $x^4 + 2x^3$ полученного многочлена уничтожилось слагаемое x^4 ? На x^3 .

Тогда после вычитания из многочлена $x^4 + 2x^3$ многочлена $x^3(x - 2)$ останется $4x^3$. Снесем слагаемое $-9x^2$:

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 2x^3 - 9x^2 - x + 6 & x - 2 \\ \hline x^4 - 2x^3 & x^3 \\ \hline 4x^3 - 9x^2 & \end{array}$$

Ищем следующее слагаемое в частном. На что необходимо домножить $x - 2$, чтобы после вычитания из $4x^3 - 9x^2$ полученного многочлена уничтожилось слагаемое $4x^3$?

На $4x^2$: $(4x^3 - 9x^2) - (4x^2(x - 2)) = -x^2$.

Опять снесем следующее слагаемое $-x$:

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 2x^3 - 9x^2 - x + 6 & x - 2 \\ \hline x^4 - 2x^3 & x^3 + 4x^2 \\ \hline 4x^3 - 9x^2 & \\ 4x^3 - 8x^2 & \\ \hline -x^2 - x & \end{array}$$

Рассуждая аналогично, определяем, что третье слагаемое в частном должно быть $-x$:

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 2x^3 - 9x^2 - x + 6 & x - 2 \\ \hline x^4 - 2x^3 & x^3 + 4x^2 - x \\ \hline 4x^3 - 9x^2 & \\ 4x^3 - 8x^2 & \\ \hline -x^2 - x & \\ -x^2 + 2x & \\ \hline -3x + 6 & \end{array}$$

Четвертое слагаемое в частном должно быть -3 :

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 2x^3 - 9x^2 - x + 6 & x - 2 \\ \hline x^4 - 2x^3 & x^3 + 4x^2 - x - 3 \\ \hline 4x^3 - 9x^2 & \\ 4x^3 - 8x^2 & \\ \hline -x^2 - x & \\ -x^2 + 2x & \\ \hline -3x + 6 & \\ -3x + 6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Таким образом, можно сказать, что $x^4 + 2x^3 - 9x^2 - x + 6 = (x - 2)(x^3 + 4x^2 - x - 3)$.

Замечание

1) Если $x = x_0$ действительно является корнем уравнения, то после такого деления в остатке должен быть 0. В противном случае это означает, что деление в столбик выполнено неверно.

2) Если многочлен делится без остатка (то есть остаток равен 0) на $x - x_0$, то он также будет делиться без остатка на $c(x - x_0)$ для любого числа $c \neq 0$.

Например, в нашем случае, если бы мы поделили многочлен, к примеру, на $2x - 4$, то получили бы в частном $\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$.

3) Деление в столбик помогает найти другие корни уравнения: теперь для того, чтобы найти остальные корни уравнения $x^4 + 2x^3 - 9x^2 - x + 6 = 0$, необходимо найти корни уравнения $x^3 + 4x^2 - x - 3 = 0$.

Поэтому рассмотрим несколько фактов, часто помогающих подобрать корни алгебраического уравнения.

Если $x = 1$ или $x = -1$ является корнем уравнения

- Число $x = 1$ является корнем уравнения

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0,$$

если и только если сумма всех коэффициентов уравнения равна 0.

- Число $x = -1$ является корнем уравнения

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0,$$

если и только если знакопеременная сумма коэффициентов равна 0.

Примеры

- У уравнения $x^2 - 6x + 5 = 0$ сумма коэффициентов равна нулю: $1 - 6 + 5 = 0$. Следовательно, $x = 1$ является корнем этого уравнения.

Это можно проверить просто подстановкой:

$$1^2 - 6 \cdot 1 + 5 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0.$$

- В уравнении $x^3 + 2x^2 - 8x + 5 = 0$ сумма коэффициентов равна нулю:

$$1 + 2 - 8 + 5 = 0$$

Значит, число $x = 1$ является корнем данного уравнения.

Можно разделить в столбик $x^3 + 2x^2 - 8x + 5$ на $x - 1$:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 2x^2 - 8x + 5 & x - 1 \\ x^3 - x^2 & x^2 + 3x - 5 \\ \hline 3x^2 - 8x & \\ 3x^2 - 3x & \\ \hline -5x + 5 & \\ -5x + 5 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Таким образом,

$$x^3 + 2x^2 - 8x + 5 = (x - 1)(x^2 + 3x - 5).$$

Остальные корни исходного уравнения — это корни уравнения $x^2 + 3x - 5 = 0$. А это $x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{29}}{2}$.

- В уравнении $x^3 - x^2 + x + 3 = 0$ знакопеременная сумма коэффициентов равна $1 - (-1) + 1 - 3 = 0$. Таким образом, число $x = -1$ является корнем данного уравнения.

Можно разделить в столбик $x^3 - x^2 + x + 3$ на $x + 1$:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 + x + 3 & x + 1 \\ x^3 + x^2 & x^2 - 2x + 3 \\ \hline -2x^2 + x & \\ -2x^2 - 2x & \\ \hline 3x + 3 & \\ 3x + 3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Таким образом, $x^3 - x^2 + x + 3 = (x + 1)(x^2 - 2x + 3)$. Значит, остальные корни исходного уравнения — это корни уравнения $x^2 - 2x + 3 = 0$.

Но это уравнение не имеет корней ($D < 0$), значит, исходное уравнение имеет всего один корень $x = -1$.

Подбор рационального корня уравнения

Если алгебраическое уравнение

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0,$$

где $a_n, \dots, a_0$ — целые числа, $a_n \neq 0$, имеет рациональный корень $x = \frac{p}{q}$, то число p является делителем свободного члена a_0 , а число q — делителем старшего коэффициента a_n .

Пример подбора рационального корня

Рассмотрим уравнение $2x^4 - 5x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0$.

В данном случае $a_0 = -3$, $a_n = 2$.

Делители числа -3 — это $\pm 1, \pm 3$.

Делители числа 2 — это $\pm 1, \pm 2$.

Комбинируя из полученных делителей дроби, получаем все возможные варианты рациональных корней:

$$\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm 3, \pm \frac{3}{2}$$

По предыдущим теоремам можно быстро понять, что ± 1 не являются корнями. Подставив $x = -\frac{1}{2}$ в уравнение, получим:

$$2 \cdot \frac{1}{16} + 5 \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + 5 \cdot \frac{1}{2} - 3 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

Значит, число $x = -\frac{1}{2}$ является корнем уравнения.

Можно перебрать остальные варианты: таким образом мы найдем еще один рациональный корень уравнения $x = 3$. Значит, уравнение можно представить в виде

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 3) \cdot Q_2(x) = 0 \quad \text{или} \quad (2x + 1)(x - 3) \cdot P_2(x) = 0$$

(тогда $P_2(x) = \frac{1}{2}Q_2(x)$). Заметим, что второй вид записи уравнения более удобный, т.к. нам не придется при делении в столбик работать с дробями.

После деления в столбик $2x^4 - 5x^3 - x^2 - 5x - 3$ на $(2x + 1)(x - 3) = 2x^2 - 5x - 3$ получим

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 - 5x^3 - x^2 - 5x - 3 & 2x^2 - 5x - 3 \\ 2x^4 - 5x^3 - 3x^2 & x^2 + 0x + 1 \\ \hline 0x^3 + 2x^2 - 5x & \\ 0x^3 + 0x^2 + 0x & \\ \hline 2x^2 - 5x - 3 & \\ 2x^2 - 5x - 3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Отсюда $P_2(x) = x^2 + 1$. Данный многочлен не имеет корней, значит, исходное уравнение имеет только два корня: $x = -\frac{1}{2}$ и $x = 3$.

Замечание

Заметим, что если, пользуясь предыдущей схемой, не удалось подобрать рациональный корень уравнения, это вовсе не значит, что уравнение не имеет корней.

Например, уравнение $x^3 - 2 = 0$ имеет корень — это $x = \sqrt[3]{2}$, и он не рациональный.

Для подбора иррациональных корней не существует универсального алгоритма.

Пример работы с уравнением с рациональными коэффициентами

Найдите корни уравнения $4x^3 - 3x^2 - \frac{23}{6}x - 1 = 0$.

Заметим, что в данном уравнении не все коэффициенты — целые числа (коэффициент при x равен $-\frac{23}{6}$). Но мы можем преобразовать данное уравнение к нужному нам виду: необходимо умножить правую и левую части уравнения на 6:

$$24x^3 - 18x^2 - 23x - 6 = 0$$

Делители свободного члена:

$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.

Делители старшего коэффициента:

$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24$.

Получилось достаточно много :)

Выпишем некоторые возможные рациональные корни уравнения:

$$\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{6}, \pm \frac{1}{8}, \pm 2, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{1}{4}, \pm 3 \text{ и т.д.}$$

Перебирая варианты, убеждаемся, что $\frac{3}{2}$ подходит. Значит, многочлен $24x^3 - 18x^2 - 23x - 6$ должен без остатка делиться на $x - \frac{3}{2}$. Для удобства разделим на $2(x - \frac{3}{2}) = 2x - 3$ (чтобы не работать с дробями):

$$\begin{array}{r|l} 24x^3 - 18x^2 - 23x - 6 & 2x - 3 \\ \underline{24x^3 - 36x^2} & 12x^2 + 9x + 2 \\ 18x^2 - 23x & \\ \underline{18x^2 - 27x} & 4x - 6 \\ 4x - 6 & \\ \underline{4x - 6} & 0 \end{array}$$

Таким образом,

$$24x^3 - 18x^2 - 23x - 6 = (2x - 3)(12x^2 + 9x + 2).$$

Уравнение $12x^2 + 9x + 2 = 0$ в свою очередь корней не имеет. Значит, $x = \frac{3}{2}$ — единственный корень исходного уравнения.

Теорема и следствие

Теорема

Любой многочлен $P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ можно разложить на произведение множителей: линейных ($ax + b, a \neq 0$) и квадратичных ($cx^2 + px + q, c \neq 0$) с отрицательным дискриминантом.

Следствие

Кубическое уравнение $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$ всегда имеет как минимум один вещественный корень, так как его левую часть всегда можно представить как

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = A(x + r)(x^2 + px + q)$$

Пример задачи из Досрочной волны ЕГЭ 2023

Задача: Решите неравенство

$$\frac{9^x - 3^{x+1} - 19}{3^x - 6} + \frac{9^{x+1} - 3^{x+4} + 2}{3^x - 9} \leq 10 \cdot 3^x + 3$$

Решение: Сделаем замену $3^x = t$. Тогда неравенство примет вид

$$\frac{t^2 - 3t - 19}{t - 6} + \frac{9t^2 - 81t + 2}{t - 9} \leq 10t + 3$$

Заметим, что если мы решим приводить все дроби к одинаковому знаменателю, то, например, первую дробь нам необходимо будет домножить на $t - 9$, откуда мы получим 3-ую степень в числителе. Это довольно затруднительно. Поэтому мы поступим другим образом. Разделим в столбик числители первой и второй дробей на их знаменатели, то есть, как говорят, «выделим целую часть».

Для первой дроби получаем:

$$\begin{array}{r|l} t^2 - 3t - 19 & t - 6 \\ \underline{t^2 - 6t} & t + 3 \\ 3t - 19 & \\ \underline{3t - 18} & \\ -1 & \end{array}$$

Для второй дроби получаем:

$$\begin{array}{r|l} 9t^2 - 81t + 2 & t - 9 \\ \underline{9t^2 - 81t} & 9t \\ 2 & \end{array}$$

Таким образом, неравенство примет вид

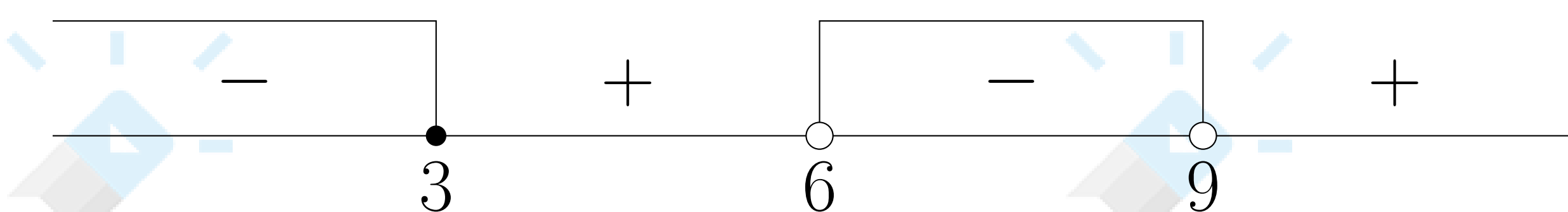
$$t + 3 - \frac{1}{t - 6} + 9t + \frac{2}{t - 9} \leq 10t + 3 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{t - 9} - \frac{1}{t - 6} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(2t - 12) - (t - 9)}{(t - 6)(t - 9)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{t - 3}{(t - 6)(t - 9)} \leq 0$$

Решим полученное неравенство методом интервалов:



Получим

$$\begin{cases} t \leq 3 \\ 6 < t < 9 \end{cases}$$

Сделаем обратную замену:

$$\begin{cases} 3^x \leq 3 \\ 6 < 3^x < 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ \log_3 6 < x < 2 \end{cases}$$

Ответ:

$$x \in (-\infty; 1] \cup (\log_3 6; 2).$$