

Теория по производной для №12 из ЕГЭ от «Школково»

Содержание

1	Таблица производных и правила дифференцирования	2
1.1	Таблица производных элементарных функций	2
1.2	Правила дифференцирования	2
2	Поиск точек экстремума функции	4
2.1	Точки экстремума функции	4
2.2	План решения задач	4
3	Поиск наибольшего/наименьшего значения функции	7
3.1	План решения задач	7

1 Таблица производных и правила дифференцирования

1.1 Таблица производных элементарных функций

	Функция y	Производная y'		Функция y	Производная y'
1	$a \ (a \in \mathbb{R})$	0	10	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
2	$x^a \ (a \in \mathbb{R})$	$a \cdot x^{a-1}$	11	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3	e^x	e^x	12	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
4	$a^x \ (a > 0)$	$a^x \cdot \ln a$	13	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
5	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	14	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
6	$\log_a x \ (a > 0, a \neq 1)$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$	Важные частные случаи		
7	$\sin x$	$\cos x$	15	x	1
8	$\cos x$	$-\sin x$	16	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
9	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	17	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

1.2 Правила дифференцирования

Функция	Производная
$a \cdot f(x) \ (a \in \mathbb{R})$	$a \cdot f'(x)$
$f(x) \pm g(x)$	$f'(x) \pm g'(x)$
$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$

1. Производная функции $a \cdot f(x)$, где a — число, равна $a \cdot f'(x)$.

Например,

$$(2 \cos x)' = 2 \cdot (\cos x)' = 2 \cdot (-\sin x) = -2 \sin x.$$

$$\left(-\frac{x^3}{3}\right)' = -\frac{1}{3} \cdot (x^3)' = -\frac{1}{3} \cdot 3x^2 = -x^2.$$

2. Производная суммы функций равна сумме производных этих функций.

Например,

$$(\sqrt{x} - 3x + 1)' = (\sqrt{x})' - (3x)' + 1' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 3 + 0 = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 3.$$

3. Производная произведения функций

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Например,

$$\begin{aligned} ((x^2 - 3) \cdot e^x)' &= (x^2 - 3)' \cdot e^x + (x^2 - 3) \cdot (e^x)' = \\ &= ((x^2)' - 3') \cdot e^x + (x^2 - 3) \cdot e^x = 2x \cdot e^x + (x^2 - 3) \cdot e^x = e^x(x^2 + 2x - 3). \end{aligned}$$

4. Производная частного функций

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Например,

$$\begin{aligned} \left(\frac{x+2}{e^x} \right)' &= \frac{(x+2)' \cdot e^x - (x+2) \cdot (e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{1 \cdot e^x - (x+2) \cdot e^x}{e^{2x}} = \\ &= \frac{e^x \cdot (1 - (x+2))}{e^{2x}} = -\frac{x+1}{e^x} \end{aligned}$$

5. Сложная функция — это функция вида $f(g(x))$, где $f(y)$ и $g(x)$ — функции.

Производная сложной функции

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Например,

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{-x^2 + 2 - 6x} \right)' &= \frac{1}{2\sqrt{-x^2 + 2 - 6x}} \cdot (-x^2 + 2 - 6x)' = \\ &= \frac{-(x^2)' + 2' - (6x)'}{2\sqrt{-x^2 + 2 - 6x}} = \frac{-2x - 6}{2\sqrt{-x^2 + 2 - 6x}} = -\frac{x+3}{\sqrt{-x^2 + 2 - 6x}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\log_7(x^2 + 16x + 100))' &= \frac{1}{(x^2 + 16x + 100) \cdot \ln 7} \cdot (x^2 + 16x + 100)' = \\ &= \frac{(x^2)' + (16x)' + 100'}{(x^2 + 16x + 100) \cdot \ln 7} = \frac{2x + 16}{(x^2 + 16x + 100) \cdot \ln 7}. \end{aligned}$$

2 Поиск точек экстремума функции

2.1 Точки экстремума функции

Вспомним, что:

1. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке X и во всех внутренних точках этого промежутка имеет положительную производную ($f'(x) > 0$), то функция возрастает на промежутке X .
2. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке X и во всех внутренних точках этого промежутка имеет отрицательную производную ($f'(x) < 0$), то функция убывает на промежутке X .

Определение Точка x_0 называется *точкой экстремума* функции $f(x)$, если в некоторой её окрестности, которая не включает в себя саму точку x_0 , выполняется либо неравенство $f(x_0) > f(x)$ (тогда точка называется *точкой максимума*), либо $f(x_0) < f(x)$ (тогда точка называется *точкой минимума*).

Теорема

Если функция имеет экстремум в точке x_0 , то её производная в этой точке либо равна 0, либо не существует.

Определение Точка x_0 , в которой $f'(x_0)$ равна нулю или не существует, называется *критической точкой* функции $f(x)$.

ВАЖНО! Таким образом, все точки экстремума функции являются её критическими точками. Обратное, вообще говоря, неверно. Поэтому для поиска точек экстремума функции необходимо найти все её критические точки и определить какие из них являются точками максимума или минимума.

Рассмотрим условия, при которых критическая точка x_0 является точкой максимума или минимума.

Если в точке x_0 функция определена, непрерывна и меняется с возрастающей на убывающую (то есть производная $f'(x)$ в точке x_0 меняет свой знак с «+» на «-», если смотреть слева направо), то точка x_0 — *точка максимума* функции $f(x)$.

Если в точке x_0 функция определена, непрерывна и меняется с убывающей на возрастающую (то есть производная $f'(x)$ в точке x_0 меняет свой знак с «-» на «+», если смотреть слева направо), то точка x_0 — *точка минимума* функции $f(x)$.

2.2 План решения задач

1. Находим область определения функции.
2. Находим производную функции, то есть $f'(x)$.
3. Находим все критические точки, то есть точки, в которых производная равна нулю или не существует.
4. На координатной оси отмечаем область определения функции и критические точки. С помощью метода интервалов находим знаки производной на получившихся промежутках и отмечаем, на каких из них функция возрастает, а на каких убывает.
5. Если при переходе через точку функция $f(x)$ меняется с возрастающей на убывающую, то эта точка является точкой максимума функции, а если с убывающей на возрастающую, то точкой минимума.

Пример 1

Найдите точку минимума функции $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 7$.

Решение

1. Область определения функции $x \in \mathbb{R}$.

2. Найдем производную:

$$y' = \frac{3x^2}{3} - \frac{2x}{2} = x^2 - x$$

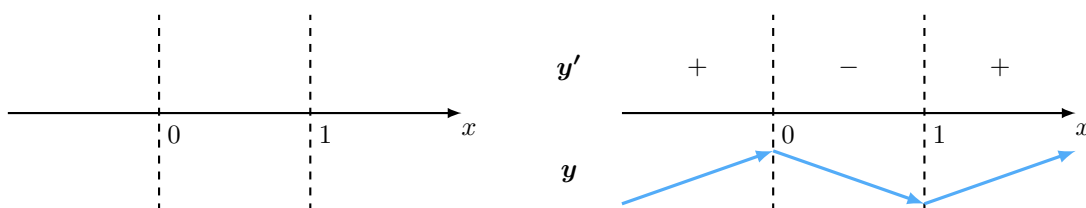
3. Найдём критические точки.

Точки, в которых производная равна нулю:

$$x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Точек, в которых производная не существует, нет.

4. Рисуем координатную ось и отмечаем на ней область определения и критические точки. Затем расставляем знаки производной на трёх получившихся промежутках и отмечаем, на каких из них функция возрастает, а на каких убывает:



5. Видим, что $x = 0$ является точкой максимума, а $x = 1$ — точкой минимума.

Пример 2

Найдите точку максимума функции $y = \ln(x + 5) - 2x + 9$.

Решение

1. Область определения функции $x > -5$.

2. Найдем производную:

$$y' = \frac{1}{x+5} \cdot (x+5)' - 2 = \frac{1}{x+5} - 2$$

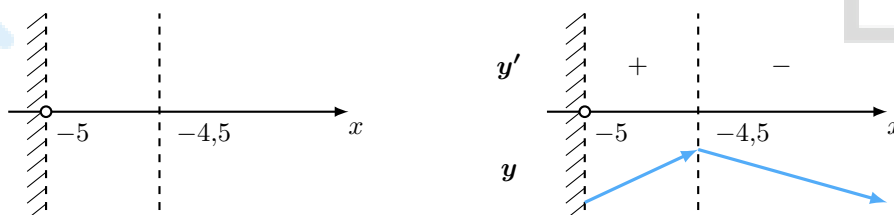
3. Найдём критические точки.

Точки, в которых производная равна нулю:

$$\frac{1}{x+5} - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x+5} = 2 \Leftrightarrow x+5 = 0,5 \Leftrightarrow x = -4,5$$

Производная не существует в точке $x = -5$.

4. Рисуем координатную ось и отмечаем на ней область определения и критические точки. Затем расставляем знаки производной на двух получившихся промежутках и отмечаем, на каких из них функция возрастает, а на каких убывает:



5. Видим, что $x = -4,5$ — это точка максимума.

Пример 3

Найдите точку минимума функции $y = \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{x^2} - x$.

Решение

1. Область определения функции $x \in \mathbb{R}$.

2. Найдём производную:

$$y' = \frac{3}{2} \cdot \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' - (x)' = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} - 1 = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - 1$$

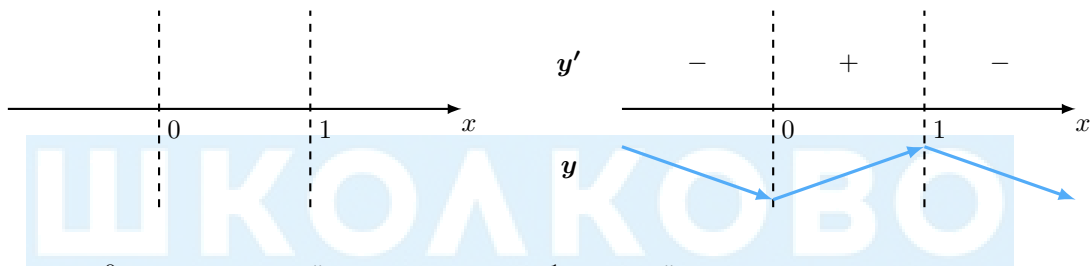
3. Найдём критические точки.

Точки, в которых производная равна нулю:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

Производная не существует в точке $x = 0$.

4. Рисуем координатную ось и отмечаем на ней область определения и критические точки. Затем расставляем знаки производной на трёх получившихся промежутках и отмечаем, на каких из них функция возрастает, а на каких убывает:



5. Видим, что $x = 0$ является точкой минимума, а $x = 1$ — точкой максимума.

Рассмотрим задачи, в которых можно исследовать функцию без помощи производной.

Пример 4

Найдите точку минимума функции $y = \sqrt{x^2 - 6x + 11}$.

Решение

Перепишем функцию в виде

$$y = \sqrt{x^2 - 6x + 11} = \sqrt{(x^2 - 6x + 9) + 2} = \sqrt{(x - 3)^2 + 2}.$$

Найдём область определения функции: $(x - 3)^2 + 2 \geq 0$, откуда получаем $x \in \mathbb{R}$.

Функция y является композицией двух функций: возрастающей при $x \geq 0$ функции $y_1 = \sqrt{x}$ и убывающей при $x \leq 3$ и возрастающей при $x \geq 3$ функции $y_2 = (x - 3)^2 + 2$. Следовательно, исходная функция убывает при $x \leq 3$ как композиция убывающей и возрастающей функций и возрастает при $x \geq 3$ как композиция двух возрастающих функций. Тогда $x = 3$ является точкой минимума.

Пример 5

Найдите точку максимума функции $y = \log_2(3 + 2x - x^2) - 2$.

Решение

Перепишем функцию в виде

$$y = \log_2(3 + 2x - x^2) - 2 = \log_2(-(x^2 - 2x + 1) + 4) - 2 = \log_2(-(x - 1)^2 + 4) - 2.$$

Найдём область определения функции: $-(x - 1)^2 + 4 > 0$, откуда получаем $x \in (-1; 3)$.

Эта функция является композицией двух функций: возрастающей при $x > 0$ функции $y_1 = \log_2 x - 2$ и возрастающей при $x \leq 1$ и убывающей при $x \geq 1$ функции $y_2 = -(x-1)^2 + 4$. Следовательно, исходная функция возрастает при $x \in (-1; 1]$ как композиция двух возрастающих функций и убывает при $x \in [1; 3)$ как композиция убывающей и возрастающей функций. Тогда $x = 1$ является точкой максимума.

3 Поиск наибольшего/наименьшего значения функции

Вспомним, что:

1. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке X и во всех внутренних точках этого промежутка имеет положительную производную ($f'(x) > 0$), то функция возрастает на промежутке X .
2. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке X и во всех внутренних точках этого промежутка имеет отрицательную производную ($f'(x) < 0$), то функция убывает на X .

3.1 План решения задач

1. Находим область определения функции.
2. Берем производную функции, то есть находим $f'(x)$.
3. Находим все критические точки, то есть точки, в которых производная равна нулю или не существует.
4. На координатной оси отмечаем область определения функции, заданный в условиях отрезок и критические точки. С помощью метода интервалов находим знаки производной на получившихся промежутках и отмечаем, на каких из них функция возрастает, а на каких убывает.
5. Находим значение, которое требуется в задаче.

Пример 1

Найдите наибольшее значение функции $y = x^{\frac{3}{2}} - 3x + 1$ на отрезке $[1; 9]$.

Решение

1. Область определения функции $x \geq 0$.
2. Найдем производную:

$$y' = \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} - 3 = \frac{3}{2}\sqrt{x} - 3.$$

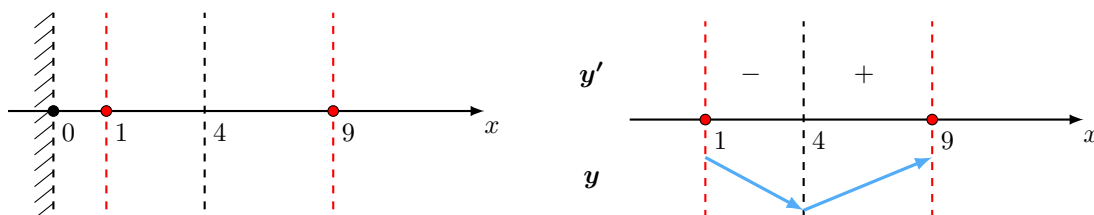
3. Найдем критические точки.

Нули производной:

$$\frac{3}{2}\sqrt{x} - 3 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4.$$

Точек, в которых производная не существует, нет.

4. Отрезок $[1; 9]$ полностью лежит в области определения, поэтому будем исследовать функцию на этом отрезке. Рисуем координатную ось, отмечаем на ней отрезок $[1; 9]$ и критические точки. Затем расставляем знаки производной на двух получившихся промежутках и отмечаем, на каких из них функция возрастает, а на каких убывает:



5. На полученном эскизе видно, что наибольшее значение на отрезке $[1; 9]$ функция принимает или в точке $x = 1$, или в точке $x = 9$.

Чтобы решить задачу, осталось найти значения функции в точках $x = 1$ и $x = 9$:

$$y(1) = 1^{\frac{3}{2}} - 3 \cdot 1 + 1 = 1 - 3 + 1 = -1$$

$$y(9) = 9^{\frac{3}{2}} - 3 \cdot 9 + 1 = (3^2)^{\frac{3}{2}} - 27 + 1 = 3^3 - 27 + 1 = 1$$

Так как $1 > -1$, то наибольшее значение функции на отрезке $[1; 9]$ равно 1.

Пример 2

Найдите наибольшее значение функции $y = (3x^2 - 36x + 36) e^x$ на отрезке $[-1; 4]$.

Решение

1. Область определения функции $x \in \mathbb{R}$.
2. Найдем производную:

$$\begin{aligned} y' &= (3x^2 - 36x + 36)' \cdot e^x + (3x^2 - 36x + 36) \cdot (e^x)' = \\ &= (6x - 36) \cdot e^x + (3x^2 - 36x + 36) \cdot e^x = (3x^2 - 30x) \cdot e^x \end{aligned}$$

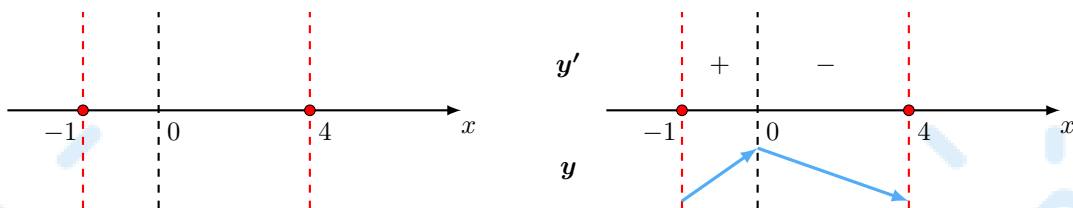
3. Найдем критические точки.

Нули производной:

$$(3x^2 - 30x) \cdot e^x = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 30x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 10 \end{cases}$$

Точек, в которых производная не существует, нет.

4. Отрезок $[-1; 4]$ полностью лежит в области определения, поэтому будем исследовать функцию на этом отрезке. Рисуем координатную ось, отмечаем на ней отрезок $[-1; 4]$, из критических точек на этот отрезок попадает только точка $x = 0$. Затем расставляем знаки производной на двух получившихся промежутках и отмечаем, на каких из них функция возрастает, а на каких убывает:



5. На полученном эскизе видно, что наибольшее значение на отрезке $[-1; 4]$ функция принимает в точке $x = 0$.

Чтобы решить задачу, осталось найти значение функции в точке $x = 0$:

$$y(0) = (3 \cdot 0^2 - 36 \cdot 0 + 36) \cdot e^0 = 36 \cdot 1 = 36.$$

Пример 3

Найдите наибольшее значение функции $y = 12 \cos x + 6\sqrt{3} \cdot x - 2\sqrt{3}\pi + 6$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение

1. Область определения функции $x \in \mathbb{R}$.
2. Найдем производную:

$$y' = -12 \sin x + 6\sqrt{3}$$

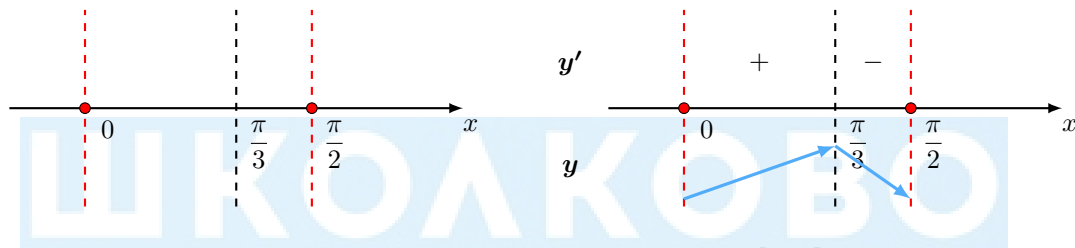
3. Найдем критические точки.

Нули производной:

$$-12 \sin x + 6\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Точек, в которых производная не существует, нет.

4. Отрезок $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ полностью лежит в области определения, поэтому будем исследовать функцию на этом отрезке. Рисуем координатную ось, отмечаем на ней отрезок $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, из критических точек на этот отрезок попадает только точка $x = \frac{\pi}{3}$. Затем расставляем знаки производной на двух получившихся промежутках и отмечаем, на каких из них функция возрастает, а на каких убывает:



5. На полученном эскизе видно, что наибольшее значение на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ функция принимает в точке $x = \frac{\pi}{3}$.

Чтобы решить задачу, осталось найти значение функции в точке $x = \frac{\pi}{3}$:

$$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 12 \cos \frac{\pi}{3} + 6\sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{3} - 2\sqrt{3}\pi + 6 = 6 + 6 = 12.$$

Пример 4

Найдите наибольшее значение функции $y = 3 \operatorname{tg} x - 3x + 5$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$.

Решение

1. Область определения функции: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
2. Найдем производную:

$$y' = \frac{3}{\cos^2 x} - 3 = 3 \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) = 3 \operatorname{tg}^2 x$$

3. Найдем критические точки.

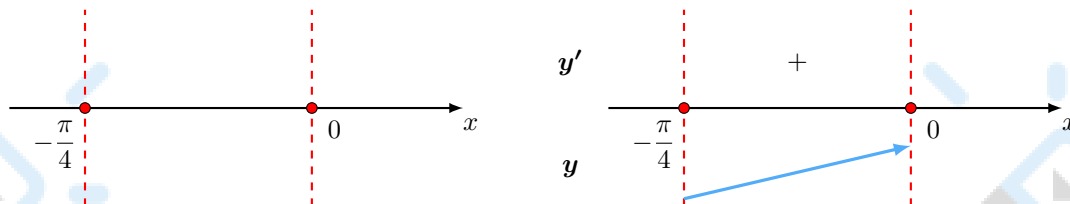
Нули производной:

$$\operatorname{tg}^2 x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow x = \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Производная не существует в точках $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Тогда критические точки можно записать так: $\frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

4. Отрезок $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$ полностью лежит в области определения, поэтому будем исследовать функцию на этом отрезке. Рисуем координатную ось, отмечаем на ней отрезок $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$, из критических точек на этот отрезок попадает только точка $x = 0$. Получился один промежуток, находим на нем знак производной и отмечаем, возрастает или убывает функция.



5. Так как функция возрастает на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$, то наибольшее значение функция принимает в точке $x = 0$.

Чтобы решить задачу, осталось найти значение функции в точке $x = 0$:

$$y(0) = 3 \operatorname{tg} 0 - 3 \cdot 0 + 5 = 5.$$

Рассмотрим задачи, в которых можно исследовать функцию без помощи производной.

Пример 5

Найдите наибольшее значение функции $y = \sqrt{5 - 4x - x^2}$.

Решение

Перепишем функцию в виде

$$y = \sqrt{5 - 4x - x^2} = \sqrt{-(x^2 + 4x + 4) + 9} = \sqrt{-(x + 2)^2 + 9}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} -(x + 2)^2 &\leq 0 \\ -(x + 2)^2 + 9 &\leq 9 \\ \sqrt{-(x + 2)^2 + 9} &\leq 3 \end{aligned}$$

Так как равенство достигается при $x = -2$, то наибольшее значение функции равно 3.

Пример 6

Найдите наименьшее значение функции $y = 2^{x^2 + 2x + 5}$.

Решение

Перепишем функцию в виде

$$y = 2^{(x^2 + 2x + 1) + 4} = 2^{(x + 1)^2 + 4}.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} (x + 1)^2 &\geq 0 \\ (x + 1)^2 + 4 &\geq 4 \\ 2^{(x + 1)^2 + 4} &\geq 2^4 \\ 2^{(x + 1)^2 + 4} &\geq 16 \end{aligned}$$

Так как равенство достигается при $x = -1$, то наименьшее значение функции равно 16.