

Разложение на множители

Часто, если в уравнении встречаются, например, слагаемые $\cos nx$, $\sin mx$ и $\cos nx \cdot \sin mx$, то это уравнение путем разложения на множители приводится к виду $A \cdot B = 0$. Рассмотрим такой способ решения уравнений на примере.

Задача: Решите уравнение

$$2 \cos 2x \sin x - \sqrt{3} \sin x + 2 \cos 2x = \sqrt{3}.$$

Решение: ОДЗ: x — произвольное вещественное число. Решим на ОДЗ.

Перенесем все слагаемые в левую часть и вынесем общие множители за скобки:

$$2 \cos 2x \cdot \sin x - \sqrt{3} \sin x + 2 \cos 2x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow$$

$$2 \cos 2x(\sin x + 1) - \sqrt{3}(\sin x + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\sin x + 1)(2 \cos 2x - \sqrt{3}) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \\ \cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x_2 = \frac{\pi}{12} + \pi m, m \in \mathbb{Z} \\ x_3 = -\frac{\pi}{12} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Задача: Решите уравнение

$$\log_4 x \cdot \log_3(x+2) - \log_2 x + \log_3(x+2) - 2 = 0.$$

Решение: ОДЗ:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0.$$

Решим уравнение на ОДЗ. Заметим, что $\log_2 x = 2 \log_4 x$. Следовательно, уравнение равносильно

$$\log_4 x \cdot \log_3(x+2) - 2 \log_4 x + \log_3(x+2) - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_3(x+2) \cdot (\log_4 x + 1) - 2 \cdot (\log_4 x + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log_3(x+2) - 2)(\log_4 x + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log_3(x+2) = 2 \\ \log_4 x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = 0,25 \end{cases}$$

Оба корня подходят под ОДЗ.

Квадратные уравнения (на примере тригонометрических)

Если после преобразования уравнение приняло следующий вид:

$$af^2(x) + bf(x) + c = 0,$$

где $a \neq 0$, $f(x)$ — одна из функций $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$,

то такое уравнение с помощью замены $f(x) = t$ сводится к квадратному уравнению.

Часто при решении таких уравнений используются основные тождества:

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 & \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha &= 1 \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} & \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \\ 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} & 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha &= \frac{1}{\sin^2 \alpha} \end{aligned}$$

формулы двойного угла:

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha & \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha &= \frac{1}{2} \sin 2\alpha & \cos 2\alpha &= 2 \cos^2 \alpha - 1 \\ & & \cos 2\alpha &= 1 - 2 \sin^2 \alpha \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} & \operatorname{ctg} 2\alpha &= \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha} \end{aligned}$$

Задача: Решите уравнение

$$6 \cos^2 x - 13 \sin x - 13 = 0.$$

Решение: С помощью формулы $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ уравнение сводится к виду:

$$6 \sin^2 x + 13 \sin x + 7 = 0.$$

Сделаем замену $t = \sin x$.

Так как область значений синуса $\sin x \in [-1; 1]$, то $t \in [-1; 1]$.

Получим уравнение:

$$6t^2 + 13t + 7 = 0.$$

Корни данного уравнения $t_1 = -\frac{7}{6}$, $t_2 = -1$.

Таким образом, корень t_1 не подходит. Сделаем обратную замену:

$$\sin x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Кубические уравнения (на примере показательных)

Если после преобразования уравнение приняло следующий вид:

$$af^3(x) + bf^2(x) + cf(x) + d = 0,$$

где $a \neq 0$, $f(x)$ — одна из функций a^x , $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, то такое уравнение с помощью замены $f(x) = t$ сводится к кубическому уравнению.

Часто при решении таких уравнений используются формулы:

$$\begin{aligned} (a^x)^y &= a^{xy} & a^x \cdot a^y &= a^{x+y} & a^x : a^y &= a^{x-y} \\ \log_a x^{2n+1} &= (2n+1) \log_a x & \log_a x^{2n} &= 2n \log_a |x| \\ \log_{a^{2n+1}} x &= \frac{1}{2n+1} \log_a x & \log_{a^{2n}} x &= \frac{1}{2n} \log_{|a|} x \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \sin 3\alpha &= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha & \cos 3\alpha &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \end{aligned}$$

Задача: Решите уравнение

$$8^x - 3 \cdot 4^x - 2^x + 3 = 0.$$

Решение: Сделаем замену $t = 2^x$, $t > 0$. Тогда уравнение примет вид

$$t^3 - 3t^2 - t + 3 = 0 \Leftrightarrow (t-3)(t^2-1) = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1; 3$$

С учетом ограничения на t сделаем обратную замену:

$$\begin{cases} 2^x = 1 \\ 2^x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0; \log_2 3.$$

Задача: Решите уравнение

$$11 \cos 2x - 3 = 3 \sin 3x - 11 \sin x.$$

Решение: При помощи формул $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$ и $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ можно свести уравнение к уравнению только с $\sin x$:

$12 \sin^3 x - 9 \sin x + 11 \sin x - 3 + 11 - 22 \sin^2 x = 0$. Сделаем замену $\sin x = t$, $t \in [-1; 1]$:

$6t^3 - 11t^2 + t + 4 = 0$. Подбором находим, что один из корней равен $t_1 = 1$. Выполнив деление в столбик многочлена $6t^3 - 11t^2 + t + 4$ на $t - 1$, получим:

$(t-1)(2t+1)(3t-4) = 0 \Rightarrow$ корнями являются

$$t_1 = 1, t_2 = -\frac{1}{2}, t_3 = \frac{4}{3}.$$

Таким образом, корень t_3 не подходит. Сделаем обратную замену:

$$\begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Однородные тригонометрические уравнения второй степени

$$I. \quad a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0, \quad a \neq 0, c \neq 0$$

Заметим, что в данном уравнении никогда не являются решениями те значения x , при которых $\cos x = 0$ или $\sin x = 0$. Действительно, если $\cos x = 0$, то, подставив вместо косинуса ноль в уравнение, получим: $a \sin^2 x = 0$, откуда следует, что и $\sin x = 0$. Но это противоречит основному тригонометрическому тождеству, так как оно говорит о том, что если $\cos x = 0$, то $\sin x = \pm 1$.

Аналогично и $\sin x = 0$ не является решением такого уравнения. Значит, данное уравнение можно делить на $\cos^2 x$ или на $\sin^2 x$. Разделим, например, на $\cos^2 x$:

$$a \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + b \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x} + c \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0 \Leftrightarrow atg^2 x + btg x + c = 0$$

Таким образом, данное уравнение при помощи деления на $\cos^2 x$ и замены $t = tg x$ сводится к квадратному уравнению $at^2 + bt + c = 0$, способ решения которого вам известен.

Уравнения вида

$$I'. \quad a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d, \quad a \neq 0, c \neq 0$$

с легкостью сводятся к уравнению вида I с помощью использования основного тригонометрического тождества:

$$d = d \cdot 1 = d \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x)$$

Заметим, что благодаря формуле $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ однородное уравнение второй степени можно записать в виде

$$a \sin^2 x + b \sin 2x + c \cos^2 x = 0$$

Задача: Решите уравнение

$$2 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x = 3 \cos^2 x + 1.$$

Решение: Подставим вместо $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$ и получим:

$\sin^2 x + 3 \sin x \cos x - 4 \cos^2 x = 0$. Разделим данное уравнение на $\cos^2 x$:

$tg^2 x + 3tg x - 4 = 0$ и сделаем замену $t = tg x$, $t \in \mathbb{R}$. Уравнение примет вид:

$t^2 + 3t - 4 = 0$. Корнями являются $t_1 = -4$, $t_2 = 1$. Сделаем обратную замену:

$$\begin{cases} tg x = 1 \\ tg x = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = -\text{arctg} 4 + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Однородные тригонометрические уравнения первой степени

$$II. \quad a \sin x + b \cos x = 0, \quad a \neq 0, b \neq 0$$

Заметим, что в данном уравнении никогда не являются решениями те значения x , при которых $\cos x = 0$ или $\sin x = 0$. Действительно, если $\cos x = 0$, то, подставив вместо косинуса ноль в уравнение, получим: $a \sin x = 0$, откуда следует, что и $\sin x = 0$. Но это противоречит основному тригонометрическому тождеству, так как оно говорит о том, что если $\cos x = 0$, то $\sin x = \pm 1$.

Аналогично и $\sin x = 0$ не является решением такого уравнения.

Значит, данное уравнение можно делить на $\cos x$ или на $\sin x$. Разделим, например, на $\cos x$:

$$a \frac{\sin x}{\cos x} + b \frac{\cos x}{\cos x} = 0, \text{ откуда имеем } atg x + b = 0 \Rightarrow tg x = -\frac{b}{a}$$

Задача: Решите уравнение

$$\sin x + \cos x = 0.$$

Решение: Разделим правую и левую части уравнения на $\sin x$:

$$1 + ctg x = 0 \Rightarrow ctg x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Неоднородные тригонометрические уравнения первой степени

$$II. \quad a \sin x + b \cos x = c, \quad a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$$

Существует несколько способов решения подобных уравнений. Рассмотрим те из них, которые можно использовать для любого такого уравнения:

1 СПОСОБ: при помощи формул двойного угла для синуса и косинуса и основного тригонометрического тождества:

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2},$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2},$$

$$c = c \cdot \left(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} \right)$$

данное уравнение сведется к уравнению I .

Задача: Решите уравнение

$$\sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = -1.$$

Решение: Распишем $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, $-1 = -\sin^2 x - \cos^2 x$. Тогда уравнение примет вид:

$(1 + \sqrt{3}) \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + (1 - \sqrt{3}) \cos^2 x = 0$. Данное уравнение с помощью деления на $\cos^2 x$ и замены $tg x = t$ сводится к:

$(1 + \sqrt{3})t^2 + 2t + 1 - \sqrt{3} = 0$. Корнями этого уравнения являются

$$t_1 = -1, \quad t_2 = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = 2 - \sqrt{3}.$$

Сделаем обратную замену:

$$\begin{cases} tg x = -1 \\ tg x = 2 - \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + \pi n \\ x = \text{arctg}(2 - \sqrt{3}) + \pi n \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}$$

2 СПОСОБ: при помощи формул выражения функций через тангенс половинного угла:

$$\sin \alpha = \frac{2tg \frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \cos \alpha = \frac{1 - tg^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2 \frac{\alpha}{2}}$$

уравнение сведется к квадратному уравнению относительно $tg \frac{x}{2}$.

Задача: Решите то же уравнение $\sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = -1$.

Решение: Сделаем подстановку

$$\sin 2x = \frac{2tg x}{1 + tg^2 x}, \quad \cos 2x = \frac{1 - tg^2 x}{1 + tg^2 x} \text{ и замену } tg x = t:$$

$$\frac{(\sqrt{3} + 1)t^2 + 2t + 1 - \sqrt{3}}{1 + t^2} = 0 \Rightarrow (\sqrt{3} + 1)t^2 + 2t + 1 - \sqrt{3} = 0$$

(так как $1 + t^2 \geq 1$ при всех t , то есть всегда $\neq 0$)

Таким образом, мы получили то же уравнение, что в первом способе.

3 СПОСОБ: при помощи формулы вспомогательного угла.

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \phi), \quad \text{где } \cos \phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Для использования данной формулы нам понадобятся формулы сложения углов:

$$\begin{cases} \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \sin \beta \cdot \cos \alpha \\ \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta \end{cases}$$

Задача: Решите то же уравнение $\sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = -1$

Решение: Так как мы решаем уравнение, то можно не преобразовывать левую часть, а просто разделить обе части

уравнения на $\sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$:

$$\frac{1}{2} \sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x = -\frac{1}{2}$$

Заметим, что числа $\frac{1}{2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}$ получились табличные. Можно,

например, взять $\frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3}$. Тогда уравнение примет вид:

$$\sin 2x \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} \cos 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2}$$

Решениями данного уравнения являются:

$$\begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ 2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \pi n \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi n \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}$$