Теория №15

Содержание

1 Аннуитетный платеж

Аннуитетный платеж — это такая система выплат, при которой кредит выплачивается ежегодно (ежемесячно) равными платежами. При этом каждый год (месяц) **до внесения платежа** банк начисляет на оставшуюся часть долга некоторый процент, то есть оставшаяся сумма долга увеличивается на это количество процентов.

1.1 Примеры

Пример 1 Клиент взял в банке 500000 рублей под 5% годовых. Сколько рублей он будет должен банку в конце первого года?

Т.к. процентная ставка составляет 5%, то в конце первого года клиент будет должен банку 105% от первоначальной суммы, т.е. от 500000 рублей:

$$\frac{105}{100} \cdot 500\,000 = 1,05 \cdot 500\,000 = 525\,000$$

■

Пример 2 Клиент взял 2,1 млн рублей в банке под 10% годовых и должен погасить кредит через 2 года равными ежегодными платежами. Сколько рублей должен составлять его ежегодный платеж?

Обозначим ежегодный платеж за x млн рублей. Составим таблицу:

Год	Сумма долга до начисления %	Сумма долга после начисления %	Сумма долга после платежа
1	$2,1$	$2,1 \cdot 0,01(100+10) = 1,1 \cdot 2,1$	$1,1 \cdot 2,1 - x$
2	$1,1 \cdot 2,1 - x$	$(1,1 \cdot 2,1 - x) \cdot 0,01(100+10)$	$1,1(1,1 \cdot 2,1 - x) - x$

Т.к. в конце второго года кредит должен быть выплачен полностью, то это значит, что долг банку на конец второго года равен нулю. То есть

$$1,1(1,1 \cdot 2,1 - x) - x = 0 \Leftrightarrow 1,1^2 \cdot 2,1 - x(1,1+1) = 0$$

Отсюда находим ежегодный платеж $x = 1,21$ млн рублей. ■

Пример 3 Клиент хочет взять в банке кредит на 2 месяца под 12,5%. Выплачивать кредит он должен равными ежемесячными платежами. Какую сумму клиент может взять в банке, если каждый месяц он будет вносить 81000 рублей?

Будем производить все вычисления в тысячах рублей (чтобы вычисления были проще). Обозначим сумму, которую клиент возьмет в банке, за A тыс. рублей. Если раз в месяц на оставшуюся часть долга начисляется 12,5%, то это значит, что эта часть долга увеличивается в $\frac{100+12,5}{100} = 1,125$ раз. Составим таблицу:

Месяц	Сумма долга до начисления %	Сумма долга после начисления %	Сумма долга после платежа
1	A	$1,125 \cdot A$	$1,125 \cdot A - 81$
2	$1,125 \cdot A - 81$	$1,125 \cdot (1,125 \cdot A - 81)$	$1,125(1,125 \cdot A - 81) - 81$

Т.к. в конце второго месяца кредит должен быть выплачен полностью, то:

$$1,125(1,125\cdot A-81)-81=0\Rightarrow 1,125^2A-81\cdot(1,125+1)=0\Rightarrow A=\frac{81\cdot(1,125+1)}{1,125^2}$$

Чтобы вычисления были проще, переведем дробь $1,125$ в рациональную: $1,125=\frac{9}{8}$. Тогда

$$A=\frac{17\cdot 81\cdot 8^2}{8\cdot 9^2},$$

откуда с легкостью находим, что $A=136$ тыс.руб. Не забываем перевести сумму из тыс.руб. в рубли. Таким образом, клиент может взять в банке 136000 рублей. ■

Пример 4 Михаил взял в банке 488000 рублей на 3 года. В банке ему сказали, что выплачивать кредит он должен, внося каждый год платеж в размере 250000 рублей, но забыли сообщить о процентной ставке банка. Помогите Михаилу определить, какой процент начисляет банк раз в год на сумму долга?

Будем производить все вычисления в тысячах рублей. Обозначим процентную ставку банка за $r\%$. Тогда каждый год банк увеличивает оставшуюся сумму долга на $r\%$, т.е. сумма долга после начисления процентов будет равна $(100+r)\%$ от суммы долга до начисления процентов. Или, что то же самое, будет в $\frac{100+r}{100}$ раз больше, чем сумма долга до начисления процентов. Обозначим величину $\frac{100+r}{100}$ за t и составим таблицу:

Год	Сумма долга до начисления %	Сумма долга после начисления %	Сумма долга после платежа
1	488	$t\cdot 488$	$t\cdot 488-250$
2	$t\cdot 488-250$	$t\cdot(t\cdot 488-250)$	$t(t\cdot 488-250)-250$
3	$t(t\cdot 488-250)-250$	$t(t(t\cdot 488-250)-250)$	$t(t(t\cdot 488-250)-250)-250$

Т.к. в конце третьего года кредит должен быть выплачен полностью, то

$$t(t(t\cdot 488-250)-250)-250=0\Rightarrow 488t^3-250(t^2+t+1)=0\Rightarrow 244t^3-125t^2-125t-125=0$$

Получили кубическое уравнение. Попробуем угадать его корень. Если кубическое уравнение имеет рациональный корень $\frac{p}{q}$, то 125 делится на p, а 244 делится на q. Заметим также, что скорее всего $0\leqslant r\leqslant 100$ и r — целое число (по логике задачи), значит, скорее всего $1\leqslant t\leqslant 2$ и t — рациональное. В таком случае нам подходят лишь комбинации $\frac{5}{4}$, $\frac{125}{122}$. Проверкой убеждаемся, что $t=\frac{5}{4}$ является корнем нашего уравнения.

Значит, уравнение принимает вид $(4t-5)(61t^2+45t+25)=0$.

Уравнение $61t^2+45t+25=0$ не имеет корней. Значит, наше кубическое уравнение имеет всего один корень $t=\frac{5}{4}$, откуда $r=25\%$. ■

1.2 Общий вид

Выведем общую формулу для аннуитетных платежей. Уже по уравнениям из предыдущих примеров может стать понятно, как она выглядит. Но все же приведем ее вывод.

Вывод формулы:

Пусть клиент взял в банке A руб. в кредит на n лет. Годовая процентная ставка в банке $r\%$. Выплачивать кредит необходимо равными ежегодными платежами.

Обозначим $\frac{100+r}{100}$ за t:

Год	Сумма долга до начисления %	Сумма долга после начисления %	Сумма долга после платежа
1	A	tA	$tA - x$
2	$tA - x$	$t(tA - x)$	$t(tA - x) - x = t^2A - tx - x$
3	$t^2A - tx - x$	$t(t^2A - tx - x)$	$t(t^2A - tx - x) - x =$ $= t^3A - t^2x - tx - x$
...	...	...	...
n	$t^{n-1}A - t^{n-2}x - \dots - x$	$t(t^{n-1}A - t^{n-2}x - \dots - x)$	$t(t^{n-1}A - t^{n-2}x - \dots - x) - x$

Таким образом:

$$t(t^{n-1}A - t^{n-2}x - \dots - x) - x = 0 \Rightarrow t^nA - x(t^{n-1} + t^{n-2} + \dots + 1) = 0$$

Значит, в случае с аннуитетным платежом имеет место следующая формула:

$$\left(\frac{100+r}{100}\right)^n \cdot A - x\left(\left(\frac{100+r}{100}\right)^{n-1} + \left(\frac{100+r}{100}\right)^{n-2} + \dots + 1\right) = 0,$$

где A — сумма, взятая в кредит, $r\%$ — процентная ставка в банке, x — сумма платежа, n — количество лет (месяцев), на которое взят кредит.

2 Дифференцированный платеж

Дифференцированный платеж — это такая система выплат, при которой сумма долга уменьшается равномерно, то есть на одну и ту же величину каждый год (месяц). При этом платежи каждый год **разные**.

Таким образом, если кредит взят на n лет, то это значит, что сумму кредита A разделили на n равных частей и что каждый год после платежа сумма долга уменьшается на $\frac{1}{n}A$ по сравнению с долгом на начало года.

2.1 Примеры

Пример 1 Клиент взял в банке кредит на 2 года под 15% годовых. Выплачивать кредит он должен ежегодными платежами так, чтобы сумма долга уменьшалась равномерно. Какую сумму клиент взял в банке, если оказалось, что в итоге он заплатил банку 490000 рублей?

Пусть кредит составил A рублей. Т.к. кредит взят на 2 года, значит, после первой выплаты долг должен составлять $A-\frac{1}{2}A=\frac{1}{2}A$ рублей, после второй выплаты $\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}A=0$ рублей. Составим таблицу:

Год	Сумма долга до начисления %	Сумма долга после начисления %	Сумма долга после выплаты	Выплата
1	A	$A+0,15A$	$\frac{1}{2}A$	$0,15A+\frac{1}{2}A$
2	$\frac{1}{2}A$	$\frac{1}{2}A+0,15\cdot\frac{1}{2}A$	0	$0,15\cdot\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}A$

То, что клиент в итоге заплатил банку, есть не что иное, как сумма всех выплат по кредиту. Т.е.

$$0,15A+\frac{1}{2}A+0,15\cdot\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}A=490\,000\Rightarrow A=\frac{490\,000\cdot 2}{2,45}=400\,000 \text{ рублей}$$

■

Пример 2 Александр взял в банке кредит на 50000 рублей на 3 месяца, причем выплачивать кредит он должен ежемесячными платежами так, чтобы сумма долга каждый месяц уменьшалась на одну и ту же величину. Сколько рублей составит переплата Александра по кредиту, если процентная ставка в банке 10%?

Т.к. кредит взят на 3 месяца, то после первой выплаты долг должен составить $A-\frac{1}{3}A=\frac{2}{3}A$, после второй $\frac{2}{3}A-\frac{1}{3}A=\frac{1}{3}A$, а после третьей — 0 рублей. Составим таблицу, производя все вычисления в тыс. рублей:

Месяц	Сумма долга до начисления %	Сумма долга после начисления %	Сумма долга после выплаты	Выплата
1	50	$50+0,1\cdot 50$	$\frac{2}{3}\cdot 50$	$0,1\cdot 50+\frac{1}{3}\cdot 50$
2	$\frac{2}{3}\cdot 50$	$\frac{2}{3}\cdot 50+0,1\cdot\frac{2}{3}\cdot 50$	$\frac{1}{3}\cdot 50$	$0,1\cdot\frac{2}{3}\cdot 50+\frac{1}{3}\cdot 50$
3	$\frac{1}{3}\cdot 50$	$\frac{1}{3}\cdot 50+0,1\cdot\frac{1}{3}\cdot 50$	0	$0,1\cdot\frac{1}{3}\cdot 50+\frac{1}{3}\cdot 50$

Таким образом, всего Александр заплатил банку

$$\left(0,1\cdot 50+\frac{1}{3}\cdot 50\right)+\left(0,1\cdot\frac{2}{3}\cdot 50+\frac{1}{3}\cdot 50\right)+\left(0,1\cdot\frac{1}{3}\cdot 50+\frac{1}{3}\cdot 50\right)$$

тыс. рублей.

Перегруппируем слагаемые и вынесем за скобки общие множители:

$$0,1\cdot 50\left(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)+3\cdot\frac{1}{3}\cdot 50=0,1\cdot 50\cdot 2+50$$

Для того, чтобы найти переплату по кредиту, необходимо из того, что Александр в итоге заплатил банку, отнять сумму кредита:

$$(0,1\cdot 50\cdot 2+50)-50=10 \text{ тыс. рублей.}$$

Таким образом, его переплата составила 10000 рублей.

Заметим:

1. Каждая выплата состоит из двух частей:

   первая часть — это сумма «набежавших» процентов на текущий долг (в первый год это $0,1\cdot 50$, во второй — $0,1\cdot(\frac{2}{3}\cdot 50)$ и т.д.);

   вторая часть всегда фиксирована — это та часть, на которую должен уменьшаться долг каждый год (в нашем примере это $\frac{1}{3}\cdot 50$).

   Действительно, когда клиент выплачивает «набежавшие» проценты, сумма его долга становится равна той, которая была до начисления процентов (например, в первый год становится равна A). Далее клиент еще вносит $\frac{1}{n}$ часть от этого долга. И таким образом сумма долга уменьшается на $\frac{1}{n}$ часть, что и подразумевает дифференцированная система платежей.

2. Переплата по кредиту всегда равна сумме «набежавших» процентов на долг в первый год, во второй год, в третий год и т.д.

   В нашем примере переплата как раз равна $0,1\cdot 50+0,1\cdot\frac{2}{3}\cdot 50+0,1\cdot\frac{1}{3}\cdot 50$.

■

Пример 3 Банк предлагает клиентам кредит на 1 млн рублей на следующих условиях:
– каждый год банк начисляет на оставшуюся часть долга 10%;
– после начисления процентов клиент обязан внести платеж;
– через 5 лет кредит должен быть выплачен полностью;
– система выплат дифференцированная.
Сколько процентов от первоначального долга составит переплата по такому кредиту?

Т.к. кредит выдается на 5 лет, это значит, что долг должен уменьшаться каждый год на $\frac{1}{5}\cdot 1$ млн. рублей, то есть после первой выплаты долг составит $1-\frac{1}{5}\cdot 1=\frac{4}{5}$ млн. рублей, после второй $\frac{4}{5}-\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$ млн. рублей и т.д.

Составим таблицу, причем все вычисления будем производить в млн рублей:

Год	Сумма долга до начисления %	Сумма долга после начисления %	Сумма долга после выплаты	Выплата
1	1	$1+0,1$	$\frac{4}{5}$	$0,1+\frac{1}{5}$
2	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}+0,1\cdot\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$0,1\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{5}$
3	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}+0,1\cdot\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$0,1\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{5}$
4	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}+0,1\cdot\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$0,1\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{5}$
5	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}+0,1\cdot\frac{1}{5}$	0	$0,1\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$

Таким образом, переплата по кредиту составила:

$$\left(0,1+\frac{1}{5}\right)+\left(0,1\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{5}\right)+\left(0,1\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{5}\right)+\left(0,1\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\right)+\left(0,1\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)-1=\frac{3}{10} \text{ млн. рублей.}$$

Для того, чтобы посчитать, сколько *процентов* составила переплата относительно кредита, необходимо переплату разделить на сумму кредита и умножить на 100%:

$$\frac{\frac{3}{10}}{1} \cdot 100\% = 30\%$$

■

2.2 Общий вид

Выведем несколько формул:

1. **Формула для выплаты по кредиту.**

   Пусть взят кредит на A рублей, на n лет, годовая ставка $r\%$.

   Значит, каждый год долг должен уменьшаться на $\frac{1}{n}A$ рублей. К тому же, например, в первый год после начисления процентов долг составит $A+\frac{r}{100}A$, поэтому обозначим для удобства $\frac{r}{100} = y$ и составим таблицу:

Год	Сумма долга до начисления %	Сумма долга после начисления %	Сумма долга после выплаты	Выплата
1	A	$A + yA$	$\frac{n-1}{n}A$	$yA + \frac{1}{n}A$
2	$\frac{n-1}{n}A$	$\frac{n-1}{n}A + y \cdot \frac{n-1}{n}A$	$\frac{n-2}{n}A$	$y \cdot \frac{n-1}{n}A + \frac{1}{n}A$
3	$\frac{n-2}{n}A$	$\frac{n-2}{n}A + y \cdot \frac{n-2}{n}A$	$\frac{n-3}{n}A$	$y \cdot \frac{n-2}{n}A + \frac{1}{n}A$
4	$\frac{n-3}{n}A$	$\frac{n-3}{n}A + y \cdot \frac{n-3}{n}A$	$\frac{n-4}{n}A$	$y \cdot \frac{n-3}{n}A + \frac{1}{n}A$
…	…	…	…	…
$n-1$	$\frac{2}{n}A$	$\frac{2}{n}A + y \cdot \frac{2}{n}A$	$\frac{1}{n}A$	$y \cdot \frac{2}{n}A + \frac{1}{n}A$
n	$\frac{1}{n}A$	$\frac{1}{n}A + y \cdot \frac{1}{n}A$	0	$y \cdot \frac{1}{n}A + \frac{1}{n}A$

   Таким образом, если i — номер года, то выплата в i-ый год будет равна: $x_i = y \cdot \frac{n-(i-1)}{n}A + \dfrac{1}{n}A$, или

$$x_i = \frac{r}{100} \cdot \frac{n-i+1}{n}A + \frac{1}{n}A$$

2. **Формула для переплаты по кредиту.**

   Для того, чтобы посчитать переплату, необходимо просто сложить все данные из последнего столбца и отнять A:

$$\left(yA+\frac{1}{n}A\right)+\left(y\cdot\frac{n-1}{n}A+\frac{1}{n}A\right)+\left(y\cdot\frac{n-2}{n}A+\frac{1}{n}A\right)+$$
$$\left(y\cdot\frac{n-3}{n}A+\frac{1}{n}A\right)+\dots+\left(y\cdot\frac{2}{n}A+\frac{1}{n}A\right)++\left(y\cdot\frac{1}{n}A+\frac{1}{n}A\right)-A=$$
$$=\left(yA+y\cdot\frac{n-1}{n}A+y\cdot\frac{n-2}{n}A+y\cdot\frac{n-3}{n}A+\dots+y\cdot\frac{2}{n}A+y\cdot\frac{1}{n}A\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{n}A+\frac{1}{n}A+\frac{1}{n}A+\frac{1}{n}A+\dots+\frac{1}{n}A+\frac{1}{n}A\right)-A=$$
$$=yA\left(1+\frac{n-1}{n}+\frac{n-2}{n}+\frac{n-3}{n}+\dots+\frac{2}{n}+\frac{1}{n}\right)++n\cdot\frac{1}{n}A-A=$$
$$=yA\left(1+\frac{n-1}{n}+\frac{n-2}{n}+\frac{n-3}{n}+\dots+\frac{2}{n}+\frac{1}{n}\right)$$

Слагаемые в скобках образуют арифметическую прогрессию, первый член которой $a_1=1$, последний $a_n=\frac{1}{n}$, разность $d=-\frac{1}{n}$, а количество членов равно n. Сумма такой прогрессии равна:

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\frac{1+\frac{1}{n}}{2}\cdot n=\frac{n+1}{2}$$

Значит, вся переплата равна $yA\cdot\dfrac{n+1}{2}$, или

$$P=\frac{r}{100}\cdot\frac{n+1}{2}A$$

3 Банковский вклад

Банковский вклад — это сумма денег, переданная банку на хранение с целью получить доход в виде начисленных процентов.

Раз в какой-то промежуток времени (в задачах это, как правило, месяц или год) банк начисляет на текущую сумму некоторое количество $r\%$ процентов.

Раз в год **после начисления процентов** клиент, как правило, имеет право доложить на счет любую сумму денег. Также клиент имеет право снимать со счета любую сумму (естественно, не превышающую имеющуюся). Время, когда он может это сделать, указывается в задаче.

3.1 Примеры

Пример 1 В январе 2014 года клиент положил в банк 30000 рублей под 10% годовых, которые банк начисляет раз в год в декабре. Сколько рублей будет на счете у клиента в январе 2017 года?

То, что банк начисляет на текущую сумму 10%, значит, что после начисления процентов сумма будет составлять 110% от суммы, находящейся на счете до начисления процентов.

Составим таблицу:

Год	Сумма на счете до начисления % (январь)	Сумма на счете после начисления % (декабрь)
2014	$30\,000$	$1,1\cdot 30\,000$
2015	$1,1\cdot 30\,000$	$1,1^2\cdot 30\,000$
2016	$1,1^2\cdot 30\,000$	$1,1^3\cdot 30\,000$

Таким образом, в декабре 2016 года после начисления процентов на счете у клиента будет $1,331\cdot 30000$ рублей. Эта же сумма будет у него на счете и в январе 2017 года (т.к. проценты начисляются только в декабре).

Значит, ответом будет 39930 рублей. ■

Пример 2 В марте 2016 года Мария сделала вклад в банк в размере 100000 рублей на 3 года. Раз в год в ноябре банк начисляет на имеющуюся на счете сумму 5%. Какую максимальную сумму денег может снять Мария в декабре 2017 года, чтобы в марте 2019 года сумма на счете была не менее 105000 рублей?

Составим таблицу, делая все вычисления в тыс. рублей и обозначив за x сумму, которую Мария снимет со счета:

Год	Сумма на счете до начисления % (март)	Сумма на счете после начисления % (ноябрь)	Сумма на счете после снятия (декабрь)
2016	100	$1,05\cdot 100$	$1,05\cdot 100$
2017	$1,05\cdot 100$	$1,05^2\cdot 100$	$1,05^2\cdot 100-x$
2018	$1,05^2\cdot 100-x$	$1,05(1,05^2\cdot 100-x)$	$1,05(1,05^2\cdot 100-x)$

Заметим, что в марте 2019 года на счете у Марии будет столько же денег, сколько и в декабре 2018. Таким образом, необходимо найти такой максимальный x, чтобы

$$1,05(1,05^2\cdot 100-x)\geqslant 105$$

Решая данное неравенство, получим, что $x\leqslant 10,25$ тыс. рублей. Таким образом, максимальная сумма, которую можно снять со счета, это 10250 рублей. ■

Пример 3 Планируется сделать вклад в размере 1 млн. рублей под целое число процентов. Раз в год после начисления процентов планируется снимать со счета 100 тыс. рублей. Какой должен быть наименьший годовой процент в банке, чтобы после трех таких снятий сумма на счете была не менее 1 млн. рублей?

Обозначим годовой процент банка на $r\%$. Тогда после начисления процентов сумма на счете будет увеличиваться в $\frac{100+r}{100}$ раз. Поэтому обозначим $\frac{100+r}{100}$ за t и составим таблицу, производя все вычисления в тыс. рублей:

Год	Сумма на счете до начисления %	Сумма на счете после начисления %	Сумма на счете после снятия
1	1000	$t \cdot 1000$	$t \cdot 1000 - 100$
2	$t \cdot 1000 - 100$	$t(t \cdot 1000 - 100)$	$t(t \cdot 1000 - 100) - 100$
3	$t(t \cdot 1000 - 100) - 100$	$t(t(t \cdot 1000 - 100) - 100)$	$t(t(t \cdot 1000 - 100) - 100) - 100$

Таким образом, необходимо, чтобы

$$\begin{aligned}
&t(t(t \cdot 1000 - 100) - 100) - 100 \geqslant 1000 \Rightarrow \\
&\Rightarrow 1000t^3 - 100t^2 - 100t - 100 \geqslant 1000 \Rightarrow \\
&\Rightarrow 1000(t^3 - 1) - 100(t^2 + t + 1) \geqslant 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow 1000(t - 1)(t^2 + t + 1) - 100(t^2 + t + 1) \geqslant 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow (t^2 + t + 1)(1000t - 1000 - 100) \geqslant 0
\end{aligned}$$

Т.к. процент в банке не может быть отрицательным, т.е. $r \geqslant 0 \Rightarrow t \geqslant 1 \Rightarrow$ выражение $t^2 + t + 1$ всегда положительно. Следовательно, полученное неравенство равносильно

$$1000t - 1000 - 100 \geqslant 0 \Rightarrow t \geqslant 1,1 \Rightarrow r \geqslant 10$$

Значит, наименьший годовой процент в банке должен быть 10%. ■

4 Оптимизация

В ЕГЭ иногда встречаются задачи на оптимизацию — в них изначально дается какое-то количество ресурсов, а вам нужно получить максимальную прибыль, затратить наименьшее количество денег на достижение какого-то результата и т.д.

Составим план для решения задач на оптимизацию:

1. Ввести неизвестные
2. Записать условия связки неизвестных (уравнения или неравенства)
3. Записать функцию для оптимизации
4. Выразить неизвестные, подставить в функцию для оптимизации и получить функцию от одной переменной
5. Найти точку минимума (решить №12 из ЕГЭ)

   NB В таких задачах часто нужно найти минимальное значение функции в целых точках, но не у всех функций точка минимума будет целой. Чтобы найти наименьшее значение функции в целых точках, можно сравнивать значения функции оптимизации в двух ближайших целых точках от точки минимума. Если у функции несколько точек минимума, то придется проверить несколько пар соседних точек.

6. Получить ответ

Решим задачу по этому плану.

Задача про размеры комнаты

В прямоугольной комнате площадью 42 м^2 требуется установить плинтусы по всему периметру. Стоимость 1 метра плинтуса составляет 280 рублей. При каких целых линейных размерах комнаты затраты на покупку плинтуса будут наименьшими?

Ответ

6×7 или 7×6

Решение

1. В условии задачи нас просят узнать размеры комнаты, при которых затраты на покупку плинтуса будут минимальны. Так как цена за метр плинтуса фиксированная, нам нужно найти такие целые размеры комнаты, при которых ее перимерт будет наименьшим. Введем неизвестные.

   Пусть ширина комнаты равна x м, а длина y м.

2. По условию площадь комнаты равна 42 м^2, значит, можем записать условие связки неизвестных:

$$x \cdot y = 42$$

3. Запишем функцию для оптимизации — функцию зависимости периметра комнаты от ее размеров:

$$P(x, y) = 2 \cdot (x + y) = 2 \cdot \left(x + \frac{42}{x}\right)$$

4. Из связки неизвестых можем получить

$$x \cdot y = 42 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{42}{x}$$

   Подставим полученное значение y в $P(x, y)$ и получим $P(x)$:

$$P(x, y) = 2 \cdot (x + y) \quad \Rightarrow \quad P(x) = 2 \cdot \left(x + \frac{42}{x}\right)$$

5. Найдем при каком целом x функция $P(x)$ принимает наименьшее значение. Посчитаем производную $P(x)$:

$$P'(x) = \left(2 \cdot \left(x + \frac{42}{x}\right)\right)' = 2 \cdot \left(1 - \frac{42}{x^2}\right)$$

   Найдем точки экстремума функции $P(x)$:

$$P'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot \left(1 - \frac{42}{x^2}\right) = 0 \underset{x>0}{\Leftrightarrow} x^2 = 42 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{42}$$

   Заметим, что $0 < x < 42$, так как это ширина комнаты с площадью 42 м^2 и целыми сторонами. Значит, нужно определить как ведет себя функция на этом промежутке. При $0 < x < \sqrt{42}$ функция $P(x)$ убывает, а при $\sqrt{42} < x < 42$ — возрастает. Следовательно, наименьшее значение будет достигаться в $x = \sqrt{42}$. Но так как x — целое, а $6 < \sqrt{42} < 7$, нужно проверить точки $x = 6$ и $x = 7$.

$$P(6) = 2 \cdot \left(x + \frac{42}{x}\right) = 2 \cdot (6 + 7) = 26$$

$$P(7) = 2 \cdot \left(x + \frac{42}{x}\right) = 2 \cdot (7 + 6) = 26$$

6. Мы получили, что $P(6) = P(7) = 26$, то есть, наименьшее значение функция $P(x)$ принимает в целых точках $x = 6$ и $x = 7$, значит, размеры комнаты должны быть равны 6×7 или 7×6.