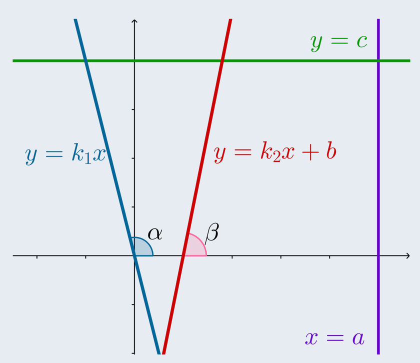
9 задание из ЕГЭ

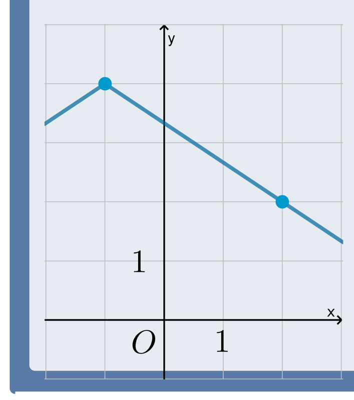
2022

Линейная функция

- Линейная функция – функция вида $f(x) = kx + b$, где k, b – некоторые числа.
- Графиком линейной функции является прямая.
- Для $f(x) = kx + b$ коэффициент k равен тангенсу угла наклона прямой к положительному направлению оси Ox. $k_1 = \mathrm{tg}\alpha$, $k_2 = \mathrm{tg}\beta$.



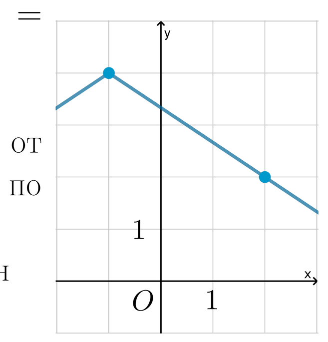
- Если две прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$: параллельны, то $k_1 = k_2$; взаимно перпендикулярны, то $k_1 \cdot k_2 = -1$.



- Функция модуля выглядит как $f(x) = a|x - x_0| + y_0$, где $(x_0; y_0)$ — точка в которую сместилась тока $(0;0)$. Коэффициент a отмечает за сжатие/растяжение и направление ветвей уголка.

Пример, где встречается

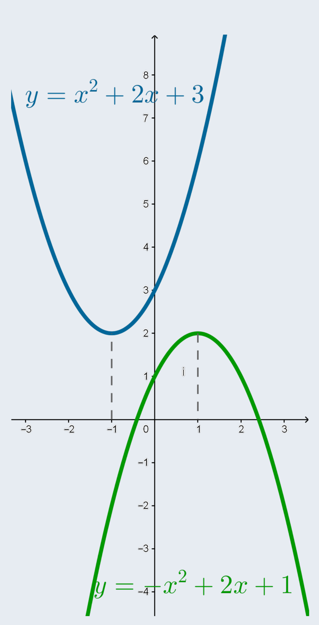
На риснке изображен график функции $f(x) = a|x - b| + c$. Найдите $f(-10)$.



► Вершина графика сдвинута в точку $(-1;4)$, следовательно, $b = -1$, $c = 4$. Так как если от вершины мы сдвигаемся на 2 единицы вниз, а по горинтали
на 3, то коэффициент a отрицательный и равен $a = -\frac{2}{3}$. Следовательно, $f(x) = \frac{3}{2}\big|x + 1\big| + 4$.
Тогда $f(-10) = \frac{3}{2}\big| - 10 + 1\big| + 4 = -9,5$ ■

Квадратичная функция

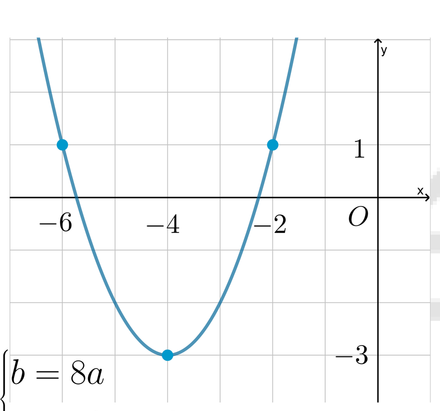
- Квадратичная функция – функция вида $f(x) = ax^2 + bx + c$, где a, b, c – некоторые числа, причем $a \neq 0$.
- Графиком квадратичной функции является парабола.
- Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх, если $a < 0$ – ветви направлены вниз. Коэффициент a также отвечает за сжатие/растяжение параболы.
- Всякая парабола симметрична относительно прямой $x = x_0$.
- Корни уравнения $ax^2+bx+c = 0$ – точки пересечения параболы с осью Ox.
- Вершина параболы



$$x_0 = -\frac{b}{2a},\ y_0 = -\frac{D}{4a} \text{ ищется из } f(x) = a\,(x - x_0)^2 + y_0$$

Пример, где встречается

На рисунке изображен график функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, где числа a, b, c — целые. Найдите $f(-12)$.



► Первый способ. Из рисунка следует, что вершина параболы находится в точке $A(-4;-3)$. Так как $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = -\frac{D}{4a}$, то получаем систему

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = -4 \\ -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 8a \\ c = 16a - 3 \end{cases}$$

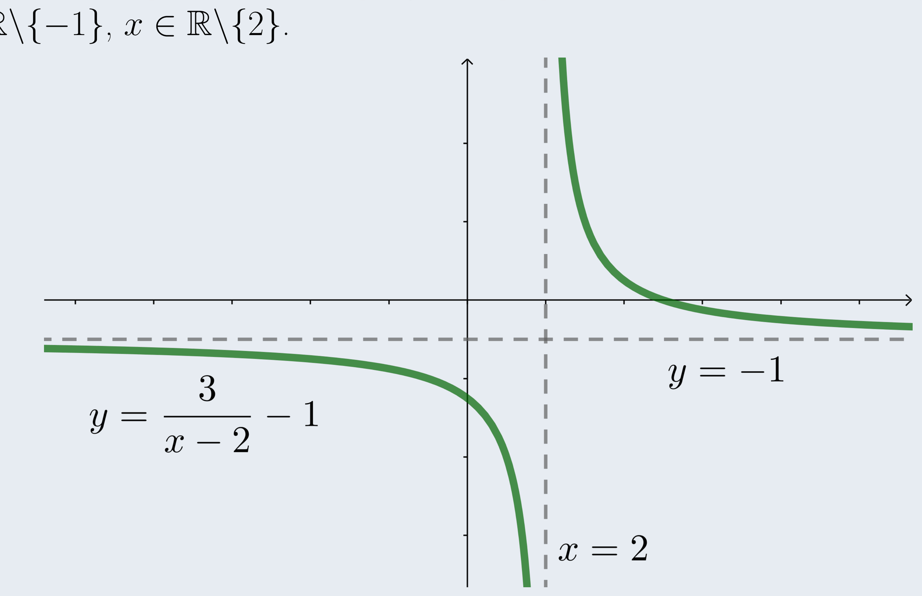
Так же парабола проодит через точку $B(-2;1)$, поэтому

$$4a - 2b + c = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 4a - 16a + 16a - 3 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = 1$$

Тогда функция $f(x) = x^2 + 8x + 13$.
Второй способ. Функция имеет вид $f(x) = a(x - x_0) + y_0$. Из рисунка следует, что $(x_0; y_0) = (-4;-3)$. Так как при движении от вершины по горизонтали на 2 клетки мы движемся вверх на 4 клетки, то это стандартная параболав с коэффциентом $a = 1$. Значит $f(x) = (x + 4)^2 - 3$.
Ответ $f(-12) = 144a - 12b + c = 61$. ■

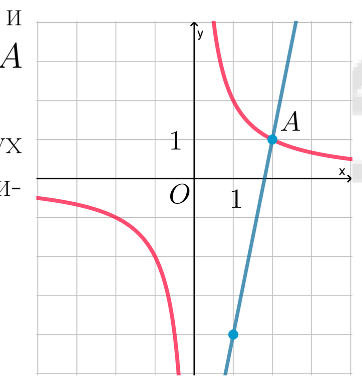
Обратная пропорциональность

- Графиком обратной пропорциональности $f(x) = \frac{1}{x}$ является гипербола.
- Общий вид функции $f(x) = \frac{a}{x - x_0} + y_0$, где a — коэффициент сжатия/растяжения, а $(x_0; y_0)$ — точка пересечения асимптот гиперболы.
- Асимптоты гиперболы – это две прямые, параллельные координатным осям, которые график не пересекает, но стремится к ним. График гиперболы симметричен относительно точки пересечения асимптот.
- Для изображенного на рисунке графика можно сказать, что $y \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$.



Пример, где встречается

На рисунке изображены графики $f(x) = \frac{k}{x}$ и $g(x) = ax + b$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



► $A(2;1)$. Так как эта точка — общая для двух графиков, то она удовлетиворяет обоим уравнениям функций, следовательно,

$$\begin{cases} 1 = \frac{k}{2} \\ 1 = 2a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ b = 1 - 2a \end{cases}$$

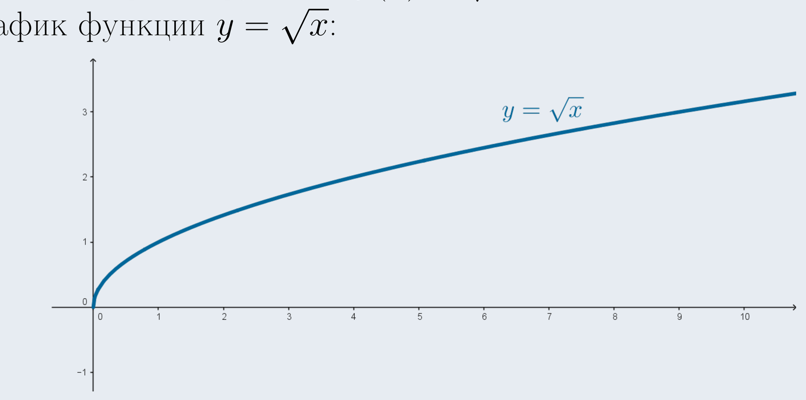
Заметим, что на рисунке показано, что прямая проходит через точку $(1;-4)$, следовательно $-4 = 1 + 1 - 2a \quad \Leftrightarrow \quad a = 5 \quad \Rightarrow \quad b = -9$.
Тогда уравнения функций $f(x) = \frac{2}{x}$ и $g(x) = 5x - 9$. Ищем другую их точку пересечения:

$$\frac{2}{x} = 5x - 9 \quad \Rightarrow \quad 5x^2 - 9x - 2 = 0$$

По теореме Виета произведение корней равно $-\frac{2}{5}$. Так как один корень — это $x_1 = 2$ (абсцисса точки A), то второй корень $x_2 = -\frac{2}{5} : 2 = -\frac{1}{5} = -0,2$. Это и есть абсцисса точки B. ■

Функция корня

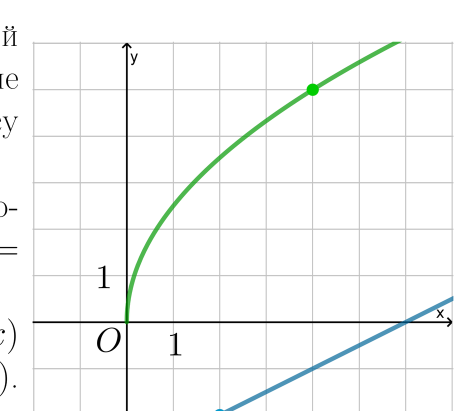
- Функция корня – функция $f(x) = \sqrt{x}$.
- График функции $y = \sqrt{x}$:



- Общий вид уравнения $f(x) = a\sqrt{x - x_0} + y_0$, где $(x_0; y_0)$ точка, в которую сдвинулась точка $(0;0)$ (начало графика).
- Заметим, что $y = \sqrt{x}$ определена при $x \geqslant 0$ и принимает значения $y \geqslant 0$.

Пример, где встречается

На рисунке изображены графики функций $f(x) = a\sqrt{x}$ и $g(x) = kx + b$, которые пересекаются в точке A. Найдите абсциссу точки A.



► Из рисунка видно, что график $f(x)$ проходит через точку $(4;5)$, получаем $5 = a\sqrt{4}$, откуда $a = \frac{5}{2}$.
Из рисунка также видно, что прямая $g(x)$ проходит через точки $(2;-2)$ и $(0;-3)$. Найдем коэффициенты k, b:

$$\begin{cases} -2 = 2k + b \\ -3 = 0k + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ b = -3 \end{cases}$$

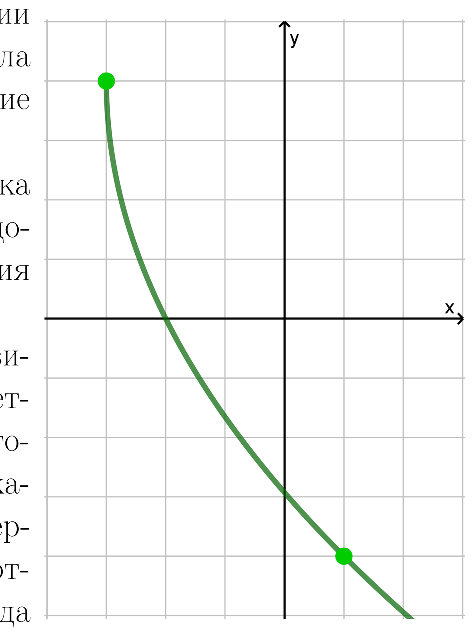
Тогда уравнения функций $f(x) = \frac{5}{2}\sqrt{x}$, $g(x) = \frac{1}{2}x - 3$. Найдем их точку пересечения:

$$\frac{5}{2}\sqrt{x} = \frac{1}{2}x - 3 \quad \Leftrightarrow \quad 5\sqrt{x} = x - 6 \quad \Leftrightarrow$$
$$x^2 - 37x + 36 = 0, \text{ при } x \geqslant 6 \quad \Leftrightarrow \quad x = 36$$

Нашли абсциссу точки пересечения графиков. ■

Пример, где встречается

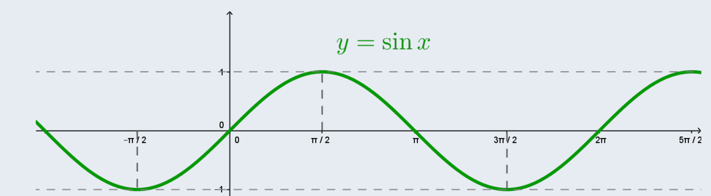
На рисунке изображен график функции видла $f(x) = a\sqrt{x - x_0} + y_0$, где числа a, x_0, y_0 действительные. Найдите значение $f(6)$.



► Из рисунка видно, что начальная точка графика смещена в точку $(-3;4)$. Следовательно, $x_0 = -3$, $y_0 = 4$. Тогда функция выглядит как $f(x) = a\sqrt{x + 3} + 4$.
Так же из графика видно, что при движении по горизонтали на 1, мы смещается по вертикали на 4, при движении по горизонтали на 4 мы смещаемся по вертикали на 8 (у стандартной $y = \sqrt{x}$ по вертикали было бы смещение на 1 и 2 соответственно). Следовательно, $a = 4$. Тогда $f(x) = 4\sqrt{x + 3} + 4$.
Ответ $f(6) = 4\sqrt{3 + 6} + 4 = 16$. ■

Тригонометрические функции синуса и косинуса

- Графиком функции $y = \sin x$ является синусоида.

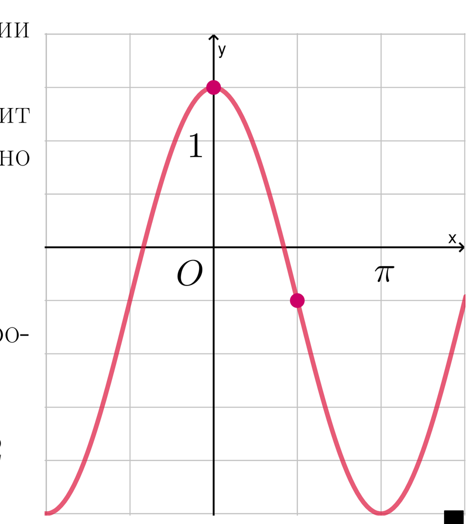


- Графиком функции $y = \cos x$ также является синусоида, но сдвинутая на $\frac{\pi}{2}$ единиц влево по оси Ox.

- Если функция представлена в виде $y = a\cos(x - x_0) + y_0$, то график сжат в a раз, сдвинут по горизонтали на x_0 и по вертикали на y_0.
- Обе функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ периодичны с периодом 2π. Обе функции могут принимать значения $y \in [-1;1]$. • Функция $y = \sin x$ – нечетная, функция $y = \cos x$ – четная.

Пример, где встречается

На рисунке изображен график функции $y = a\cos x + b$. Найдите $a + b$.



► Из рисунка видно, что график проходит через точку $\left(\frac{\pi}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. Следовательно, верно равенство

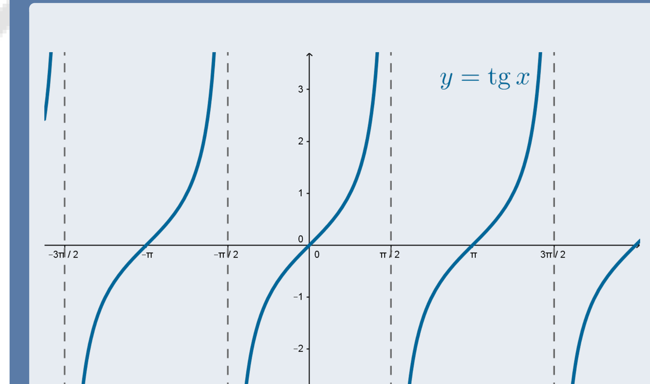
$$-\frac{1}{2} = a\cos\frac{\pi}{2} + b \quad \Leftrightarrow \quad b = -\frac{1}{2}$$

Из рисунка также видно, что график проходит через точку $\left(0; \frac{3}{2}\right)$, следовательно

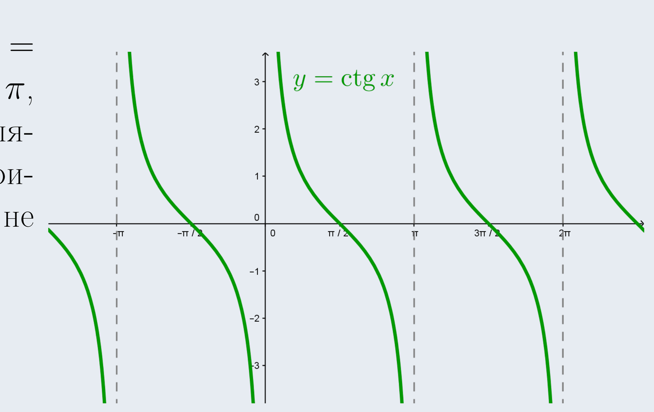
$$\frac{3}{2} = a \cdot \cos 0 - \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

Тогда $a + b = -\frac{1}{2} + 2 = 1,5$. ■

Тригонометрические функции тангенса и котангенса



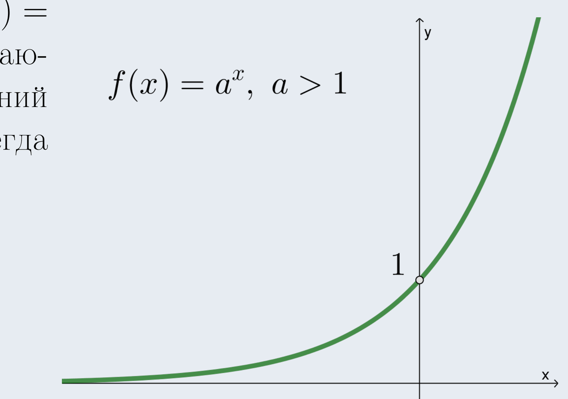
- График функции $y = \mathrm{tg}\, x$. Прямые $x = k \cdot \frac{\pi}{2}$, где k – нечетное число, являются асимптотами графика (то есть график их не пересекает).
- График функции $y = \mathrm{ctg}\, x$. Прямые $x = n \cdot \pi$, где n – целое число, являются асимптотами графика (то есть график их не пересекает).

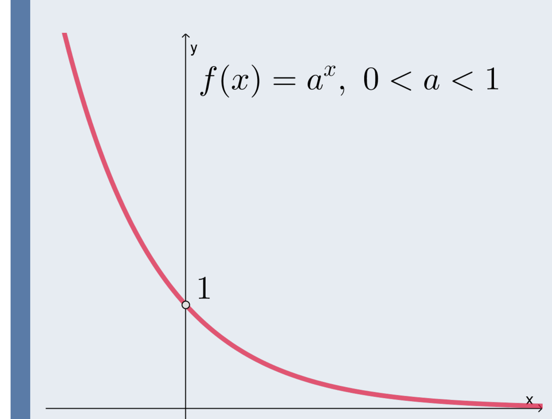


- Обе функции $y = \mathrm{tg}\, x$ и $y = \mathrm{ctg}\, x$ периодичны с периодом π и нечетны.

Показательная функция

- Показательная функция $f(x) = a^x$ при $a > 1$ является возрастающей при всех x, область значений $a^x \in (0;+\infty)$. Ее график всегда проходит через точку $(0;1)$.

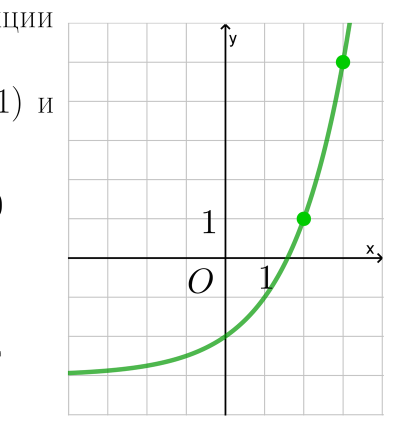




- Показательная функция $f(x) = a^x$ при $0 < a < 1$ является убывающей при всех x, область значений также $a^x \in (0;+\infty)$. Ее график всегда проходит через точку $(0;1)$.
- Функция $f(x) = k \cdot a^{x - x_0} + y_0$ представляет собой стандартный график, сжатый в k раз и сдвинутый по горизонтали на x_0 и по вертикали на y_0 (то есть точка $(0;1)$ смещается в точку $(x_0; y_0)$).

Пример, где встречается

На рисунке изображен график функции $f(x) = a^x + b$. Найдите $f(6)$.



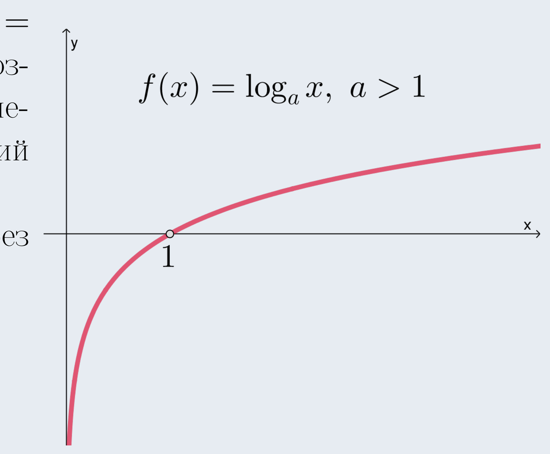
► График проходлит через точки $(2;1)$ и $(3;5)$. Следовательно, верно

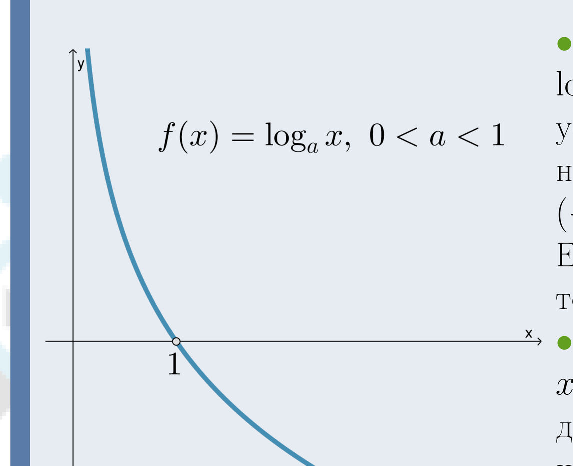
$$\begin{cases} a^2 + b = 1 \\ a^3 + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - a^2 - 4 = 0 \\ b = 1 - a^2 \end{cases}$$

Первое уравнение ракладывается в $(a - 2)(a^2 + a + 2) = 0$ и корнем будет $a = 2$. Следовательно, $b = -3$.
Тогда $f(x) = 2^x - 3$, значит, $f(6) = 2^6 - 3 = 61$. ■

Логарифмическая функция

- Логарифмическая функция $y = \log_a x$ при $a > 1$ является возрастающей, ее область определения $x > 0$, ее область значений $(-\infty; +\infty)$.
Ее график всегда проходит через точку $(1;0)$.

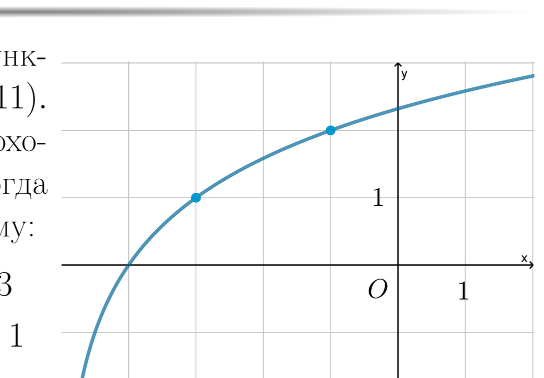




- Логарифмическая функция $y = \log_a x$ при $0 < a < 1$ является убывающей, ее область определения $x > 0$, ее область значений $(-\infty; +\infty)$.
Ее график всегда проходит через точку $(1;0)$.
- Функция $f(x) = k \cdot \log_a(x - x_0) + y_0$ представляет собой стандартный график, сжатый в k раз и сдвинутый по горизонтали на x_0 и по вертикали на y_0 (то есть точка $(1;0)$ смещается в точку $(x_0; y_0)$).

Пример, где встречается

На рисунке изображен график функции $f(x) = \log_a(x + b)$. Найдите $f(11)$.



► Из рисунка видно, что график проходит через точки $(-3;1)$ и $(-1;2)$. Тогда можно составить следующую систему:

$$\begin{cases} 1 = \log_a(b - 3) \\ 2 = \log_a(b - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b - 3 \\ a^2 = b - 1 \end{cases}$$

Получаем уравнение $a^2 - a - 2 = 0$, корнями которого являются $a = -1; 2$.
Так как a — основание логарифма, то есть $a > 0$, $a \neq 1$, то подходит $a = 2$. Тогда $b = 5$. Следовательно, $f(x) = \log_2(x + 5)$.
Тогда ответ $f(11) = \log_2 16 = 4$. ■