План решения №12 из ЕГЭ

1. Взять производную функции, то есть найти $f'(x)$.
2. Найти все точки, в которых производная равна нулю либо не существует.
3. Найти знаки производной на промежутках между точками из предыдущего пункта с помощью метода интервалов.
4. Нарисовать эскиз графика исходной функции (изобразить, на каком промежутке функция возрастает, а на каком убывает) и с его помощью найти точку или значение, которые требуются в задаче.

Пример решения задачи в соответствии с планом

Найдите наибольшее значение функции $y = e^{x-2}\cdot\dfrac{x-4}{x}$ на отрезке $[1;4]$.

Решение

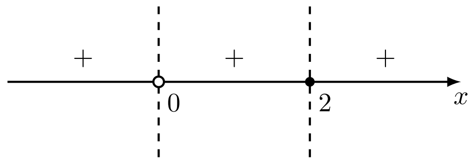
Обозначим $f(x) = e^{x-2}\cdot\dfrac{x-4}{x}$.

1. Найдем производную функции:

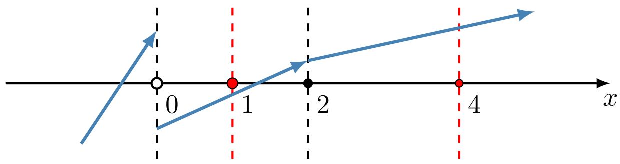
$$f'(x) = \left(e^{x-2}\right)'\cdot\frac{x-4}{x} + e^{x-2}\cdot\left(\frac{x-4}{x}\right)' = e^{x-2}\cdot\frac{x-4}{x} + e^{x-2}\cdot\frac{(x-4)'x-(x-4)x'}{x^2} = e^{x-2}\cdot\frac{(x-2)^2}{x^2}.$$

2. Легко видеть, что первый множитель определен и не равен нулю при любом $x\in\mathbb{R}$. Второй множитель зануляется при $x=2$ и не определен при $x=0$.

3. Применим метод интервалов для определения знаков производной. Обе критические точки встречаются в четном числе множителей, следовательно, знак в них меняться не будет.



4. Теперь можем нарисовать эскиз графика. На всех промежутках производная положительна, то есть исходная функция будет возрастать (не забываем, что в точке 0 будет разрыв, в ней функция не определена). Выделим на эскизе интересующий нас отрезок $[1;4]$.



На полученном эскизе отлично видно, что на всем отрезке $[1;4]$ исходная функция f определена и возрастает, следовательно, максимальное значение на отрезке достигается в самой правой его точке $x=4$. Чтобы решить задачу, осталось найти значение f в точке $x=4$:

$$f(4) = e^{4-2}\cdot\frac{4-4}{4} = 0.$$

Таблица производных

	Функция y	Производная y'
1	a	0
2	x^a	$a \cdot x^{a-1}$
3	e^x	e^x
4	$a^x \ (a > 0)$	$a^x \cdot \ln a$
5	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
6	$\log_a x \ (a > 0, a \neq 1)$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$
7	$\sin x$	$\cos x$
8	$\cos x$	$-\sin x$
9	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
10	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
11	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
14	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
Частные случаи функции:		
15	x	1
16	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
17	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Правила поиска производной функции

Функция	Производная
$a \cdot f(x)$	$a \cdot f'(x)$
$f(x) \pm g(x)$	$f'(x) \pm g'(x)$
$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$