

1. В правильной четырехугольной пирамиде  $SABCD$  с вершиной  $S$  все ребра равны 5. На ребрах  $SA$ ,  $AB$ ,  $BC$  взяты точки  $K$ ,  $M$ ,  $N$  соответственно, причем  $KA = AM = NC = 2$ .

- Докажите, что плоскость  $KNM$  перпендикулярна ребру  $SD$ .
- Найдите расстояние от вершины  $D$  до плоскости  $KNM$ .

2. Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , длина диагонали которого равна 3. На луче  $A_1 C$  отмечена точка  $P$  так, что  $A_1 P = 4$ .

- Докажите, что многогранник  $DBPC_1$  — правильный тетраэдр.
- Найдите длину отрезка  $AP$ .

3. Дан прямоугольный параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Через прямую  $BD_1$  параллельно прямой  $AC$  проведена плоскость  $\pi$ , причем сечение параллелепипеда плоскостью  $\pi$  представляет собой ромб.

- Докажите, что  $ABCD$  — квадрат.
- Найдите угол между плоскостью  $\pi$  и плоскостью  $(BCC_1)$ , если  $AD = 4$  и  $AA_1 = 6$ .

4. На ребрах  $AB$  и  $BC$  треугольной пирамиды  $ABCD$  отмечены точки  $M$  и  $N$  соответственно, причем  $AM : MB = CN : NB = 4 : 1$ . Точки  $P$  и  $Q$  — середины ребер  $DA$  и  $DC$  соответственно.

- Докажите, что точки  $P$ ,  $Q$ ,  $M$  и  $N$  лежат в одной плоскости.
- Найдите, в каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды  $ABCD$ .

5. Основанием прямой треугольной призмы  $ABCA_1 B_1 C_1$  является прямоугольный треугольник  $ABC$ , причем  $\angle C = 90^\circ$ . Диагонали боковых граней  $AA_1 B_1 B$  и  $BB_1 C_1 C$  равны соответственно 26 и 10,  $AB = 25$ .

- Докажите, что  $\triangle BA_1 C_1$  — прямоугольный.
- Найдите объем пирамиды  $AA_1 C_1 B$ .

6. Дана четырехугольная пирамида  $PABCD$ , в основании которой лежит трапеция  $ABCD$  с большим основанием  $AD$ . Известно, что сумма углов  $BAD$  и  $CDA$  равна  $90^\circ$ . Грани  $PAB$  и  $PCD$  перпендикулярны плоскости основания.  $K$  — точка пересечения прямых  $AB$  и  $CD$ .

- Докажите, что грани  $PAB$  и  $PCD$  перпендикулярны.
- Найдите объем пирамиды  $PBCK$ , если известно, что  $AB = BC = CD = 2$ , а высота пирамиды  $PABCD$  равна 12.

7. Основанием четырехугольной пирамиды  $SABCD$  является прямоугольник  $ABCD$ , причем  $AB = 3\sqrt{2}$ ,  $BC = 6$ . Основанием высоты пирамиды является центр прямоугольника. Из вершин  $A$  и  $C$  опущены перпендикуляры  $AP$  и  $CQ$  на ребро  $SB$ .

- Докажите, что  $P$  — середина отрезка  $BQ$ .
- Найдите угол между гранями  $SBA$  и  $SBC$ , если  $SD = 9$ .

8. В треугольной пирамиде  $SABC$  боковые ребра  $SA$  и  $SB$  равны. Основанием высоты этой пирамиды является середина медианы  $CM$  треугольника  $ABC$ .

- Докажите, что треугольник  $ABC$  равнобедренный.
- Найдите объем пирамиды  $SABC$ , если  $SA = SB = 17$ ,  $SC = 5\sqrt{10}$ , а высота пирамиды равна 15.

9. Основанием прямой четырехугольной призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  является ромб  $ABCD$ , при этом  $AB = AA_1$ .

- а) Докажите, что прямые  $A_1 C$  и  $BD$  перпендикулярны.
- б) Найдите объем призмы, если  $A_1 C = BD = 2$ .

10. В правильном тетраэдре  $ABCD$  точка  $H$  — центр грани  $ABC$ , а точка  $M$  — середина ребра  $CD$ .

- а) Докажите, что прямые  $AB$  и  $CD$  перпендикулярны.
- б) Найдите угол между прямыми  $DH$  и  $BM$ .

11. В правильном тетраэдре  $ABCD$  точки  $K$  и  $M$  — середины ребер  $AB$  и  $CD$  соответственно. Плоскость  $\alpha$  содержит прямую  $KM$  и параллельна прямой  $AD$ .

- а) Докажите, что сечение тетраэдра плоскостью  $\alpha$  — квадрат.
- б) Найдите площадь сечения тетраэдра  $ABCD$  плоскостью  $\alpha$ , если  $AB = 2\sqrt{3}$ .

12. В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  сторона основания  $AB$  равна 6, а боковое ребро  $SA$  равно 7. На ребрах  $AB$  и  $SC$  отмечены точки  $K$  и  $M$  соответственно, причём  $AK : KB = SM : MC = 1 : 5$ . Плоскость  $\alpha$  содержит прямую  $KM$  и параллельна прямой  $BC$ .

- а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  параллельна прямой  $SA$ .
- б) Найдите угол между плоскостями  $\alpha$  и  $(SBC)$ .

13. В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  сторона основания  $AB$  равна 6, а боковое ребро  $SA$  равно 5. На ребрах  $AB$  и  $SC$  отмечены точки  $K$  и  $M$  соответственно, причём  $AK : KB = SM : MC = 5 : 1$ . Плоскость  $\alpha$  содержит прямую  $KM$  и параллельна  $SA$ .

- а) Докажите, что сечение пирамиды  $SABC$  плоскостью  $\alpha$  — прямоугольник.
- б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка  $A$ , а основанием — сечение пирамиды  $SABC$  плоскостью  $\alpha$ .

14. В правильной треугольной призме  $ABCA_1 B_1 C_1$  сторона основания равна 4, а боковое ребро равно 2. Точка  $M$  — середина ребра  $A_1 C_1$ , а точка  $O$  — точка пересечения диагоналей боковой грани  $ABB_1 A_1$ .

- а) Докажите, что точка пересечения диагоналей четырёхугольника, являющегося сечением призмы  $ABCA_1 B_1 C_1$  плоскостью  $(AMB)$ , лежит на отрезке  $OC_1$ .
- б) Найдите угол между прямой  $OC_1$  и плоскостью  $(AMB)$ .

## Отвѣты

1. б) 3,5

2. б)  $\sqrt{11}$

3. б)  $\operatorname{arctg} \frac{5}{3}$

4. б) 8 : 17

5. б)  $28\sqrt{51}$

6. б) 4

7. б)  $\arccos \left( -\frac{\sqrt{34}}{68} \right)$

8. б)  $50\sqrt{39}$

9. б)  $\frac{4\sqrt{6}}{5}$

10. б)  $\arccos \frac{\sqrt{2}}{3}$

11. б) 3

12. б)  $\arccos \frac{31\sqrt{10}}{140}$

13. б)  $\frac{25\sqrt{39}}{36}$

14. б)  $\arccos \frac{8\sqrt{91}}{91}$