

Теория по графикам от «Школково»

Содержание

1	График прямой	2
2	График параболы	5
3	График модуля	8
4	График корня	11
5	График логарифма	12
6	График показательной функции	15
7	График гиперболы	17
8	Графики синуса и косинуса	20
9	Особые случаи	24

ШКОЛКОВО

1 График прямой

Линейной функцией называется функция вида $y = kx + b$, где k и b — постоянные действительные коэффициенты. Графиком линейной функции является прямая.

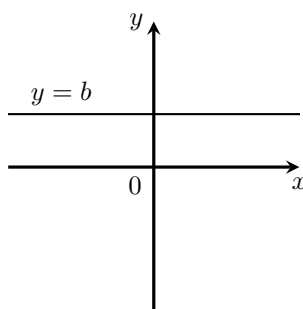
Коэффициент k называется **угловым коэффициентом** прямой.

Число b называется **свободным членом** и равно ординате точки пересечения графика прямой с осью Oy .

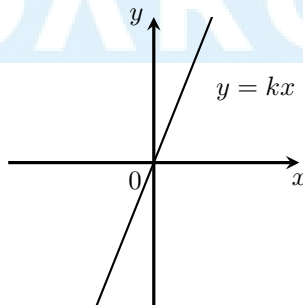
Рассмотрим точки пересечения графика функции с осями в зависимости от значений коэффициентов k и b .

1. При $k = 0$ имеем функцию $y = b$. Графиком этой функции является прямая, параллельная оси абсцисс, но не совпадающая с ней.

Таким образом, множество значений функции состоит из единственного элемента b . Заметим, что при $b = 0$ график функции $y = b$ совпадает с осью Ox .

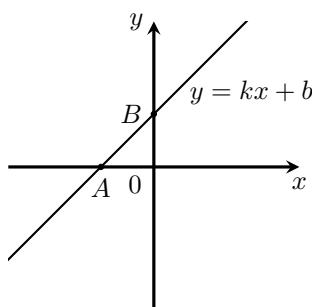


2. При $k \neq 0, b = 0$ имеем функцию $y = kx$. В этом случае график функции — прямая, проходящая через точку начала координат $(0; 0)$. Действительно, $y = k \cdot 0 = 0$.

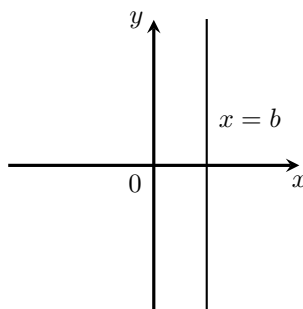


3. При $k \neq 0, b \neq 0$ имеем функцию $y = kx + b$. В таком случае график линейной функции — прямая, пересекающая ось Ox в точке $A(-\frac{b}{k}; 0)$, а ось Oy — в точке $B(0; b)$:

$$\begin{aligned} 0 &= k \cdot x + b && \Leftrightarrow && x = -\frac{b}{k} \\ y &= k \cdot 0 + b && \Rightarrow && y = b \end{aligned}$$



4. В предыдущих пунктах мы описали все прямые, кроме вертикальных. Они задаются уравнением $x = b$. При $b = 0$ график функции $x = b$ совпадает с осью Oy .



Взаимное расположение прямых

Графики прямых $y_1 = k_1x + b_1$ и $y_2 = k_2x + b_2$ **параллельны**, если $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$. При $k_1 = k_2$ и $b_1 = b_2$ графики функций совпадают.

Графики прямых $y_1 = k_1x + b_1$ и $y_2 = k_2x + b_2$ **перпендикулярны**, если $k_1k_2 = -1$.

Как задать прямую по двум точкам

Пусть прямая $y = kx + b$ проходит через точки $A(2; 2)$ и $B(10; 4)$. Подставим значения абсцисс и ординат в уравнение прямой и получим следующую систему:

$$\begin{cases} 2 = 2 \cdot k + b, \\ 4 = 10 \cdot k + b. \end{cases}$$

Вычтем первое уравнение из второго:

$$4 - 2 = 10 \cdot k - 2 \cdot k + b - b = 8 \cdot k$$

$$2 = 8 \cdot k$$

$$k = \frac{2}{8} = 0,25$$

Подставим найденное значение коэффициента k в одно из уравнений:

$$2 = 2 \cdot 0,25 + b$$

$$2 = 0,5 + b$$

$$b = 1,5.$$

Таким образом, уравнение прямой имеет вид $y = 0,25x + 1,5$.

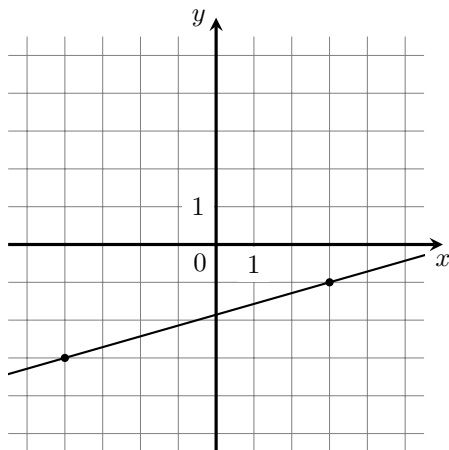
Можно определить коэффициент k другим способом. Коэффициент k отвечает за угол наклона прямой. Он равен тангенсу угла наклона прямой. По условию прямая проходит через точки $(2; 2)$ и $(10; 4)$. Если прямая проходит через точки $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$, то тангенс угла ее наклона равен

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow k = \frac{4 - 2}{10 - 2} = \frac{2}{8} = 0,25$$

Остальные части решения будут совпадать.

Пример 1

На рисунке изображён график функции $f(x) = kx + b$. Найдите $f(-18)$.

**Ответ**

-7

Решение

Найдём уравнение прямой. Коэффициент k определим по формуле

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

где $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ — любые две точки на прямой. На прямой видны точки $(-4; -3)$ и $(3; -1)$, тогда

$$k = \frac{-1 - (-3)}{3 - (-4)} = \frac{2}{7}$$

Таким образом, получим уравнение прямой

$$f(x) = \frac{2}{7}x + b$$

Чтобы найти b , подставим одну из точек в наше уравнение, например, точку $(3; -1)$:

$$-1 = \frac{6}{7} + b \Leftrightarrow b = -1\frac{6}{7}$$

Тогда

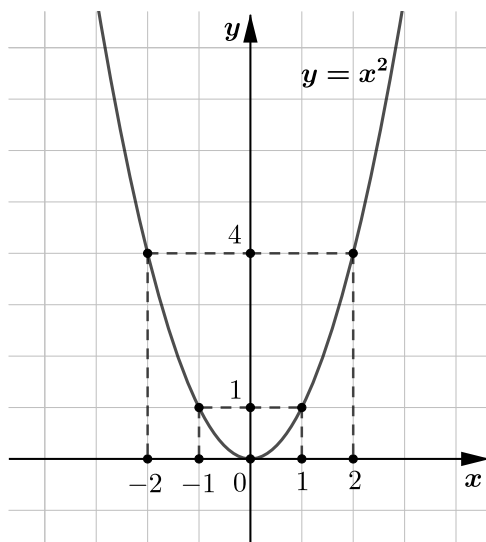
$$f(-18) = \frac{2}{7} \cdot (-18) - 1\frac{6}{7} = \frac{-36 - 13}{7} = -7$$

2 График параболы

Перед решением задач нам нужно получить основные теоретические знания. Поэтому вначале рассмотрим самый простой график параболы $y = x^2$. Его можно построить по точкам:

x	0	1	-1	2	-2
y	0	1	1	4	4

Тогда мы получим такую симметричную картинку:



У графика параболы есть несколько важных понятий:

- 1) Вершина
- 2) Ветки
- 3) Растяжение

В общем виде уравнение параболы выглядит так:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Но в таком виде неудобно работать с параболой, поэтому в задачах мы будем использовать следующий вид:

$$y = a(x - k)^2 + n$$

Рассмотрим коэффициент a . Он отвечает за направление веток и растяжение параболы. Если $a > 0$, то ее ветки направлены вверх, если же $a < 0$, то ветки направлены вниз. Далее мы поймем, как коэффициент a отвечает за растяжение, но для начала узнаем как можно определить координаты вершины параболы.

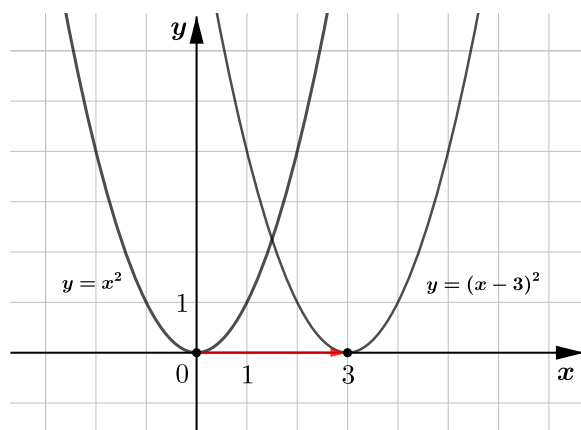
Вершина параболы, заданной уравнением $y = a(x - k)^2 + n$, имеет координаты $(k; n)$. Далее мы докажем этот факт, но сначала рассмотрим несколько примеров.

Пример 1

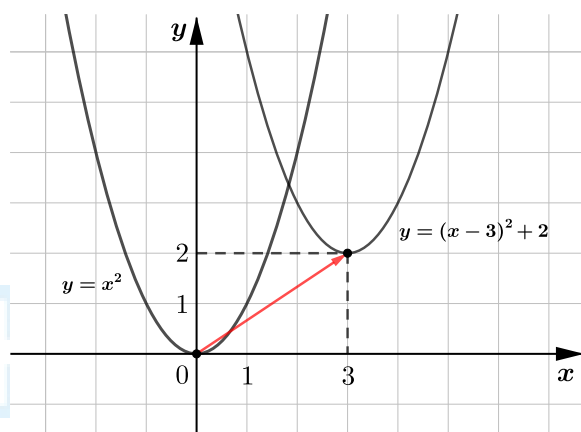
Пусть парабола задана уравнением

$$y = (x - 3)^2 \Leftrightarrow y = (x - 3)^2 + 0$$

В этом уравнении число «-3» отвечает за сдвиг графика по оси Ox на 3 вправо, а число «0» — за сдвиг по оси Oy , то есть по этой оси график никуда не сдвинут. Значит, вершина параболы находится в точке $(3; 0)$.



Если бы парабола была задана уравнением $y = (x - 3)^2 + 2$, то вершина бы сдвинулась еще на 2 вверх по оси Oy , а ее координаты бы были равны $(3; 2)$.



Теперь поймем, почему же вершина параболы действительно сдвинулась в точку $(3; 2)$. Вершина параболы находится в точке ее минимума, если ветки параболы направлены вверх. Если же ветки параболы направлены вниз, то вершина параболы находится в точке ее максимума. Тогда рассмотрим уравнение нашей параболы

$$y = (x - 3)^2 + 2.$$

Ветки такой параболы направлены вверх, так как $1 > 0$. Значит, вершина параболы находится в ее точке минимума.

Заметим, что выражение $(x - 3)^2 \geq 0$, так как это квадрат. Значит,

$$(x - 3)^2 \geq 0 \Rightarrow y = (x - 3)^2 + 2 \geq 2$$

Следовательно, вершина параболы находится в той точке, в которой

$$(x - 3)^2 + 2 = 2 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

Тогда точка $(3; 2)$ действительно является вершиной параболы $y = (x - 3)^2 + 2$, так как $x = 3$ — точка минимума $y = (x - 3)^2 + 2$, а $y = 2$ — минимальное значение параболы.

Значит, чтобы понять, в какой точке находится вершина параболы $y = (x - k)^2 + n$, нужно понять, когда $(x - k)^2 = 0$. Тогда вершиной параболы $y = (x - k)^2 + n$ является точка $(k; n)$.

Мы научились определять координаты вершины параболы и направление веток параболы. Теперь поймем, как коэффициент a влияет на растяжение параболы.

Пример 2

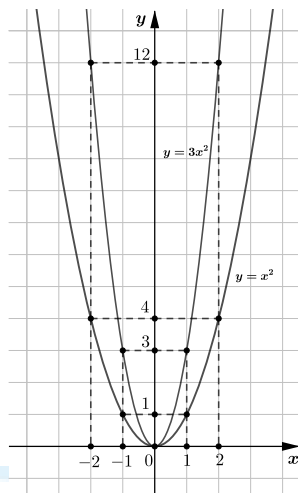
Пусть парабола задана уравнением

$$y = 3x^2$$

Тогда заметим, что мы можем легко получить график этой параболы из графика $y = x^2$:

x	0	1	-1	2	-2
$y = x^2$	0	1	1	4	4
$y = 3x^2$	0	3	3	12	12

Тогда график параболы $y = 3x^2$ будет выглядеть так:

**Пример 3**

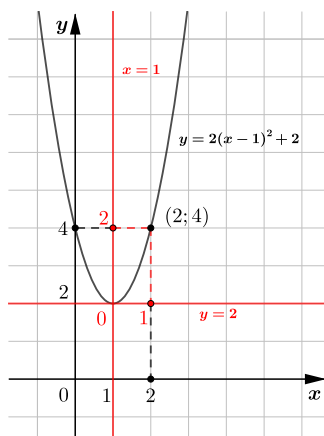
Пусть парабола задана уравнением

$$y = 2(x - 1)^2 + 2$$

Сначала найдем вершину этой параболы. Для этого нам нужно определить когда $2(x - 1)^2 = 0$.

$$2(x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 0 + 2 = 2$$

Тогда вершина параболы $y = 2(x - 1)^2 + 2$ находится в точке $(1; 2)$. Так как $2 > 0$, то ветки параболы будут направлены вверх. Теперь, когда мы нашли вершину параболы, мы можем «создать» для себя новые оси. Новой осью абсцисс будет прямая $y = 2$, а осью ординат — прямая $x = 1$. Тогда в полученной системе координат нам нужно просто построить график параболы $y = 2x^2$. Построим этот график:

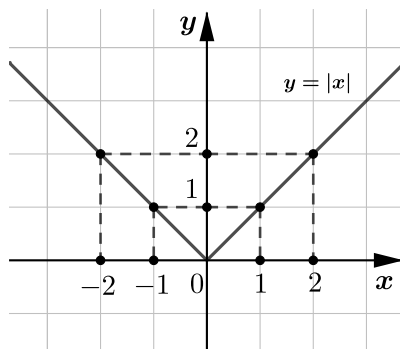


3 График модуля

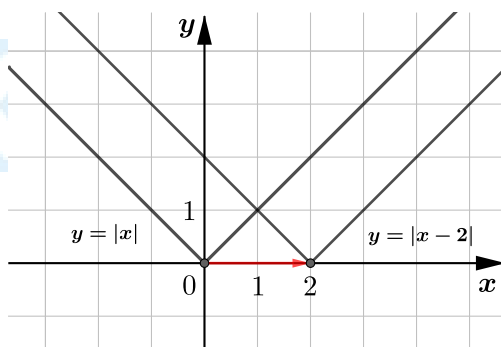
Сейчас рассмотрим график модуля $y = a|x - b| + c$. Рассмотрим график $y = |x|$. Его можно строить по точкам так же, как и график параболы $y = x^2$:

x	0	1	-1	2	-2
y	0	1	1	2	2

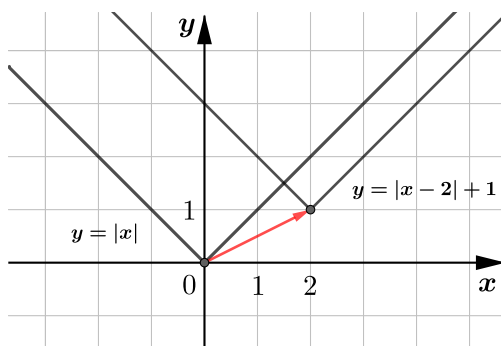
Тогда мы получим такую «галочку» модуля:



Аналогично построению графика параболы, график модуля $y = |x - 2|$ получается с помощью сдвига вершины графика $y = |x|$ на 2 вправо, так как при $x = 2$ выражение $|x - 2|$ принимает свое минимальное значение, которое равно 0.



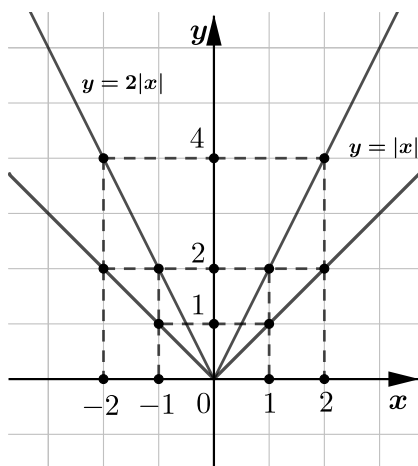
Тогда график модуля $y = |x - 2| + 1$ получается с помощью сдвига вершины графика $y = |x|$ на 2 вправо и на 1 вверх.



Посмотрим, как влияет на растяжение коэффициент a . Для этого рассмотрим график модуля $y = 2|x|$:

x	0	1	-1	2	-2
$y = x $	0	1	1	2	2
$y = 2 x $	0	2	2	4	4

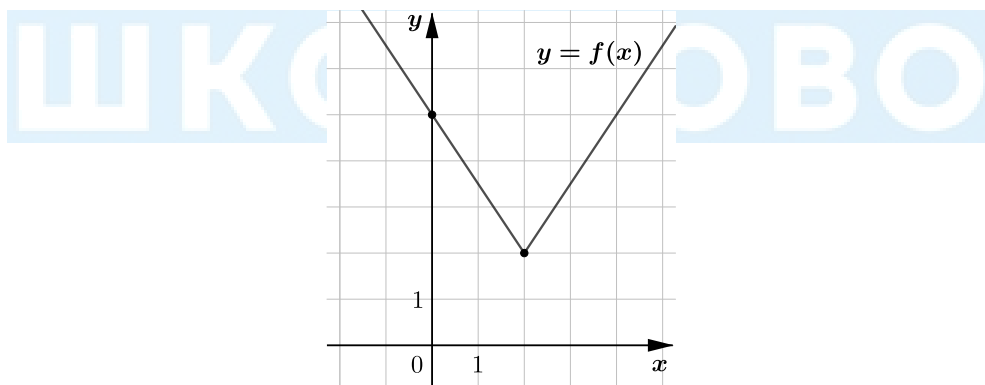
Тогда легко построить график этого модуля:



Аналогично графикам параболы, знак коэффициента a отвечает за направление веток. Значит, по тем же рассуждениям, что и для графика параболы, можно переходить в координаты вершины «уголка» модуля $y = a|x - b| + c$ и строить в них график $y = a|x|$.

Пример 1

На рисунке изображен график функций $f(x) = a|x - b| + c$. Найдите $f(15)$.



Ответ

21,5

Способ 1

На рисунке видно, что вершина «уголка» модуля имеет координаты $(2; 2)$. Также по картинке видно, что ветки направлены вверх, значит, функция имеет вид

$$f(x) = a|x - 2| + 2, \text{ где } a > 0$$

По картинке видно, что в точке $x = 0$ функция равна 5. Для того чтобы попасть в точку $(0; 5)$ из вершины с координатами $(2; 2)$, нам нужно сместиться на 2 влево и на 3 вверх. Тогда понятно, что перед нами график функции $y = \frac{3}{2}|x|$, вершину которого сместили из точки $(0; 0)$ в точку $(2; 2)$. Значит, теперь мы полностью восстановили нашу функцию, она имеет вид

$$f(x) = \frac{3}{2} \cdot |x - 2| + 2 \Rightarrow f(15) = \frac{3}{2} \cdot |15 - 2| + 2 = \frac{39}{2} + 2 = 21,5$$

Способ 2

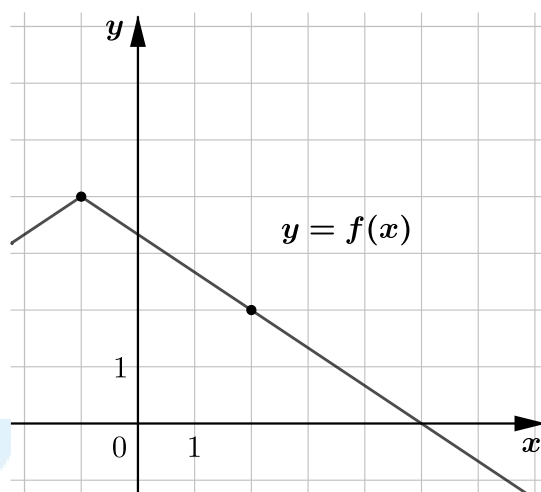
Можно определить коэффициент a другим способом. Коэффициент a отвечает за угол наклона прямых, содержащих ветки графика. Он равен модулю их тангенса угла наклона. Тогда на рисунке видно, что левая ветвь графика проходит через точки $(2; 2)$ и $(0; 5)$. Если прямая проходит через точки $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$, то тангенс угла ее наклона равен

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \Rightarrow a = \left| \frac{2 - 5}{2 - 0} \right| = \frac{3}{2}$$

Остальные части решения будут совпадать.

Пример 2

На рисунке изображен график функций $f(x) = a|x - b| + c$. Найдите $f(-10)$.



Ответ

−2

Решение

На рисунке видно, что вершина «уголка» модуля имеет координаты $(-1; 4)$. Также по картинке видно, что ветки направлены вниз, значит, функция имеет вид

$$f(x) = a|x + 1| + 4, \text{ где } a < 0$$

По картинке видно, что в точке $x = 2$ функция равна 2. Для того чтобы попасть в точку $(2; 2)$ из вершины с координатами $(-1; 4)$, нам нужно сместиться на 3 вправо и на 2 вниз. Тогда понятно, что перед нами график функции $y = -\frac{2}{3}|x|$, вершину которого сместили из точки $(0; 0)$ в точку $(-1; 4)$. Значит, теперь мы полностью восстановили нашу функцию, она имеет вид

$$f(x) = -\frac{2}{3} \cdot |x + 1| + 4 \Rightarrow f(-10) = -\frac{2}{3} \cdot |-10 + 1| + 4 = -\frac{18}{3} + 4 = -2$$

4 График корня

Рассмотрим функцию $y = a\sqrt{x-b} + c$. Аналогично графикам параболы и модуля, коэффициент a отвечает за растяжение и направление ветки графика квадратного корня, а коэффициенты b и c — за расположение его вершины. Значит, построив график квадратного корня $y = \sqrt{x}$ и сдвинув и растянув его, мы можем получить любой график вида $y = a\sqrt{x-b} + c$.

Важно заметить, что функция существует, только если выражение под корнем неотрицательно, то есть

$$x - b \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq b$$

Пример

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = a\sqrt{x-x_0} + y_0$, где числа a , x_0 и y_0 — действительные. Найдите значение $f(3, 25)$.

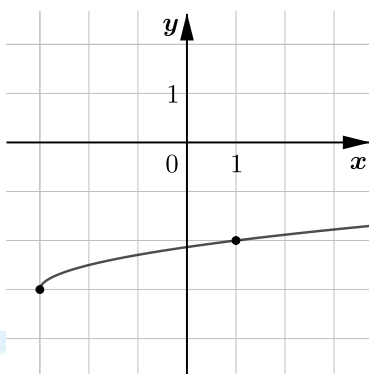


График функции $f(x) = a\sqrt{x-x_0} + y_0$ получается сдвигом графика функции $g(x) = a\sqrt{x}$ на x_0 вдоль оси Ox и на y_0 вдоль оси Oy , следовательно, вершина такого видоизмененного графика корня имеет координаты $(x_0; y_0)$. По картинке несложно видеть, что вершина графика имеет координаты $(-3; -3)$, а ветка направлена вверх. Значит, функция имеет вид

$$f(x) = a\sqrt{x+3} - 3, \text{ где } a > 0$$

Также по картинке видно, что в точке $x = 1$ функция равна -2 . Для того чтобы попасть в точку $(1; -2)$ из вершины с координатами $(-3; -3)$, нам нужно сместиться на 4 вправо и на 1 вверх. Тогда понятно, что перед нами график функции $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$, вершину которого сместили из точки $(0; 0)$ в точку $(-3; -3)$. Значит, теперь мы полностью восстановили нашу функцию, она имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x+3} - 3 \quad \Rightarrow \quad f(3, 25) = \frac{1}{2}\sqrt{3, 25+3} - 3 = -1, 75$$

Подытожим все, что мы узнали. Уравнения всех трех типов функций, которые были рассмотрены, могут быть восстановлены по одному алгоритму:

- 1) Нахождение коэффициентов b и c по координатам вершины графика. Определение знака коэффициента a по направлению веток.
- 2) Переход в систему координат, связанную с найденной вершиной.
- 3) Сравнение графика нашей функции с графиком «эталонной» функции и нахождение коэффициента a .

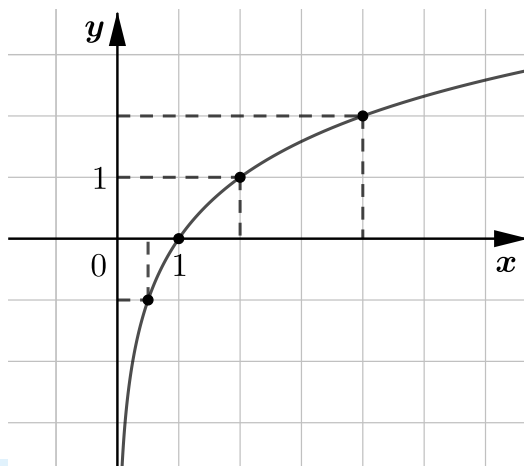
Наша функция	Эталонная функция
$y = a(x-b)^2 + c$	$y = x^2$
$y = a x-b + c$	$y = x $
$y = a\sqrt{x-b} + c$	$y = \sqrt{x}$

5 График логарифма

Рассмотрим график логарифма $y = \log_2 x$. Составим таблицу значений:

x	1	2	4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
y	0	1	2	-1	-2

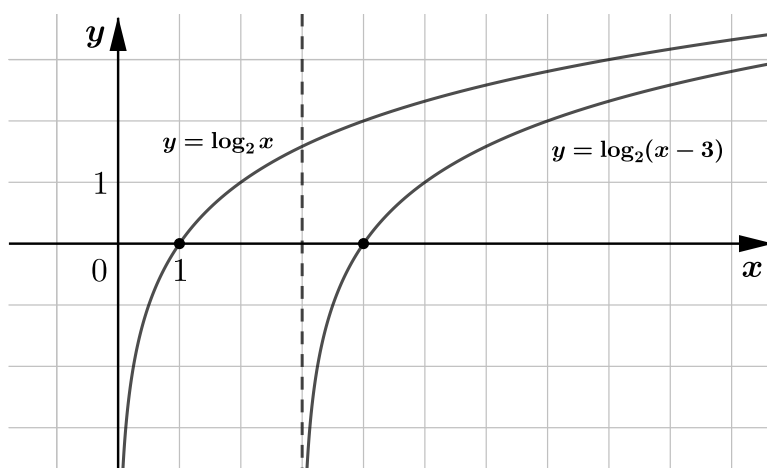
1) У функции логарифма есть ОДЗ — ее аргумент должен быть строго положителен, то есть в нашем случае $x > 0$. Заметим, что при приближении аргумента к 0 значение самой функции будет стремиться к $-\infty$. Значит, у графика функции $y = \log_2 x$ есть вертикальная асимптота $x = 0$, то есть ось Oy . Теперь построим график $y = \log_2 x$:



Теперь рассмотрим функцию $y = \log_2(x - 3)$. По ОДЗ

$$x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$$

Это значит, что аналогично графику параболы, график логарифма $y = \log_2(x - 3)$ получается сдвигом графика $y = \log_2 x$ на 3 вправо, так как асимптотой теперь является прямая $x = 3$.

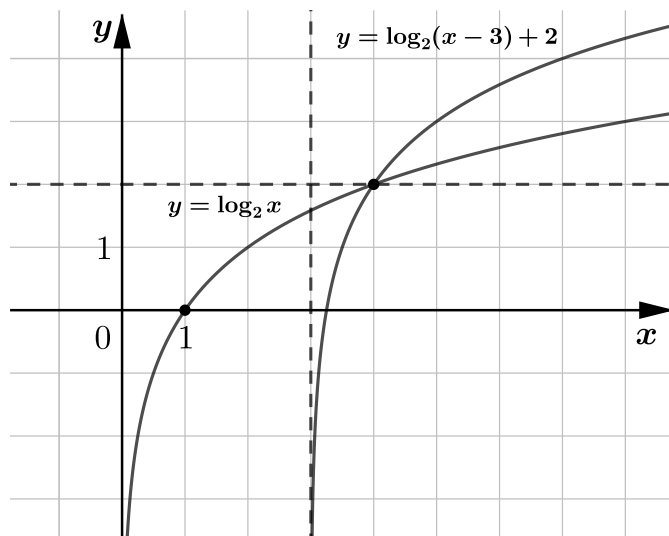


2) Если у нас есть функция $y = \log_a x$, то она возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$.

3) Любой график логарифма пересекается с осью Ox . Рассмотрим точку этого пересечения. Она примечательна тем, что в ней значение функции равно 0.

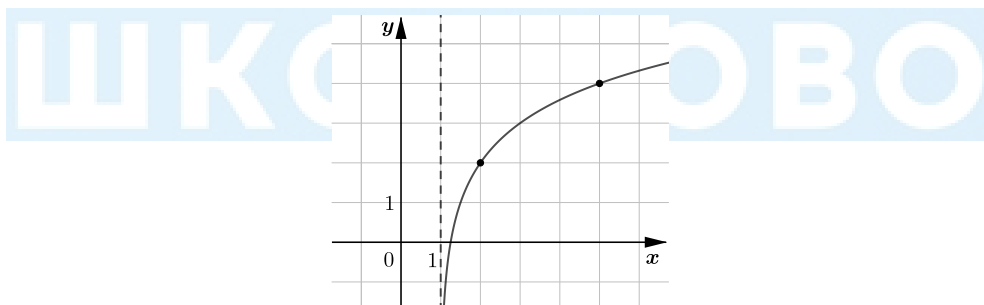
Мы уже поняли как график, а следовательно и его точка пересечения с осью Ox , сдвигается по вертикали. Теперь рассмотрим функцию $y = \log_2(x - 3) + 2$. В точке $x = 4$, где предыдущая функция принимала значение

0, рассматриваемая функция принимает значение 2. Значит, график функции $y = \log_2(x - 3) + 2$ в стандартных координатах будет выглядеть так же, как и график функции $y = \log_2 x$ в координатах, образованных прямыми $x = 3$ и $y = 2$. Теперь можем построить график логарифма $y = \log_2(x - 3) + 2$:



Пример 1

На рисунке изображен график функции $f(x) = \log_a(x - b) + c$. Найдите $f(9)$.



Ответ

5

Решение

Заметим, что данный нам график «прижимается» к прямой $x = 1$, которая выделена на картинке как асимптота, тогда $b = 1$. Теперь определим c . Поймем, как выглядел бы график функции $y = \log_a(x - 1)$. В точке $x = 2$ значение функции обнулялось бы, значит, график проходил бы через точку $(2; 0)$. Рассматриваемый график проходит через точку $(2; 2)$, следовательно, $c = 2$. Тогда уравнение нашей функции теперь выглядит так:

$$f(x) = \log_a(x - 1) + 2$$

По картинке видно, что график рассматриваемой функции проходит через точку $(5; 4)$, значит, ее координаты обращают уравнение функции в верное равенство, то есть

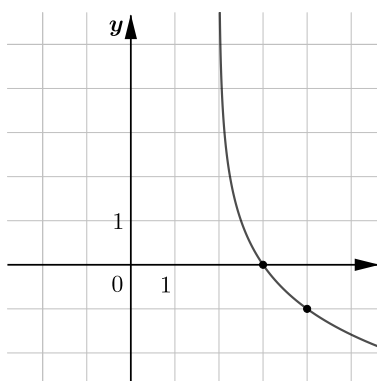
$$f(5) = 4 \Leftrightarrow \log_a(5 - 1) + 2 = 4 \Leftrightarrow \log_a 4 = 2 \Leftrightarrow a = 2$$

Значит, теперь мы полностью восстановили нашу функцию, она имеет вид $f(x) = \log_2(x - 1) + 2$, тогда

$$f(9) = \log_2(9 - 1) + 2 = 3 + 2 = 5$$

Пример 2

На рисунке изображен график функции $f(x) = \log_a(x + b)$. Найдите значение x , при котором $f(x) = -5$.

**Ответ**

34

Решение

На картинке видно, что прямая $x = 2$ должна быть асимптотой графика заданной функции, но явно в условии задачи это не выделено. Найдём коэффициент b , подставив в уравнение функции точку $(3; 0)$, через которую проходит график. Тогда

$$f(3) = 0 \Leftrightarrow \log_a(3 + b) = 0 \Leftrightarrow 3 + b = 1 \Leftrightarrow b = -2$$

Теперь найдём основание a , подставив в уравнение функции точку $(4; -1)$, через которую проходит график. Тогда

$$f(4) = -1 \Leftrightarrow \log_a(4 - 2) = -1 \Leftrightarrow 2 = a^{-1} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

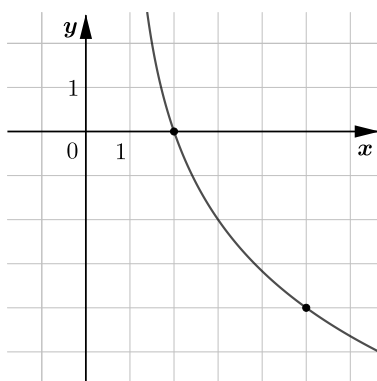
Значит, теперь мы полностью восстановили нашу функцию, она имеет вид $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x - 2)$, тогда

$$f(x) = -5 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x - 2) = -5 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = x - 2 \Leftrightarrow 32 = x - 2 \Leftrightarrow x = 34$$

Если перед самым логарифмом будет стоять какой-то коэффициент, то алгоритм нахождения асимптоты не изменится, так как домножение функции на число никак не повлияет на ОДЗ. Такой коэффициент может повлиять только на растяжение графика и его направление. Рассмотрим это на примере.

Пример 3

На рисунке изображен график функции $f(x) = -2\log_a(x - b)$. Найдите значения a и b .



Решение

Найдем коэффициент b , подставив в уравнение функции точку $(2; 0)$, через которую проходит график. Тогда

$$f(2) = 0 \Leftrightarrow -2\log_a(2 - b) = 0 \Leftrightarrow 2 - b = 1 \Leftrightarrow b = 1$$

Теперь найдем основание a , подставив в уравнение точку $(5; -4)$, через которую проходит график. Тогда

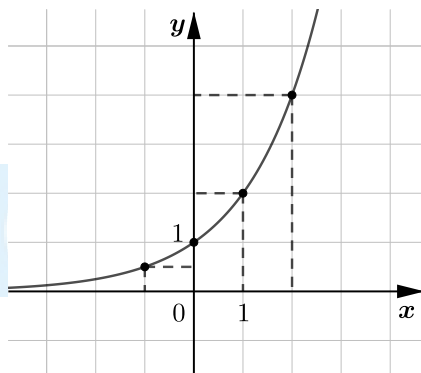
$$f(5) = -4 \Leftrightarrow -2\log_a(5 - 1) = -4 \Leftrightarrow \log_a 4 = 2 \Leftrightarrow a = 2$$

Значит, теперь мы полностью восстановили нашу функцию, она имеет вид $f(x) = -2\log_2(x - 1)$.

6 График показательной функции

Рассмотрим функцию $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$. При $a > 1$ эта функция возрастает, при $0 < a < 1$ — убывает. Составим табличку значения для функции $y = 2^x$ и построим по ней график:

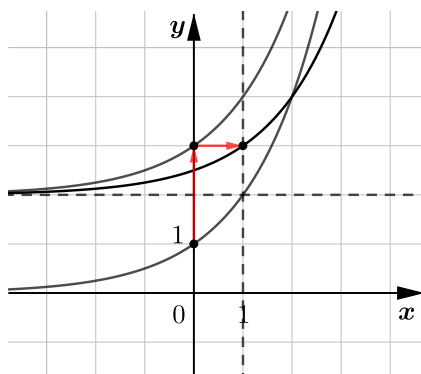
x	1	2	-1	-2	0
y	2	4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1



Заметим, что при любом положительном значении a график функции $y = a^x$ будет проходить через точку $(0; 1)$. Также заметим, что $2^x > 0$. Тогда при больших по модулю отрицательных значениях x значение функции будет стремиться к 0, а график — «прижиматься» к прямой $y = 0$.

Если мы рассмотрим функцию $y = 2^x + 2$, то при больших по модулю отрицательных значениях x график будет «прижиматься» к прямой $y = 2$, так как $2^x + 2 > 2$. Значит, свободный член отвечает за сдвиг по оси Oy .

Теперь рассмотрим функцию $y = 2^{(x-1)} + 2$. График такой функции в стандартных координатах будет соответствовать графику функции $y = 2^x$ в координатах, где осями являются прямые $y = 2$ и $x = 1$. Поймем, почему так происходит. Будем следить за точкой $(0; 1)$.



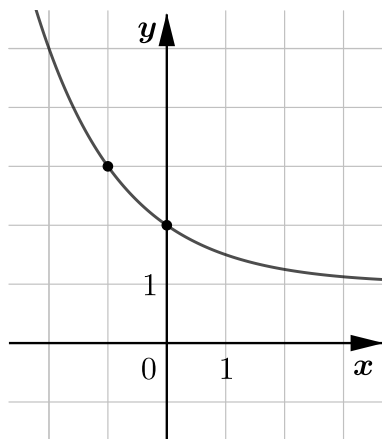
После сдвига на 2 вверх она перешла в точку $(0; 3)$. Теперь найдем такой x , при котором функция $y = 2^{(x-1)} + 2$ принимает значение 3:

$$2^{(x-1)} + 2 = 3 \Leftrightarrow 2^{(x-1)} = 1 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Значит, график действительно сдвинулся еще и на 1 вправо.

Пример 1

На рисунке изображен график функции $f(x) = a^x + b$. Найдите, при каком значении x значение функции равно 33.



Ответ

−5

Решение

Найдем коэффициент b , подставив в уравнение функции точку $(0; 2)$, через которую проходит график. Тогда

$$f(0) = 2 \Leftrightarrow a^0 + b = 2 \Leftrightarrow 1 + b = 2 \Leftrightarrow b = 1$$

Теперь найдем основание a , подставив в уравнение функции точку $(-1; 3)$, через которую проходит график. Тогда

$$f(-1) = 3 \Leftrightarrow a^{-1} + 1 = 3 \Leftrightarrow a^{-1} = 2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

Значит, теперь мы полностью восстановили нашу функцию, она имеет вид $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$, тогда

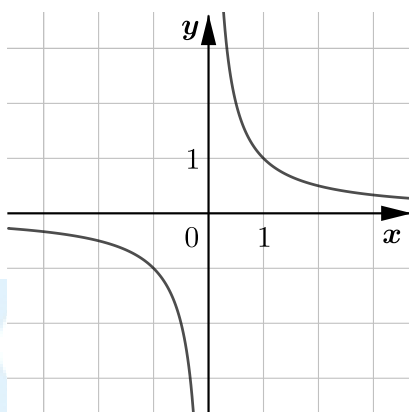
$$f(x) = 33 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1 = 33 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = 32 \Leftrightarrow x = -5$$

7 График гиперболы

Рассмотрим функцию $y = \frac{1}{x}$. У такой функции есть ОДЗ $x \neq 0$. Также заметим, что

- Если x положителен и стремится к 0, то значение функции стремится к $+\infty$, а график прижимается к оси Oy справа.
- Если x отрицателен и стремится к 0, то значение функции стремится к $-\infty$, а график прижимается к оси Oy слева.
- Если x положителен и стремится к $+\infty$, то значение функции стремится к 0, а график прижимается к оси Ox сверху.
- Если x отрицателен и стремится к $-\infty$, то значение функции стремится к 0, а график прижимается к оси Ox снизу.

Значит, прямые $x = 0$ и $y = 0$ являются асимптотами. Тогда график функции $y = \frac{1}{x}$ выглядит так:

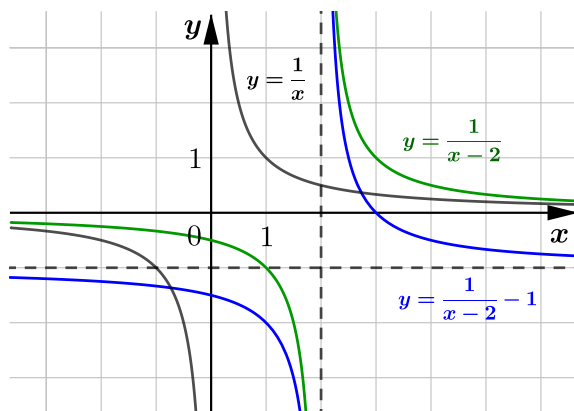


Теперь поймем, как можно двигать график гиперболы. Рассмотрим функцию $y = \frac{1}{x-2}$. Достаточно понять, что по ОДЗ

$$x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$$

Тогда если асимптотой функции $y = \frac{1}{x}$ являлась прямая $x = 0$, то асимптотой функции $y = \frac{1}{x-2}$ является прямая $x = 2$. Значит, весь график сдвинулся на 2 вправо.

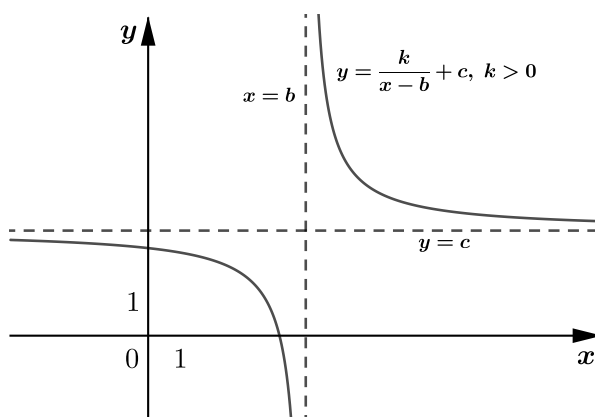
Рассмотрим функцию $y = \frac{1}{x-2} - 1$. Заметим, что дробная часть функции никогда не станет равна 0, тогда функция никогда не примет значения -1 . Значит, $y = -1$ — горизонтальная асимптота, следовательно, весь график сдвинется на 1 вниз. Тогда график функции $y = \frac{1}{x-2} - 1$ получается с помощью сдвига графика функции $y = \frac{1}{x}$ на 2 вправо и 1 вниз.



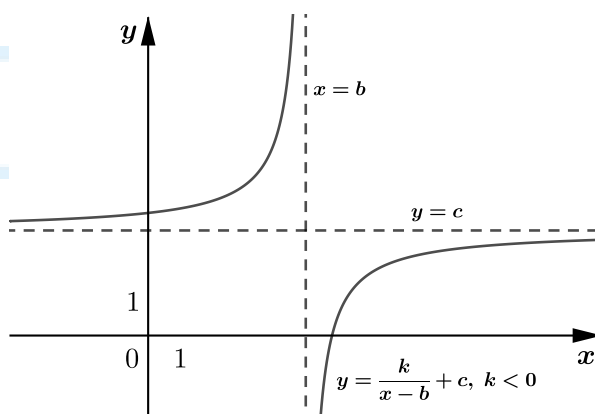
Иногда в задачах появляется такая функция:

$$y = \frac{k}{x-b} + c$$

Если $k > 0$, то график этой гиперболы лежит в *I* и *III* четвертях плоскости с системой координат, образованной асимптотами $x = b$ и $y = c$.

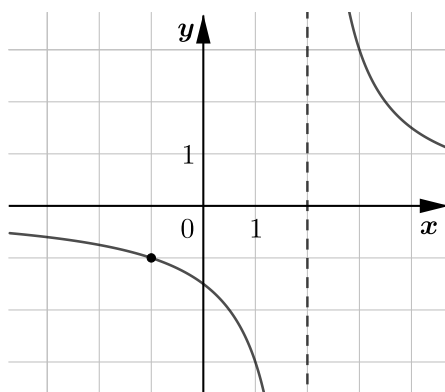


Если $k < 0$, то график этой гиперболы лежит во *II* и *IV* четвертях плоскости с системой координат, образованной асимптотами $x = b$ и $y = c$.



Пример 1

На рисунке изображен график функции $f(x) = \frac{k}{x+a}$. Найдите значение функции $f(x)$ в точке $x = 14$.



Ответ

0,25

Решение

Заметим, что прямая $x = 2$ является вертикальной асимптотой. Тогда $a = -2$. Значит, нам осталось определить коэффициент k .

График $f(x)$ проходит через точку $(-1; -1)$, значит, ее координаты обращают уравнение в верное равенство, тогда

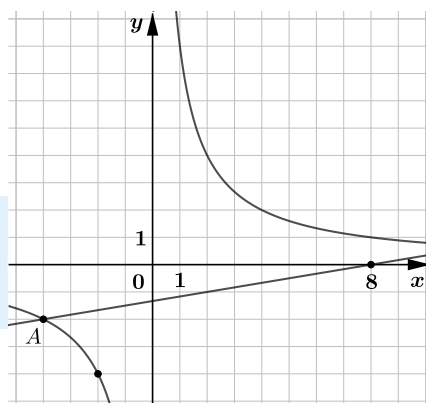
$$f(-1) = -1 \Leftrightarrow \frac{k}{-1-2} = -1 \Leftrightarrow \frac{k}{-3} = -1 \Leftrightarrow k = 3$$

Значит, теперь мы полностью восстановили нашу функцию, она имеет вид $f(x) = \frac{3}{x-2}$, тогда

$$f(14) = \frac{3}{14-2} = \frac{3}{12} = 0,25$$

Пример 2

На рисунке изображены графики функций $f(x) = \frac{k}{x}$ и $g(x) = ax + b$, которые пересекаются в точках $A(-4; -2)$ и $B(x_0; y_0)$. Найдите абсциссу точки B .

**Ответ**

12

Решение

По условию график функции $f(x)$ проходит через точку $A(-4; -2)$, значит, координаты точки A обращают уравнение $f(x) = \frac{k}{x}$ в верное равенство, то есть

$$-2 = \frac{k}{-4} \Leftrightarrow k = (-2) \cdot (-4) \Leftrightarrow k = 8 \Rightarrow f(x) = \frac{8}{x}$$

По условию график функции $g(x)$ проходит через точки $A(-4; -2)$ и $(8; 0)$. Значит, координаты точек A и $(8; 0)$ обращают уравнение $g(x) = ax + b$ в верное равенство, то есть

$$\begin{cases} -2 = -4a + b \\ 0 = 8a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 + 4a \\ b = -8a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8a = -2 + 4a \\ b = -8a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{6} \\ b = -\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow g(x) = \frac{x}{6} - \frac{4}{3}$$

Так как $B(x_0; y_0)$ — вторая точка пересечения графиков функций $f(x)$ и $g(x)$, то

$$f(x_0) = g(x_0) \Leftrightarrow \frac{8}{x_0} = \frac{x_0}{6} - \frac{4}{3} \Leftrightarrow 48 = x_0(x_0 - 8) \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 12 \\ x_0 = -4 \end{cases}$$

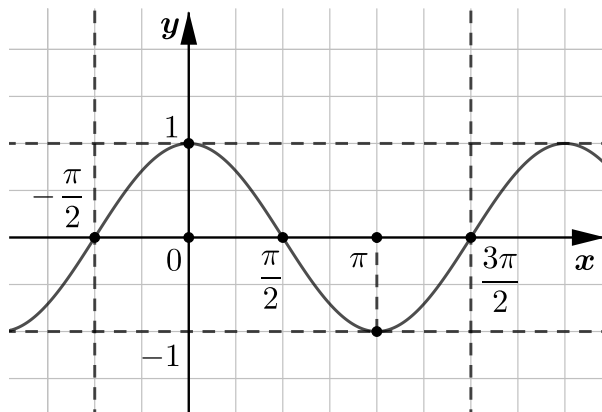
$x = -4$ — абсцисса точки A , значит абсцисса точки B равна $x_0 = 12$.

8 Графики синуса и косинуса

Построим график функции $y = \cos x$. Мы знаем табличные значения косинуса:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	0	-1	0	0

Тогда график $y = \cos x$ будет выглядеть так:



Обратим внимание на то, что косинус, как и синус, периодичен с периодом 2π .

Важно заметить, что функции косинуса и синуса ограничены, то есть

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

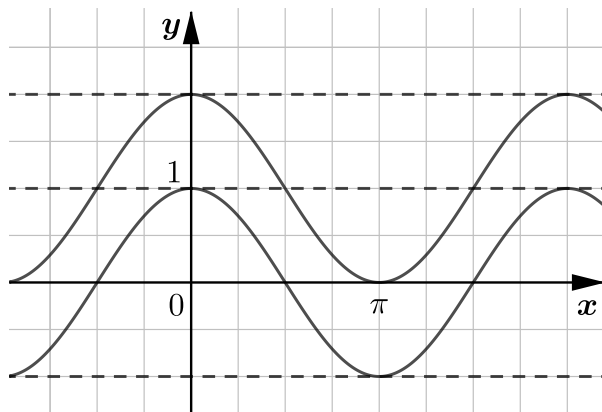
Тогда все точки графиков функций $y = \cos x$ и $y = \sin x$ лежат в «коридоре» между прямыми $y = 1$ и $y = -1$. Тогда величина (или амплитуда) этого коридора равна $1 - (-1) = 2$. При этом ось Ox проходит ровно посередине между этими прямыми.

Начнем двигать график, для этого рассмотрим функцию $y = \cos x + 1$.

Теперь наша ось Ox сдвинулась на 1 вверх, и весь коридор тоже сдвинулся за ней на 1 вверх, так как

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \cos x + 1 \leq 2$$

Тогда величина коридора не изменилась, так как $2 - 0 = 2$, и весь график сдвинулся на 1 вверх.

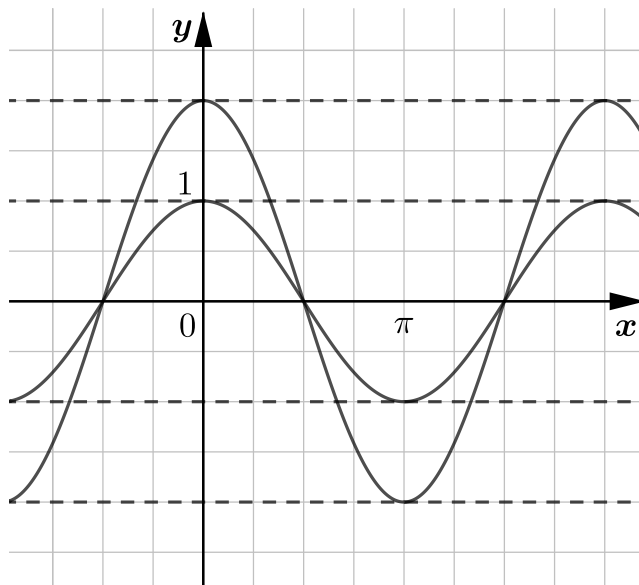


Рассмотрим функцию $y = 2 \cos x$. Поймем, в каком коридоре лежит график этой функции.

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 2 \cos x \leq 2$$

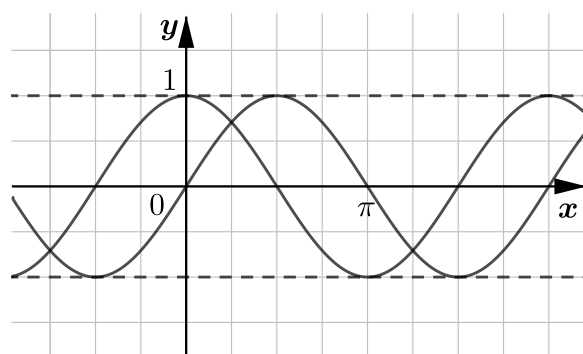
Это значит, что величина коридора изменилась в 2 раза, так как изначально она равнялась 2, а сейчас равна $2 - (-2) = 4$.

Заметим, что в точках, в которых $\cos x = 0$, функция $y = 2 \cos x$ также равна 0. А в точках, где значение $y = \cos x$ было равно ± 1 , функция $y = 2 \cos x$ будет принимать значения ± 2 соответственно. Тогда график функции $y = 2 \cos x$ будет выглядеть так:



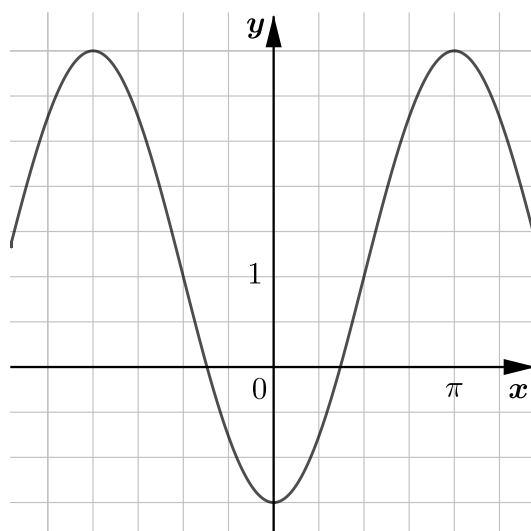
Важно понять, что происходит, когда у функции $y = a \cos x$ коэффициент a меньше 0. На самом деле график просто «перевернется». Если график функции $y = \cos x$ вблизи точки 0 выглядел как «бугорок»: $\cap$, и в точке 0 функция принимала наибольшее значение — верхнюю границу коридора, то у функции $y = -\cos x$ вблизи точки 0 график будет выглядеть как «ямка»: $\cup$, и в точке 0 функция будет принимать наименьшее значение — нижнюю границу коридора.

Возможно такое, что попадется функция вида $y = \cos(x - \frac{\pi}{2})$. Но тогда график функции просто сдвинется на $\frac{\pi}{2}$ вправо, аналогично графикам параболы, логарифма и пр.



Пример 1

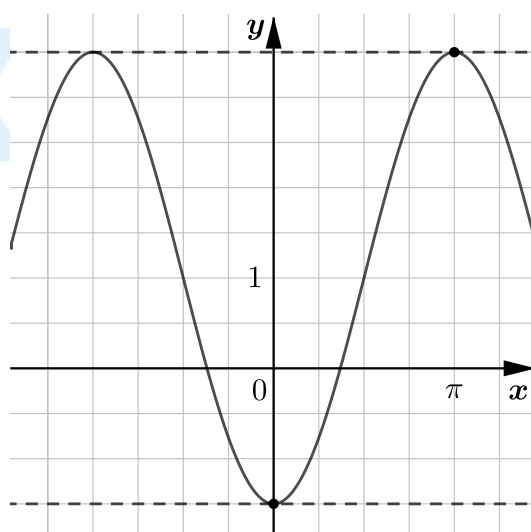
На рисунке изображён график функции $f(x) = a \cdot \cos x + b$. Найдите a .



Ответ

$-2,5$

Способ 1



С самого начала определим знак коэффициента a . Так как нам дана функция вида $f(x) = a \cdot \cos x + b$, а вблизи точки 0 ее график выглядит как $\smile$, мы можем сделать вывод, что $a < 0$.

Теперь определим величину коридора. Наименьшее значение, которое принимает данная нам функция, равно $-1,5$, а наибольшее равно $3,5$. Тогда величина коридора равна $3,5 - (-1,5) = 5$. У классического графика величина коридора равна 2. После домножения функции на коэффициент a величина коридора изменяется в $|a|$ раз, то есть

$$5 = 2|a| \Rightarrow |a| = 2,5 \xrightarrow{a < 0} a = -2,5$$

Найдем b . Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x) = -2,5 \cos x$. Она лежит в коридоре от $-2,5$ до $2,5$. Функция $f(x)$ лежит в коридоре от $-1,5$ до $3,5$. Это значит, что если мы сдвинем коридор $g(x)$ на 1 вверх, то получим коридор функции $f(x)$. Все точки графиков также совпадут, тогда $b = 1$.

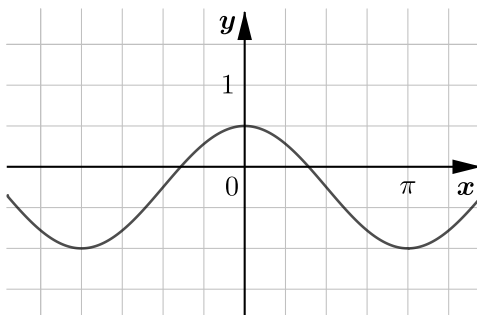
Способ 2

Воспользуемся методом подстановки. График функции $f(x) = a \cdot \cos x + b$ проходит через точки $(0; -1,5)$ и $(\pi; 3,5)$. Тогда мы можем составить систему:

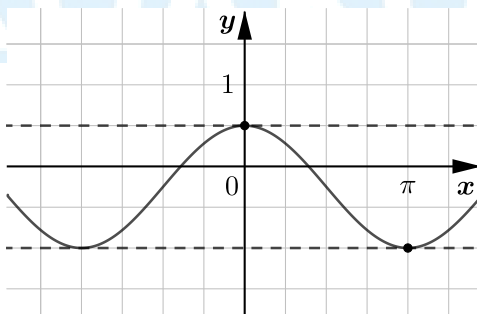
$$\begin{cases} f(0) = -1,5 \\ f(\pi) = 3,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot \cos(0) + b = -1,5 \\ a \cdot \cos(\pi) + b = 3,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -1,5 \\ -a + b = 3,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2,5 \\ b = 1 \end{cases}$$

Пример 2

На рисунке изображён график функции $f(x) = a \cdot \cos x + b$. Найдите b .

**Ответ**

-0,25

Способ 1

С самого начала определим знак коэффициента a . Так как нам дана функция вида $f(x) = a \cdot \cos x + b$, а вблизи точки 0 ее график выглядит как $\frown$, мы можем сделать вывод, что $a > 0$.

Теперь определим величину коридора. Наименьшее значение, которое принимает данная нам функция равно -1 , а наибольшее равно $0,5$. Тогда величина коридора равна $0,5 - (-1) = 1,5$. У классического графика величина коридора равна 2. После домножения функции на коэффициент a величина коридора изменяется в $|a|$ раз, то есть

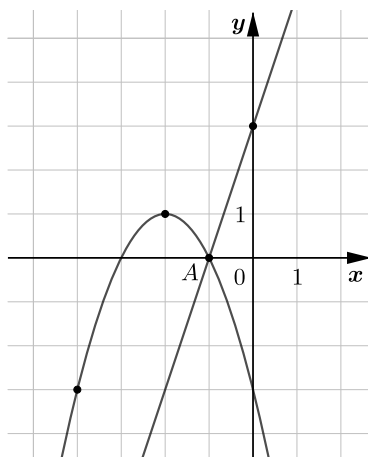
$$1,5 = 2|a| \Rightarrow |a| = \frac{3}{4} \xrightarrow{a>0} a = \frac{3}{4}$$

Найдем b . Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x) = 0,75 \cos x$. Она лежит в коридоре от $-0,75$ до $0,75$. Функция $f(x)$ лежит в коридоре от -1 до $0,5$. Это значит, что если мы сдвинем коридор $g(x)$ на $0,25$ вниз, то получим коридор функции $f(x)$. Все точки графиков также совпадут, тогда $b = -0,25$.

9 Особые случаи

Парабола и прямая

На рисунке изображены графики функций $f(x) = 3x + 3$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках $A(-1; 0)$ и $B(x_0; y_0)$. Найдите y_0 .



Ответ

−15

Решение

Любую параболу вида $g(x) = ax^2 + bx + c$ можно представить в виде

$$g(x) = a(x - x_0)^2 + y_0,$$

где $(x_0; y_0)$ — координаты ее вершины. По картинке несложно видеть, что вершина параболы имеет координаты $(-2; 1)$. Также по картинке видно, что ветки параболы направлены вниз, значит, функция имеет вид

$$g(x) = a(x + 2)^2 + 1, \text{ где } a < 0$$

По картинке видно, что в точке $x = -4$ функция равна -3 . Для того чтобы попасть в точку $(-4; -3)$ из вершины с координатами $(-2; 1)$, нам нужно сместиться на 2 влево и на 4 вниз. Тогда понятно, что перед нами график функции $y = -x^2$, вершину которого сместили из точки $(0; 0)$ в точку $(-2; 1)$. Значит, теперь мы полностью восстановили нашу функцию, она имеет вид $g(x) = -(x + 2)^2 + 1$

Теперь нам нужно решить систему

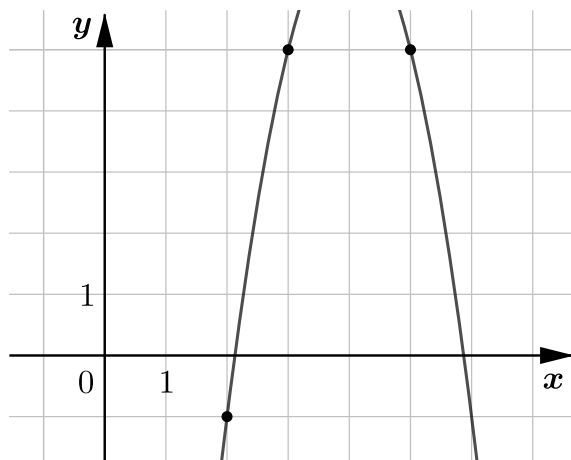
$$\begin{cases} y = 3x + 3 \\ y = -(x + 2)^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow 3x + 3 = -x^2 - 4x - 4 + 1 \Leftrightarrow (x + 1)(x + 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -6 \end{cases}$$

Мы уже знаем, что первая точка пересечения A имеет координаты $(-1; 0)$. Значит, чтобы найти координаты $B(x_0; y_0)$, нам нужно подставить $x_0 = -6$ в уравнение прямой $f(x)$:

$$y_0 = f(x_0) = 3x_0 + 3 = -18 + 3 = -15$$

Сложный случай с параболой

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = ax^2 + bx + c$, где числа a , b и c — действительные. Найдите значение $f(1)$.

**Ответ**

-11

Решение

По графику видно, что в точках 3 и 5 парабола принимает одинаковые значения, следовательно, прямая $x = \frac{3+5}{2} = 4$ — ось симметрии параболы, а также $x = 4$ — абсцисса ее вершины.

Тогда если мы представим $f(x)$ в виде $f(x) = a(x - k)^2 + n$, то $k = 4$. Осталось определить a и n . По рисунку видно, что график функции проходит через точки $(5; 5)$ и $(2; -1)$. Выполним подстановку и решим полученную систему:

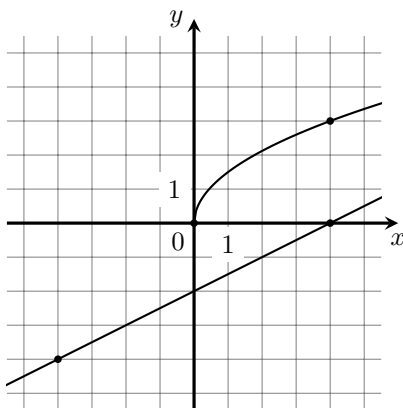
$$\begin{cases} f(5) = 5 \\ f(2) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(5-4)^2 + n = 5 \\ a(2-4)^2 + n = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + n = 5 \\ 4a + n = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ n = 7 \end{cases}$$

Итого, исходная функция $f(x) = -2(x - 4)^2 + 7$. Найдём $f(1)$:

$$f(1) = -2(1 - 4)^2 + 7 = -18 + 7 = -11$$

Прямая и график корня

На рисунке изображены графики функций $f(x) = a\sqrt{x}$ и $g(x) = kx + b$, которые пересекаются в точке A . Найдите абсциссу точки A .



Ответ

16

Решение

По картинке видим, что точка $(4; 3)$ принадлежит графику функции f , следовательно,

$$f(4) = 3 \Leftrightarrow a\sqrt{4} = 3 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

Посмотрим теперь на график функции g . По картинке видим, что ему принадлежат точки $(-4; -4)$ и $(4; 0)$.
Найдем угловой коэффициент:

$$k = \frac{0 - (-4)}{4 - (-4)} = \frac{1}{2}$$

Найдем b , подставив точку $(4; 0)$:

$$g(4) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 4 + b = 0 \Leftrightarrow b = -2 \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}x - 2$$

Найдем абсциссу точки A , приравняв f и g :

$$\frac{3\sqrt{x}}{2} = \frac{x}{2} - 2 \Leftrightarrow 3\sqrt{x} = x - 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 9x = (x - 4)^2 \\ x - 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)(x - 16) = 0 \\ x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 16$$

ШКОЛКОВО