Информатика. Количество информации, комбинаторика, системы счисления. Задание № 10 ЕГЭ по Информатике.

В задании № 10 встречаются три различных типа задач, для решения которых потребуется следующее:

1) Знание о методах измерения количества информации.

2) Знание и умение работы с системами счисления.

3) Знание комбинаторики.

Комбинаторика.

Сначала разберём правила умножения и сложения. Небольшая теоретическая справка:

Правило сложения.

Возьмём два множество со следующими элементами: $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ и $B = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$. Тогда количество способов выбрать элемент из первого множества - n, из второго - m.То есть выбрать один элемент из множеств A и B: m + n.

Пример: Перед нами стоят две коробки. В первой коробке находятся 10 шариков, во второй - 13 шариков. Требуется найти количество способов выбрать один шарик из двух коробок.

Количество способов выбрать шарик из первой коробки - 10, из второй - 13. Чтобы найти количество способов из двух коробок достать только один шарик, нам требуется сложить количество шариков в первой коробке и во второй: 10 + 13 = 23 (данные действия не зависят друг от друга, не имеет значения, в какой последовательности мы выбираем шарик).

Правило умножения.

Возьмём два множество со следующими элементами: $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ и $B = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$. Тогда количество способов выбрать элемент из первого множества - n, из второго - m. Чтобы выбрать ровно один элемент из первого множества A, а затем ровно один элемент из второго множества B, нужно умножить количество элементов из первого множества на количество элементов из второго: $n \cdot m$. То есть мы получим следующие пары:

$a_1b_1, a_1b_2, a_1b_3, ..., a_1b_m;$

$a_2b_1, a_2b_2, a_2b_3, ..., a_2b_m;$

$a_3b_1, a_3b_2, a_3b_3, ..., a_3b_m;$

...

$a_nb_1, a_nb_2, a_nb_3, ..., a_nb_m;$

Пример: Перед нами стоят две коробки. В первой коробке находятся 3 шарика: зелёный, синий, красный, во второй - 4 шарика: жёлтый, чёрный, серый, белый. Требуется найти количество способов выбрать последовательно шарик из первой коробки, а затем из второй (у нас должно быть в результате два разноцветных шарика).

Решение : Количество способов выбрать шарик из первой коробки - 3, из второй - 4. Чтобы найти количество способов выбрать ровно один шарик из первой коробки, а затем ровно один шарик из второй коробки, нужно умножить количество шариков из первой коробки на количество шариков из второй коробки : $3 \cdot 4 = 12$. *Мы можем это проверить, выписав все возможные комбинации:*

Зелёный и Жёлтый

Зелёный и Чёрный

Зелёный и Серый

Зелёный и Белый

Синий и Жёлтый

Синий и Чёрный

Синий и Серый

Синий и Белый

Красный и Жёлтый

Красный и Чёрный

Красный и Серый

Красный и Белый

То есть на каждый шарик из первой коробки найдутся 4 шарика из второй коробки.

Данные складываются при независимых событиях, умножаются при зависимых событиях. Но что такое зависимые и независимые события? Посмотрим на примерах:

Задание №1: *Полина нашла несколько программ по обмену в Германию, Австрию и Швейцарию. Затем увидела предложения ещё в Китай и Японию. Но Полина может поехать только один раз на программу по обмену. Сколько способов выбрать страну для поездки?*

Ответ: 5

Решение: Полина сначала выбирала из трёх стран, затем ей добавили ещё две *страны. Но так как Полина имеет возможность поехать только один раз, то она выбирает одну страну из пяти.*

Задание №2: *Полина нашла несколько программ по обмену в Германию, Австрию и Швейцарию. Затем увидела предложения ещё в Китай и Японию. Полина планирует поехать на две программы по обмену по очереди. Сколько способов выбрать страны для поездки?*

Ответ: 20

Решение: Полина сначала выбирала из трёх стран, затем ей добавили ещё две страны. Так как Полина имеет возможность поехать два раза, то она выбирает сначала одну страну из пяти, а затем ещё одну страну из оставшихся четырех. Эти события являются зависимыми, так как второй выбор страны зависит от первого, ниже представлены все возможные комбинации в данной задаче:

Германия $\rightarrow$ *Австрия*

Германия $\rightarrow$ *Швейцария*

Германия $\rightarrow$ *Китай*

Германия $\rightarrow$ *Япония*

Австрия $\rightarrow$ *Германия*

Австрия $\rightarrow$ *Швейцария*

Австрия $\rightarrow$ *Китай*

Австрия $\rightarrow$ *Япония*

Швейцария $\rightarrow$ *Германия*

Швейцария $\rightarrow$ *Австрия*

Швейцария $\rightarrow$ *Китай*

Швейцария $\rightarrow$ *Япония*

Китай $\rightarrow$ *Германия*

Китай $\rightarrow$ *Австрия*

Китай $\rightarrow$ *Швейцария*

Китай $\rightarrow$ *Япония*

Япония $\rightarrow$ *Германия*

Япония $\rightarrow$ *Австрия*

Япония $\rightarrow$ *Швейцария*

Япония $\rightarrow$ *Китай*

Как мы видим, получилось 20 вариантов.

Количество размещений.

Для начала познакомимся со следующим обозначением:

Факториал числа N – произведение чисел от 1 до $N(1 \cdot 2 \cdot ... \cdot N)$.

Факториал обозначается знаком $<<! >>$. $0! = 1$ (Всегда!!!)

Пример: Предположим, что перед нами коробка с n различными шариками(ни один шарик не повторяет цвет другого). Нам из этой коробки нужно последовательно выбрать k шариков. Сколькими способами это можно сделать?

Решение:

Количество способов выбрать первый шарик: n;

Количество способов выбрать второй шарик: $n \cdot (n-1)$ (так как на каждый выбранный первый шарик найдётся второй шарик)

Количество способов выбрать третий шарик: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$ (так как на каждый выбранный первый и второй шарики найдётся третий шарик)

...

Количество способов выбрать k шарик: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-(k-1))$

Но формула получается тогда слишком длинной. Стоит её привести к лаконичному виду. Приведём её к $n!$ (но, чтобы умножить на что-нибудь ненужное, надо разделить на что-нибудь ненужное). Получаем:

$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot ... \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}$

Полученная формула называется: количество размещений из n элементов по k элементов. И обозначается следующим образом:

$$A_n^k = \binom{n}{k}$$

Почему размещений? Потому мы пытаемся разместить n элементов на k мест.

Количество сочетаний.

Пример: Предположим, что перед нами коробка с n одинаковыми шариками. Нам из этой коробки нужно выбрать k шариков. Сколькими способами можно это сделать?

Решение:

На первый взгляд здесь можно было бы воспользоваться формулой количества размещений из n элементов по k элементов. Но отличие данной задачи от предыдущей в том, что нам даны одинаковые шарики, следовательно, нам не важен порядок выбора k шариков(они в любом случае все одинаковые). Значит, нам нужно количество размещений разделить на количество перестановок на k мест:

$\frac{A_n^k}{k!}$

Полученная формула называется: количество сочетаний из n элементов по k элементов. И обозначается следующим образом:

$$C_n^k = \binom{n}{k}$$

Несколько полезных формул:

1) $C_n^k = C_n^{n-k}$

Доказательство:

$\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot(n-(n-k))!}$

$\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$

2) $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$

Доказательство:

$\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{n\cdot(n-1)!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{(k+(n-k))\cdot(n-1)!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{(n-k)\cdot(n-1)!+k\cdot(n-1)!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{(n-k)\cdot(n-1)!}{k!\cdot(n-k)!} + \frac{k\cdot(n-1)!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{(n-k)\cdot(n-1)!}{k!\cdot(n-k-1)!\cdot(n-k)} + \frac{k\cdot(n-1)!}{k\cdot(k-1)!\cdot(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{k!\cdot(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot((n-1)-(k-1))!}$

3) $C_n^0 = C_n^n = 1$

Доказательство:

$C_n^0 = \frac{n!}{0!\cdot n!} = \frac{n!}{n!} = 1$

$C_n^n = \frac{n!}{n!\cdot 0!} = \frac{n!}{n!} = 1$

4) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$

Доказательство:

$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot ... \cdot(a+b)}_{n} = C_n^0 \cdot a^n \cdot b^0 + C_n^1 \cdot a^{n-1} \cdot b^1 + C_n^2 \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + C_n^3 \cdot a^{n-3} \cdot b^3 + ... + C_n^{n-1} \cdot a^1 \cdot b^{n-1} + C_n^n \cdot a^0 \cdot b^n = \sum_{k:=0}^{n} C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$

$(1+1)^n = C_n^0\cdot 1^n\cdot 1^0 + C_n^1\cdot 1^{n-1}\cdot 1^1 + C_n^2\cdot 1^{n-2}\cdot 1^2 + ... + C_n^{n-1}\cdot 1^1\cdot 1^{n-1} + C_n^n\cdot 1^0\cdot 1^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n$

5) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + C_n^4 - C_n^5 + C_n^6 - C_n^7 + ... + (-1)^n \cdot C_n^n = (1-1)^n$

Задание №1.

У Полины на один день назначены дополнительные занятия по трём предметам: математике, информатике и физике. Полина выбирает, как ей поставить все три занятия друг за другом так, чтобы всё успеть (конечно, Полина должна посетить все занятия!). Сколько способов есть у Полины составить себе расписание из трёх предметов?

Ответ

6

Решение

Первым занятием Полина может выбрать физику, информатику или математику (3 предмета). Затем Полина будет выбирать из двух предметов (так как она же уже посетит первое занятие). И на последнем месте останется один из трёх предметов, на котором Полина ещё не была. Получаем:

$\underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 6$

Также можно вручную написать все возможные варинты (для удобства используем обозначения: Ф - физика, М - математика, И - информатика):

Ф И М

Ф М И

И Ф М

И М Ф

М И Ф

М Ф И

Задание №2.

Алиса перешла в 11 класс, она точно будет сдавать профильную математику и русский язык, а вот с третьим предметом девушка ещё не определилась. Алиса выбирает из следующих учебных дисциплин: Физика, Химия, История, Обществознание, Информатика и информационно-коммуникационные технологии (ИКТ), Биология, География, Английский язык, Немецкий язык, Французский язык, Китайский язык, Испанский язык, Литература. Сколько способов у Алисы выбрать третий предмет для сдачи экзамена?

Ответ

13

Решение

Так как Алисе нужно выбрать один предмет, то это независимые события. То есть нужно выбрать одну дисциплину из всех представленных. Складываем, получаем 13 (не учитываем русский язык и математику, так как девушка их точно будет сдавать). Следовательно, у Алисы 13 способов выбрать третий предмет.

Задание №3.

Сколько способов составить пятизначное число в пятеричной системе счисления? (Каждая цифра может встретиться только один раз).

Ответ

96

Решение

Для начала перечислим все возможные цифры в пятеричной системе счисления: 0, 1, 2, 3, 4.

Из данного набора на первом месте могут быть только 4 цифры(1, 2, 3, 4, с 0 число не начинаться). На вторм месте - 4 цифры (мы использовали уже одну цифру, но на втором месте можно использовать 0). На третьем месте - 3. На четвёртом месте - 2. И на последнем месте можно будеть использовать одну цифру. Получаем:

$\underline{4}\cdot\underline{4}\cdot\underline{3}\cdot\underline{2}\cdot\underline{1}=96$

Задание №4.

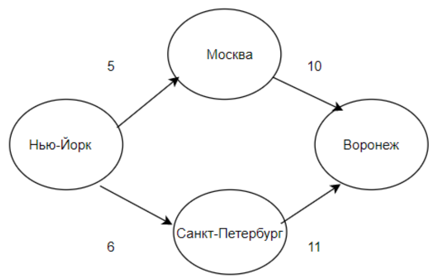
Надежда хочет прилететь в Воронеж из Нью-Йорка. Самолёты летают в Воронеж только с пересадкой в Москве или Санкт-Петербурге. Из Нью-Йорка в Москву есть 5 рейсов на нужную дату, а из Нью-Йорка в Санкт-Петербург – 6 рейсов. Также из Москвы в Воронеж – 10 рейсов, из Санкт-Петербурга в Воронеж – 11 рейсов. Сколько всего у Надежды способов добраться из Нью-Йорка в Воронеж?

Ответ

116

Решение

Для наглядности ниже представлен граф всех возможных авиарейсов:



По маршруту Нью-Йорк $\rightarrow$ Москва $\rightarrow$ Воронеж у нас 50 способов ($5 \cdot 10 = 50$). Так как на каждый из пяти рейсов Нью-Йорк $\rightarrow$ Москва найдутся 10 рейсов Москва $\rightarrow$ Воронеж.

По маршруту Нью-Йорк $\rightarrow$ Санкт-Петербург $\rightarrow$ Воронеж у нас 66 способов ($6 \cdot 11 = 66$). Так как на каждый из 6 рейсов Нью-Йорк $\rightarrow$ Санкт-Петербург найдутся 11 рейсов Санкт-Петербург $\rightarrow$ Воронеж.

Чтобы найти общее количество всех возможных рейсов нужно сложить 2 маршрута (сложить, потому что они никак не зависят друг от друга): $50 + 66 = 116$

Задание №5.

Полина проводит химические опыты. Перед ней 6 пробирок в штативе для пробирок. А также даны кислоты и щёлочи. Кислоты: H_2SO_4, HNO_3, HCl. Щёлочи: $NaOH$, KOH, $LiOH$. Но так как Полина находится в общей лаборатории, то все кислоты и щёлочи даны в больших тарах. Сколькими способами Полина может заполнить свои пробирки кислотами и щелочами?

Ответ

720

Решение

Есть 6 способов выбрать химическое соединение для первой пробирки (так как у нас 3 кислоты, 3 щёлочи, всего 6).

Для каждого соединения из первой пробирки есть 5 способов выбрать соединение для второй пробирки: $\underline{6} \cdot \underline{5}=30$

Для соединений из первых двух пробирок есть 4 способа выбрать соединение для третьей пробирки: $\underline{30} \cdot \underline{4}=120$

Для соединений из первых трёх пробирок есть 3 способа выбрать соединение для четвёртой пробирки: $\underline{120} \cdot \underline{3}=360$

Для соединений из первых четырёх пробирок есть 2 способа выбрать соединение для пятой пробирки: $\underline{360} \cdot \underline{2}=720$

Для соединений из первых пяти пробирок есть 1 способ выбрать соединение для шестой пробирки: $\underline{720} \cdot \underline{1}=720$

Следовательно, 720 и будет являться ответом.

Задание №6.

Полина проводит химические опыты. Перед ней 6 пробирок в штативе для пробирок. А также даны кислоты и щёлочи. Кислоты: H_2SO_4, HNO_3, HCl. Щёлочи: $NaOH$, KOH, $LiOH$. Но так как Полина находится в общей лаборатории, то все кислоты и щёлочи даны в больших тарах. Сколькими способами Полина может заполнить свои пробирки кислотами и щелочами, учитывая, что в двух соседних пробирках не могут находиться кислота и щёлочь?

Ответ

72

Решение

Рассмотрим две ситуации:

1) В первой пробирке кислота. Есть 3 способа выбрать кислоту для первой пробирки (так как у нас всего 3 кислоты).

Для каждой кислоты из первой пробирки есть 3 способа выбрать соединение для второй пробирки (во второй пробирке будет находяться щёлочь, так как рядом с кислотой не может быть кислота): $\underline{3} \cdot \underline{3}=9$

Для соединений из первых двух пробирок есть 2 способа выбрать кислоту для третьей пробирки (так как один вид кислоты уже находится в первой пробирке): $\underline{9} \cdot \underline{2}=18$

Для соединений из первых трёх пробирок есть 2 способа выбрать щёлочь для четвёртой пробирки(так как один вид щёлочи уже находится в первой пробирке): $\underline{18} \cdot \underline{2}=36$

Для соединений из первых четырёх пробирок есть 1 способ выбрать кислоту для пятой пробирки(так как два вида кислоты уже находятся в предыдущих пробирках): $\underline{36} \cdot \underline{1}=36$

Для соединений из первых пяти пробирок есть 1 способ выбрать щёлочь для шестой пробирки(так как два вида щёлочи уже находятся в предыдущих пробирках): $\underline{36} \cdot \underline{1}=36$

2) В первой пробирке шёлочь. Здесь уже не будем подробно расписывать каждый шаг, в общем виде все действия будут выглядеть следующим образом:

$\underline{3} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} \cdot \underline{1} = 36$

Так как имеем два разных варианта, которые не зависят друг от друга, то полученные данные нужно сложить:

$36 + 36 = 72$

Следовательно, 72 и будет являться ответом.

Задание №7.

Полина проводит химические опыты. Перед ней 6 пробирок в штативе для пробирок. А также даны кислоты и щёлочи. Кислоты: H_2SO_4, HNO_3, HCl, $HClO_4$. Щёлочи: $NaOH$, KOH, $LiOH$. Но так как Полина находится в общей лаборатории, то все кислоты и щёлочи даны в больших тарах. Сколькими способами Полина может заполнить свои пробирки кислотами и щелочами, учитывая, что в первой пробирке может находиться только кислота, и в двух соседних пробирках не могут находиться кислота и щёлочь?

Ответ

144

Решение

Есть 4 способа выбрать химическое соединение для первой пробирки (так как в первой пробирке может быть только кислота, а у нас 4 кислоты).

Для каждого соединения из первой пробирки есть 3 способа выбрать щёлочь для второй пробирки(так как в первой пробирке находится кислота, а кислота может находиться только рядом с щёлочью): $\underline{4} \cdot \underline{3}=12$

Для соединений из первых двух пробирок есть 3 способа выбрать кислоту для третьей пробирки(так как один вид кислоты уже находится в первой пробирке): $\underline{12} \cdot \underline{3}=36$

Для соединений из первых трёх пробирок есть 2 способа выбрать щёлочь для четвёртой пробирки(так как один вид щёлочи уже находится в первой пробирке): $\underline{36} \cdot \underline{2}=72$

Для соединений из первых четырёх пробирок есть 2 способа выбрать кислоту для пятой пробирки(так как два вида кислоты уже находятся в предыдущих пробирках): $\underline{72} \cdot \underline{2}=144$

Для соединений из первых пяти пробирок есть 1 способ выбрать щёлочь для шестой пробирки(так как два вида щёлочи уже находятся в предыдущих пробирках): $\underline{144} \cdot \underline{1}=144$

Следовательно, 144 и будет являться ответом.

Задание №8.

Ксения составляет 5-буквенные слова, в которых есть только буквы Р, Ы, Б, А, причём буква Б используется в каждом слове ровно 1 раз. Каждая из других допустимых букв может встречаться в слове любое количество раз или не встречаться совсем. Словом считается любая допустимая последовательность букв, не обязательно осмысленная. Сколько существует таких слов, которые может написать Ксения?

Ответ

405

Решение

По условию буква Б используется в каждом слове ровно 1 раз. Так как слова 5-буквенные, тогда буква Б может стоять на одном из пяти мест. Рассмотрим эти варианты:

Б _ _ _ _

_ Б _ _ _

_ _ Б _ _

_ _ _ Б _

_ _ _ _ Б

Мы увидели, где может находиться буква Б. Но что ставить на пропуски? На месте каждого пропуска может находиться одна из букв: Р, Ы, А (то есть одна из трёх букв). Далее воспользуемся правилом умножения.

Когда буква Б стоит на первом месте, тогда на втором месте может стоять любая из трёх букв (Р, Ы, А), ее можно выбрать 3 способами. Выбрать первые две буквы можно $1 \cdot 3 = 3$ способами. Так как буквы могут повторяться, на третьем месте тоже может стоять любая из трёх букв (то есть ее можно выбрать 3 способами). К букве на третьем месте можно выбрать буквы на предыдущие два места 3 способами, значит, есть $3 \cdot 3 = 9$ способов выбрать первые три буквы. Снова на четвертое место можно поставить любую из трёх букв (сделать это 3 способами). Для буквы на четвертом месте уже есть 9 способов выбрать первые три, значит, способов выбрать первые 4 буквы будет $9 \cdot 3 = 27$. Есть 3 способа выбрать букву, которая будет стоять на пятом месте. Для нее есть 27 способов выбрать первые четыре буквы. Тогда всего способов выбрать первые пять букв $3 \cdot 27 = 81$.

Таким образом Б можно по очереди поставить на все 5 мест, получая в каждом случае 81 вариант.

Всего вариантов: $81 + 81 + 81 + 81 + 81 = 405$.

Задание №9.

Лиза составляет 5-буквенные слова, в которых есть только буквы М, О, С, К, В, А причём буква О может использоваться в каждом слове не более трёх раз. Каждая из других допустимых букв может встречаться в слове любое количество раз или не встречаться совсем. Словом считается любая допустимая последовательность букв, не обязательно осмысленная. Сколько существует таких слов, которые может написать Лиза?

Ответ

7750

Решение

По условию буква О может использоваться в каждом слове не более трёх раз. Не более трёх раз означает, что буква О может встретиться 0, 1, 2 или 3 раза. На месте других местах могут находиться 5 букв: М, С, К, В, А. Рассмотрим эти варианты:

Буква О встречается 0 раз: $\underline{5}\ \underline{5}\ \underline{5}\ \underline{5}\ \underline{5}$

Буква О встречается 1 раз: $\underline{О}\ \underline{5}\ \underline{5}\ \underline{5}\ \underline{5}$ (таких пять вариантов)

Букво О встречается 2 раза: $\underline{О}\ \underline{О}\ \underline{5}\ \underline{5}\ \underline{5}$ (таких вариантов: C_5^2)

Буква О встречается 3 раза: $\underline{О}\ \underline{О}\ \underline{О}\ \underline{5}\ \underline{5}$ (таких вариантов: C_5^3)

Мы увидели, где может находиться буква О. Теперь посчитаем количество возможных слов для каждого варианта:

Буква О встречается 0 раз: $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 3125$

Буква О встречается 1 раз: $C_5^1 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 3125$

Букво О встречается 2 раза: $C_5^2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 1250$

Буква О встречается 3 раза: $C_5^3 \cdot 5 \cdot 5 = 250$

Всего вариантов: $3125 + 3125 + 1250 + 250 = 7750$.

Задание №10.

Настя угадывает кодовое слово, которое ей загадала подруга. В качестве кодовых слов используют 6-буквенные слова, в которых есть только буквы М, А, Р, Т, Ы, Ш, К, И, причём известно, что буквы А и Ы встречаются только на двух первых позициях, а буквы Ш, К, И — только на двух последних. Сколько различных кодовых слов могла составить подруга для Насти?

Ответ

324

Решение

Известно, что буквы А и Ы встречаются только на двух первых позициях, а буквы Ш, К, И — только на двух последних. Так как у нас 6-буквенные слова, а также остались неиспользованные буквы, то можно сделать вывод, что на 3 и 4 месте в слове находятся М, Р или Т. Значит, не первом и втором месте есть 2 варианта поставить букву (А или Ы), на третьем и четвёртом месте - 3 варианта (М, Р или Т), а на пятом и шестом месте - 3 варианта (Ш, К, И). Получилось:

$\underline{2}\ \underline{2}\ \underline{3}\ \underline{3}\ \underline{3}\ \underline{3} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 324$

Задание №11.

Аркадий составляет 6-буквенные коды из букв А, Р, К, Д, И, Й. Каждую букву нужно использовать ровно 1 раз, при этом код не может начинаться с буквы Й и не может содержать сочетания АИ. Сколько различных кодов может составить Аркадий?

Ответ

504

Решение

Для начала найдём общее количество слов, учитывая, что на первом месте может находиться любая буква кроме Й: $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 600$. Далее посмотрим, сколько слов содержат сочетание АИ.

$\underline{\text{А}}\ \underline{\text{И}}\ \underline{4}\ \underline{3}\ \underline{2}\ \underline{1} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

$\underline{3}\ \underline{\text{А}}\ \underline{\text{И}}\ \underline{3}\ \underline{2}\ \underline{1} = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$

$\underline{3}\ \underline{3}\ \underline{\text{А}}\ \underline{\text{И}}\ \underline{2}\ \underline{1} = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$

$\underline{3}\ \underline{3}\ \underline{2}\ \underline{\text{А}}\ \underline{\text{И}}\ \underline{1} = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$

$\underline{3}\ \underline{3}\ \underline{2}\ \underline{1}\ \underline{\text{А}}\ \underline{\text{И}} = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$

Таким образом, количество кодов, которые может составить Аркадий: 600 – 24 – 18 – 18 – 18 – 18 = 504.

Задача 12

Григорий составляет 5-буквенные слова из следующих букв: Г, Р, И, Ф, О, Я, Й. При этом он придерживается некоторых правил: никакие две согласные не могут стоять рядом, никакие две гласные не могут стоять рядом, и слово не должно начинаться с буквы Й. Сколько слов сможет составить Григорий? Словом считается любая последовательность букв.

Ответ

864

Решение

Сначала разберём первое условие, что никакие две согласные не могут стоять рядом, никакие две гласные не могут стоять рядом. Для этого рассмотрим два варианта расстановки букв: в первом варианте слово будет начинаться с гласной, а во втором - с согласной. Обозначим гласную букву за Г, а согласную за С. Тогда слова будут иметь такой вид:

<u>Г</u> <u>С</u> <u>Г</u> <u>С</u> <u>Г</u>

<u>С</u> <u>Г</u> <u>С</u> <u>Г</u> <u>С</u>

На место согласной буквы мы можем поставить одну из 4 букв. На место гласной буквы можем поставить одну из 3 букв.

Рассмотрим первый вариант, когда гласная буква стоит на первом месте (то есть букву на первое место можно выбрать 3 способами). Тогда на втором месте может стоять любая согласная буква, ее можно выбрать 4 способами. Выбрать первые две буквы можно $3 \cdot 4 = 12$ способами. Так как буквы могут повторяться, на третьем месте тоже может стоять любая из трёх гласных букв (то есть ее можно выбрать 3 способами). К букве на третьем месте можно выбрать буквы на предыдущие два места 12 способами, значит, есть $3 \cdot 12 = 36$ способов выбрать первые три буквы. Снова на четвертое место можно поставить любую из четырёх согласных букв (сделать это 4 способами). Для буквы на четвертом месте уже есть 36 способов выбрать первые три, значит, способов выбрать первые 4 буквы будет $4 \cdot 36 = 144$. Есть 3 способа выбрать букву, которая будет стоять на пятом месте. Для нее есть 144 способов выбрать первые четыре буквы. Тогда всего способов выбрать первые пять букв $3 \cdot 144 = 432$.

Теперь рассмотрим второй вариант, когда согласная буква стоит на первом месте (то есть букву на первое место можно выбрать 3 способами (учитываем второе условие, что буква Й не может стоять на первом месте)). Тогда на втором месте может стоять любая гласная буква, ее можно выбрать 3 способами. Выбрать первые две буквы можно $3 \cdot 3 = 9$ способами. Так как буквы могут повторяться, на третьем месте может стоять любая из четырёх согласных букв (то есть ее можно выбрать 4 способами). К букве на третьем месте можно выбрать буквы на предыдущие два места 9 способами, значит, есть $4 \cdot 9 = 36$ способов выбрать первые три буквы. Снова на четвертое место можно поставить любую из трёх гласных букв (сделать это 3 способами). Для буквы на четвертом месте уже есть 36 способов выбрать первые три, значит, способов выбрать первые 4 буквы будет $3 \cdot 36 = 108$. Есть 4 способа выбрать букву, которая будет стоять на пятом месте. Для нее есть 108 способов выбрать первые четыре буквы. Тогда всего способов выбрать первые пять букв $4 \cdot 108 = 432$.

Далее складываем полученные значения в первом и втором варианте: $432 + 432 = 864$.

Системы счисления.Слова в алфавитном порядке.

Для решения данного типа задач понадобятся знание и умение работать с системами счисления. Для начала нужно ознакомиться с примером, а затем приступить к решению задач.

Пример: Все пятибуквенные слова, составленные из букв А, О, Я, записаны в алфавитном порядке. Вот начало списка:

1. АААAA
2. АААAО
3. АААAЯ

...

Запишите слово, которое стоит на 50-м месте от начала списка.

Решение:

Данные задания решаются следующим образом: нужно заменить буквы на цифры. Каждой букве будет соответствовать своя цифра (в порядке возрастания). Для данного задания замена будет выглядеть следующим образом:

А $\rightarrow$ 0

О $\rightarrow$ 1

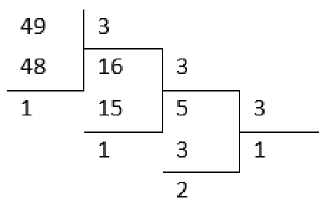
Я $\rightarrow$ 2

Тогда изменённый список:

1. 00000
2. 00001
3. 00002

...

Как мы видим, данные числа записаны в троичной системе счисления. Тогда на 50-м месте будет стоять число 49 (т. к. первое число 0). Переведём число 49 в троичную систему(для этого 49 нужно поделить на 3)



Получаем 1211, но так как у нас пятизначные числа, то 01211. Переведём в *буквенный вид: AOЯOO*

Задание №1.

Все четырёхбуквенные слова, составленные из букв А, О, Я, У, Е записаны в алфавитном порядке. Вот начало списка:

1. АААА
2. АААЕ
3. АААО
4. АААУ
5. АААЯ
6. ААЕА

...

Запишите слово, которое стоит на 61-м месте от начала списка.

Ответ:

АООА

Решение:

Данные задания решаются следующим образом: нужно заменить буквы на цифры. Каждой букве будет соответствовать своя цифра (в порядке возрастания). Для данного задания замена будет выглядеть следующим образом:

А $\rightarrow$ 0

Е $\rightarrow$ 1

О $\rightarrow$ 2

У $\rightarrow$ 3

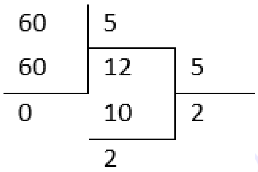
Я $\rightarrow$ 4

Тогда изменённый список:

1. 0000
2. 0001
3. 0002
4. 0003
5. 0004
6. 0010

...

Как мы видим, данные числа записаны в пятеричной системе счисления. Тогда на 61-м месте будет стоять число 60 (т. к. первое число 0). Переведём число 60 в пятеричную систему(для этого 60 нужно поделить на 5)



Получаем 220, но так как у нас четырёхзначные числа, то 0220. Переведём в буквенный вид: А00А

Задание №2.

Все пятибуквенные слова, составленные из букв А, О, Е, У записаны в алфавитном порядке. Вот начало списка:

1. ААААА
2. ААААЕ
3. ААААО
4. ААААУ
5. АААЕА
6. АААЕЕ

...

Запишите слово, которое стоит на 97-м месте от начала списка.

Ответ:

АЕОАА

Решение:

Данные задания решаются следующим образом: нужно заменить буквы на цифры. Каждой букве будет соответствовать своя цифра (в порядке возрастания). Для данного задания замена будет выглядеть следующим образом:

А $\rightarrow$ 0

Е $\rightarrow$ 1

О $\rightarrow$ 2

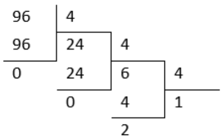
У $\rightarrow$ 3

Тогда изменённый список:

1. 00000
2. 00001
3. 00002
4. 00003
5. 00010
6. 00011

...

Как мы видим, данные числа записаны в пятеричной системе счисления. Тогда на 97-м месте будет стоять число 96 (т. к. первое число 0). Переведём число 96 в 4-ичную систему(для этого 96 нужно поделить на 4)



Получаем 1200, но так как у нас четырёхзначные числа, то 01200. Переведём в буквенный вид: AEOAA

Задание №3.

Все пятибуквенные слова, составленные из букв А, Р, Б, У, З записаны в алфавитном порядке. Вот начало списка:

1. ААААА
2. ААААБ
3. ААААЗ
4. ААААР
5. ААААУ
6. АААБА

...

Запишите слово, которое стоит на 113-м месте от начала списка.

Ответ:

ААУЗЗ

Решение:

Данные задания решаются следующим образом: нужно заменить буквы на цифры. Каждой букве будет соответствовать своя цифра (в порядке возрастания). Для данного задания замена будет выглядеть следующим образом:

А $\rightarrow$ 0

Б $\rightarrow$ 1

З $\rightarrow$ 2

Р $\rightarrow$ 3

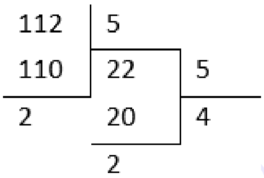
У $\rightarrow$ 4

Тогда изменённый список:

1. 00000
2. 00001
3. 00002
4. 00003
5. 00004
6. 00010

...

Как мы видим, данные числа записаны в пятеричной системе счисления. Тогда на 113-м месте будет стоять число 112 (т. к. первое число 0). Переведём число 112 в 5-ичную систему(для этого 112 нужно поделить на 5)



Получаем 422, но так как у нас пятизначные числа, то 00422. Переведём в буквенный вид: ААУЗЗ

Задание №4.

Все 4-буквенные слова, составленные из букв Щ, Ь, М, О записаны в алфавитном порядке. Вот начало списка:

1. ММММ
2. МММО
3. МММЩ
4. МММЬ
5. ММОМ
6. ММОО

...

На каком месте от начала списка стоит слово МОЩЬ?

Ответ:

28

Решение:

Данные задания решаются следующим образом: нужно заменить буквы на цифры. Каждой букве будет соответствовать своя цифра (в порядке возрастания). Для данного задания замена будет выглядеть следующим образом:

М $\rightarrow$ 0

О $\rightarrow$ 1

Щ $\rightarrow$ 2

Ь $\rightarrow$ 3

Тогда изменённый список:

1. 0000
2. 0001
3. 0002
4. 0003
5. 0010
6. 0011

...

Как мы видим, данные числа записаны в 4-ичной системе счисления. Запишем слово МОЩЬ в 4-ичной системе счисления: 0123 Переведём число 0123 в 10-ичную систему счисления:

$$\overset{3\,2\,1\,0}{0123_4} = 0 \cdot 4^3 + 1 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4^1 + 3 \cdot 4^0 = 27$$

Не забудем о том, что есть слово номер 1, записывающееся как 0, а значит, 27 — число, соответствующее номеру 28.

Задание №5.

Все 5-буквенные слова, составленные из букв С, Т, К, О, А записаны в алфавитном порядке. Вот начало списка:

1. ААААА
2. ААААК
3. ААААО
4. ААААС
5. ААААТ
6. АААКА

...

На каком месте от начала списка стоит слово СОТКА?

Ответ:

2231

Решение:

Данные задания решаются следующим образом: нужно заменить буквы на цифры. Каждой букве будет соответствовать своя цифра (в порядке возрастания). Для данного задания замена будет выглядеть следующим образом:

А $\to$ 0

К $\to$ 1

О $\to$ 2

С $\to$ 3

Т $\to$ 4

Тогда изменённый список:

1. 00000
2. 00001
3. 00002
4. 00003
5. 00004
6. 00010

...

Как мы видим, данные числа записаны в 5-ичной системе счисления. Запишем слово СОТКА в 5-ичной системе счисления: 32410. Переведём число 32410 в 10-ичную систему счисления:

$$\overset{4}{3}\overset{3}{2}\overset{2}{4}\overset{1}{1}\overset{0}{0}{}_5 = 3 \cdot 5^4 + 2 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^1 + 0 \cdot 5^0 = 2230$$

Не забудем о том, что есть слово номер 1, записывающееся как 0, а значит, 2230 — число, соответствующее номеру 2231.

Задание №6.

Все 4-буквенные слова, составленные из букв О, П, Н, И записаны в алфавитном порядке. Вот начало списка:

1. ИИИИ
2. ИИИН
3. ИИИО
4. ИИИП
5. ИИНИ
6. ИИНН

...

На каком месте от начала списка стоит слово ПОНИ?

Ответ:

229

Решение:

Данные задания решаются следующим образом: нужно заменить буквы на цифры. Каждой букве будет соответствовать своя цифра (в порядке возрастания). Для данного задания замена будет выглядеть следующим образом:

И $\rightarrow$ 0

Н $\rightarrow$ 1

О $\rightarrow$ 2

П $\rightarrow$ 3

Тогда изменённый список:

1. 0000
2. 0001
3. 0002
4. 0003
5. 0010
6. 0011

...

Как мы видим, данные числа записаны в 4-ичной системе счисления. Запишем слово ПОНИ в 4-ичной системе счисления: 3210. Переведём число 3210 в 10-ичную систему счисления:

$$\overset{3\,2\,1\,0}{3210_4} = 3 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^1 + 0 \cdot 4^0 = 228$$

Не забудем о том, что есть слово номер 1, записывающееся как 0, а значит, 228 — число, соответствующее номеру 229.

Задание №7.

Все 4-буквенные слова, составленные из букв Ц, В, Е, Т, Ы записаны в алфавитном порядке. Вот начало списка:

1. ВВВВ
2. ВВВЕ
3. ВВВТ
4. ВВВЦ
5. ВВВЫ
6. ВВЕВ

...

Под каким номером в списке идёт первое слово, которое начинается с буквы Ц?

Ответ:

376

Решение:

Данные задания решаются следующим образом: нужно заменить буквы на цифры. Каждой букве будет соответствовать своя цифра (в порядке возрастания). Для данного задания замена будет выглядеть следующим образом:

В $\rightarrow$ 0

Е $\rightarrow$ 1

Т $\rightarrow$ 2

Ц $\rightarrow$ 3

Ы $\rightarrow$ 4

Тогда изменённый список:

1. 0000
2. 0001
3. 0002
4. 0003
5. 0004
6. 0010

...

Как мы видим, данные числа записаны в 5-ичной системе счисления. Буква Ц соответствует номеру 3. Так как слова 4-буквенные, то на первом месте должен стоять номер 3. Наименьшее 4-буквенное слово, которое начинается с цифры 3 в 5-ичной системе счисления: 3000. Переведём число 3000 в 10-ичную систему счисления:

$$\overset{3}{3}\overset{2}{0}\overset{1}{0}\overset{0}{0}_5 = 3 \cdot 5^3 = 375$$

Не забудем о том, что есть слово номер 1, записывающееся как 0, а значит, 375 — число, соответствующее номеру 376.

Задание №8.

Все 5-буквенные слова, составленные из букв У, Ч, Ё, Б, А записаны в алфавитном порядке. Вот начало списка:

1. ААААА
2. ААААБ
3. ААААЁ
4. ААААУ
5. ААААЧ
6. АААБА

...

Под каким номером в списке идёт первое слово, которое начинается с буквы Ё?

Ответ:

1251

Решение:

Данные задания решаются следующим образом: нужно заменить буквы на цифры. Каждой букве будет соответствовать своя цифра (в порядке возрастания). Для данного задания замена будет выглядеть следующим образом:

А $\rightarrow$ 0

Б $\rightarrow$ 1

Ё $\rightarrow$ 2

У $\rightarrow$ 3

Ч $\rightarrow$ 4

Тогда изменённый список:

1. 00000
2. 00001
3. 00002
4. 00003
5. 00004
6. 00010

...

Как мы видим, данные числа записаны в 5-ичной системе счисления. Буква Ё соответствует номеру 2. Так как слова 5-буквенные, то на первом месте должен стоять номер 2. Наименьшее 5-буквенное слово, которое начинается с цифры 2 в 5-ичной системе счисления: 20000. Переведём число 20000 в 10-ичную систему счисления:

$\overset{4}{2}\overset{3}{0}\overset{2}{0}\overset{1}{0}\overset{0}{0}_5 = 2 \cdot 5^4 = 1250$

Не забудем о том, что есть слово номер 1, записывающееся как 0, а значит, 1250 — число, соответствующее номеру 1251.

Задание №9.

Все 5-буквенные слова, составленные из букв П, И, Т, Е, Р записаны в алфавитном порядке. Вот начало списка:

1. ЕЕЕЕЕ
2. ЕЕЕЕИ
3. ЕЕЕЕП
4. ЕЕЕЕР
5. ЕЕЕЕТ
6. ЕЕЕИЕ

...

Под каким номером в списке идёт первое слово, которое начинается с букв РТ?

Ответ:

2376

Решение:

Данные задания решаются следующим образом: нужно заменить буквы на цифры. Каждой букве будет соответствовать своя цифра (в порядке возрастания). Для данного задания замена будет выглядеть следующим образом:

Е $\to$ 0

И $\to$ 1

П $\to$ 2

Р $\to$ 3

Т $\to$ 4

Тогда изменённый список:

1. 00000
2. 00001
3. 00002
4. 00003
5. 00004
6. 00010

...

Как мы видим, данные числа записаны в 5-ичной системе счисления. Буква Р соответствует номеру 3, а Т соответствует номеру 4. Так как слова 5-буквенные, то на первом месте должен стоять номер 3, а на втором месте - 4. Наименьшее 5-буквенное слово, которое начинается с комбинации цифр 34 в 5-ичной системе счисления: 34000. Переведём число 34000 в 10-ичную систему счисления:

$$\overset{4}{3}\overset{3}{4}\overset{2}{0}\overset{1}{0}\overset{0}{0}{}_5 = 3 \cdot 5^4 + 4 \cdot 5^3 = 2375$$

Не забудем о том, что есть слово номер 1, записывающееся как 0, а значит, 2375 — число, соответствующее номеру 2376.

Измерение количества информации.

В первом блоке уже затрагивались правила сложения и умножения, поэтому в данном разделе подразумевается, что Вы с ними уже знакомы.

Пример: Есть 8 бит. Сколько различных комбинаций они позволяют закодировать?

Решение: 1 бит информации позволяет закодировать 2 символа (0 или 1). 2 бита информации позволяют закодировать 4 символа (00,01,11,10). 3 бита информации позволяют закодировать 8 символов. То есть каждый раз при увеличении количества бит на 1, мы умножаем количество символов на два (это является ярким примером правила умножения, так как на каждые два варианта в одной ячейке следуют два варианта в следующей ячейке). Для 8 бит (0,1-возможные варианты на данное место):

$$\underbrace{2}_{0,1} \cdot \underbrace{2}_{0,1} \cdot \underbrace{2}_{0,1} \cdot \underbrace{2}_{0,1} \cdot \underbrace{2}_{0,1} \cdot \underbrace{2}_{0,1} \cdot \underbrace{2}_{0,1} \cdot \underbrace{2}_{0,1} = 2^8 = 256$$

Ответом будет являться 256.

Данные всегда хранятся в двоичной системе счисления (только такое "кушает" наш компьютер). Поэтому принято использовать следующую формулу:

С помощью К бит можно закодировать $N = 2^i$ различных символов:

$$N = 2^i$$

N — количество символов, которые нужно закодировать.

i — количество бит для хранения одного символа.

2 — двоичная система счисления.

А что будет, если мощность алфавита не является степенью 2? Давайте рассмотрим такую ситуацию на примере.

Пример: Нужно закодировать 200 элементов. Каким минимальным количеством бит это можно сделать?

Решение: Ближайшие степени двойки к числу 200 - 7 и 8. $2^7 < 200 < 2^8 (128 < 200 < 256)$. *Конечно, хочется взять меньше бит, зачем нам память тратить? Но в таком случае у нас останутся элементы, которые мы не сможем закодировать. А это приведёт к большим проблемам. Поэтому лучше брать с "запасом" (чтобы каждый элемент был закодирован). В данном случае ответом будет являться число 8 (именно 8 бит хватит, чтобы закодировать 200 символов).*

Задача №1.

Сколько бит "весит" один символ в алфавите мощностью 729 символов?

Ответ:

10

Решение:

Начнём с одного бита:

1 бит: $2^1 = 2$. 1 бит позволяет закодировать 2 символа.

2 бита: $2^2 = 4$. 2 бита позволяют закодировать 4 символа.

3 бита: $2^3 = 8$. 3 бита позволяют закодировать 8 символов.

4 бита: $2^4 = 16$. 4 бита позволяют закодировать 16 символов.

5 бит: $2^5 = 32$. 5 бит позволяют закодировать 32 символа.

6 бит: $2^6 = 64$. 6 бит позволяют закодировать 64 символа.

7 бит: $2^7 = 128$. 7 бит позволяют закодировать 128 символов.

8 бит: $2^8 = 256$. 8 бит позволяют закодировать 256 символов.

9 бит: $2^9 = 512$. 9 бит позволяют закодировать 512 символов.

10 бит: $2^{10} = 1024$. 10 бит позволяют закодировать 1024 символов.

729 находится между 512 и 1024. $512 < 729 < 1024 (2^9 < 729 < 2^{10})$. 9 или 10 бит нам взять? Нам же нужно закодировать полностью информацию, нельзя что-то "выкинуть" , поэтому берём 10 бит.

Задача №2.

Сколько бит "весит" один символ в алфавите мощностью 1112 символов?

Ответ:

11

Решение:

Начнём с одного бита:

1 бит: $2^1 = 2$. 1 бит позволяет закодировать 2 символа.

2 бита: $2^2 = 4$. 2 бита позволяют закодировать 4 символа.

3 бита: $2^3 = 8$. 3 бита позволяют закодировать 8 символов.

4 бита: $2^4 = 16$. 4 бита позволяют закодировать 16 символов.

5 бит: $2^5 = 32$. 5 бит позволяют закодировать 32 символа.

6 бит: $2^6 = 64$. 6 бит позволяют закодировать 64 символа.

7 бит: $2^7 = 128$. 7 бит позволяют закодировать 128 символов.

8 бит: $2^8 = 256$. 8 бит позволяют закодировать 256 символов.

9 бит: $2^9 = 512$. 9 бит позволяют закодировать 512 символов.

10 бит: $2^{10} = 1024$. 10 бит позволяют закодировать 1024 символов.

11 бит: $2^{11} = 2048$. 11 бит позволяют закодировать 2048 символов.

1112 находится между 1024 и 2048. $1024 < 1112 < 2048(2^{10} < 1112 < 2^{11})$. 10 или 11 бит нам взять? Нам же нужно закодировать полностью информацию, нельзя что-то "выкинуть" , поэтому берём 11 бит.

Задача №3.

Один символ алфавита "весит" 3 бита. Сколько символов в данном алфавите?

Ответ:

8

Решение:

Символ "весит" 3 бита. 1 бит может принимать два значения (1 или 0). Значит, количество символов в данном алфавите:

$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$

Задача №4.

Один символ алфавита "весит" 5 бит. Сколько символов в данном алфавите?

Ответ:

32

Решение:

Символ "весит" 5 бит. 1 бит может принимать два значения (1 или 0). Значит, количество символов в данном алфавите:

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$

Задача №5.

Один символ алфавита "весит" 9 бит. Сколько символов в данном алфавите?

Ответ:

512

Решение:

Символ "весит" 9 бит. 1 бит может принимать два значения (1 или 0). Значит, количество символов в данном алфавите:

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^9 = 512$

Задание №6.

В Академии учатся 312 студентов первого курса, 256 студентов второго курса, 189 студентов третьего курса и 127 студентов четвёртого курса. У каждого студента есть бейдж с личным кодом. Какое минимальное количество бит потребуется для кодирования кода на бейдже?

Ответ:

10

Решение:

Для начала нужно посчитать количество студентов: $312 + 256 + 189 + 127 = 884$. В Академии всего 884 студента. Посчитаем, какое количество бит нам потребуется. Начнём с одного бита:

1 бит: $2^1 = 2$. 1 бит позволяет закодировать 2 символа.

2 бита: $2^2 = 4$. 2 бита позволяют закодировать 4 символа.

3 бита: $2^3 = 8$. 3 бита позволяют закодировать 8 символов.

4 бита: $2^4 = 16$. 4 бита позволяют закодировать 16 символов.

5 бит: $2^5 = 32$. 5 бит позволяют закодировать 32 символа.

6 бит: $2^6 = 64$. 6 бит позволяют закодировать 64 символа.

7 бит: $2^7 = 128$. 7 бит позволяют закодировать 128 символов.

8 бит: $2^8 = 256$. 8 бит позволяют закодировать 256 символов.

9 бит: $2^9 = 512$. 9 бит позволяют закодировать 512 символов.

10 бит: $2^{10} = 1024$. 10 бит позволяют закодировать 1024 символов.

884 находится между 512 и 1024. $512 < 884 < 1024(2^9 < 884 < 2^{10})$. 9 или 10 бит нам взять? Нам же нужно закодировать полностью информацию, нельзя "выкинуть"студента(точнее не нам решать: выкинуть студента или нет), поэтому берём 10 бит.

Задание №7.

Двое играют в шахматы на поле 8×8. Какое количество информации (в битах) получил второй игрок, узнав ход первого игрока?

Ответ:

6

Решение:

Всего на поле $8 \cdot 8 = 64$ клетки. Значит, у первого игрока 64 способа сделать ход. Каким количеством бит можно закодировать 64?

Начнём с одного бита:

1 бит: $2^1 = 2$. 1 бит позволяет закодировать 2 символа.

2 бита: $2^2 = 4$. 2 бита позволяют закодировать 4 символа.

3 бита: $2^3 = 8$. 3 бита позволяют закодировать 8 символов.

4 бита: $2^4 = 16$. 4 бита позволяют закодировать 16 символов.

5 бит: $2^5 = 32$. 5 бит позволяют закодировать 32 символа.

6 бит: $2^6 = 64$. 6 бит позволяют закодировать 64 символа.

Как мы видим, 64 символа можно закодировать 6 битами.

Значит, количество информации (в битах), которую получил второй игрок — 6.

Задание №8.

В Академии учатся 410 студентов первого курса, 300 студентов второго курса, 257 студентов третьего курса и 213 студентов четвёртого курса. У каждого студента есть бейдж с личным кодом и номером группы. Личный код и номер группы кодируются отдельно друг от друга минимальным количеством бит. Про номер группы известно следующее: в одной группе находятся не более 25 студентов, конечно, студенты, например, с первого и второго курса не могут быть в одной группе. Какое минимальное количество бит потребуется для кодирования информации на бейдже?

Ответ:

17

Решение:

Посчитаем отдельно количество бит для личного кода и номера группы.

1) Личный код. Для начала нужно посчитать количество студентов: $410 + 300 + 257 + 213 = 1180$. В Академии всего 1180 студентов. Посчитаем, какое количество бит нам потребуется. Начнём с одного бита:

1 бит: $2^1 = 2$. 1 бит позволяет закодировать 2 символа.

2 бита: $2^2 = 4$. 2 бита позволяют закодировать 4 символа.

3 бита: $2^3 = 8$. 3 бита позволяют закодировать 8 символов.

4 бита: $2^4 = 16$. 4 бита позволяют закодировать 16 символов.

5 бит: $2^5 = 32$. 5 бит позволяют закодировать 32 символа.

6 бит: $2^6 = 64$. 6 бит позволяют закодировать 64 символа.

7 бит: $2^7 = 128$. 7 бит позволяют закодировать 128 символов.

8 бит: $2^8 = 256$. 8 бит позволяют закодировать 256 символов.

9 бит: $2^9 = 512$. 9 бит позволяют закодировать 512 символов.

10 бит: $2^{10} = 1024$. 10 бит позволяют закодировать 1024 символов.

11 бит: $2^{11} = 2048$. 11 бит позволяют закодировать 2048 символов.

1180 находится между 1024 и 2048. $1024 < 1180 < 2048 (2^{10} < 1180 < 2^{11})$. 10 или 11 бит нам взять? Нам же нужно закодировать полностью информацию, нельзя "выкинуть"студента(точнее не нам решать: выкинуть студента или нет), поэтому берём 11 бит.

2) Номер группы. Так как в каждой группе находятся не более 25 человек, а студенты с разных курсов не могут быть в одной группе, то с учётом этих нюансов посчитаем количество групп:

Первый курс: $410 : 25 = 17$ (округляем в бОльшую сторону, так как все студенты должны иметь группу).

Второй курс: $300 : 25 = 12$.

Третий курс: $257 : 25 = 11$ (округляем в бОльшую сторону, так как все студенты должны иметь группу).

Четвёртый курс: $213 : 25 = 9$ (округляем в бОльшую сторону, так как все студенты должны иметь группу).

Посчитаем общее количество групп: $17 + 12 + 11 + 9 = 49$. Для кодирования 49 символов потребуется 6 бит (так как $2^5 < 49 < 2^6$).

Посчитаем общее количество информации: личный код + номер группы = 11 + 6 = 17 бит.

Задание №9.

В Академии учатся 528 студентов первого курса, 513 студентов второго курса, 499 студентов третьего курса и 478 студентов четвёртого курса. У каждого студента есть бейдж с личным кодом и номером группы. Личный код и номер группы кодируются отдельно друг от друга минимальным количеством бит. Про номер группы известно следующее: в одной группе находятся не более 30 студентов, конечно, студенты, например, с первого и второго курса не могут быть в одной группе. Какое минимальное количество бит потребуется для кодирования информации на бейдже?

Ответ:

18

Решение:

Посчитаем отдельно количество бит для личного кода и номера группы.

1) Личный код. Для начала нужно посчитать количество студентов: $528 + 513 + 499 + 478 = 2018$. В Академии всего 2018 студентов. Посчитаем, какое количество бит нам потребуется. Начнём с одного бита:

1 бит: $2^1 = 2$. 1 бит позволяет закодировать 2 символа.

2 бита: $2^2 = 4$. 2 бита позволяют закодировать 4 символа.

3 бита: $2^3 = 8$. 3 бита позволяют закодировать 8 символов.

4 бита: $2^4 = 16$. 4 бита позволяют закодировать 16 символов.

5 бит: $2^5 = 32$. 5 бит позволяют закодировать 32 символа.

6 бит: $2^6 = 64$. 6 бит позволяют закодировать 64 символа.

7 бит: $2^7 = 128$. 7 бит позволяют закодировать 128 символов.

8 бит: $2^8 = 256$. 8 бит позволяют закодировать 256 символов.

9 бит: $2^9 = 512$. 9 бит позволяют закодировать 512 символов.

10 бит: $2^{10} = 1024$. 10 бит позволяют закодировать 1024 символов.

11 бит: $2^{11} = 2048$. 11 бит позволяют закодировать 2048 символов.

2018 находится между 1024 и 2048. $1024 < 2018 < 2048(2^{10} < 2018 < 2^{11})$. 10 или 11 бит нам взять? Нам же нужно закодировать полностью информацию, нельзя "выкинуть"студента (точнее не нам решать: выкинуть студента или нет), поэтому берём 11 бит.

2) Номер группы. Так как в каждой группе находятся не более 30 человек, а студенты с разных курсов не могут быть в одной группе, то с учётом этих нюансов посчитаем количество групп:

Первый курс: $528 : 30 = 18$ (округляем в бОльшую сторону, так как все студенты должны иметь группу).

Второй курс: $513 : 30 = 18$ (округляем в бОльшую сторону, так как все студенты должны иметь группу).

Третий курс: $499 : 30 = 17$ (округляем в бОльшую сторону, так как все студенты должны иметь группу).

Четвёртый курс: $478 : 30 = 16$(округляем в бОльшую сторону, так как все студенты должны иметь группу).

Посчитаем общее количество групп: $18 + 18 + 17 + 16 = 69$. Для кодирования 69 символов потребуется 7 бит (так как $2^6 < 69 < 2^7$).

Посчитаем общее количество информации: личный код + номер группы = 11 + 7 = 18 бит.