Векторы: с нуля и до олимпиад

14 сентября

Определение 1. *Направленным отрезком* называется упорядоченная пара точек на плоскости. Направленный отрезок с началом в точке A и концом в точке B обозначается $\overline{AB}$ или $\overrightarrow{AB}$. Начало и конец направленного отрезка могут совпадать.

Определение 2. Направленные отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются *эквивалентными*, если $ABDC$ — параллелограмм (возможно, вырожденный).

Эквивалентность направленных отрезков является отношением эквивалентности.

Определение 3. Классы эквивалентности направленных отрезков называются *векторами*. Словосочетание «вектор AB» означает класс эквивалентности, содержащий направленный отрезок $\overline{AB}$.

Определение 4. Векторы называются *коллинеарными*, если направленные отрезки, соответствующие этим векторам, отложенные от одной точки, лежат на одной прямой. Если они при этом лежат на одном луче исходящем из этой точки, то они называются *сонаправленными*. Если на разных — то *противоположно направленными*.

1. (a) Упростите выражение $\overline{AC} + \overline{DE} + \overline{CB} + \overline{EA}$.

(b) Упростите выражение $\overline{CE} - \overline{CA} + \overline{EB} - \overline{DB}$.

2. (a) Пусть AA_1 медиана треугольника ABC. Докажите, что $\overline{AA_1} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC})$.

(b) На стороне BC треугольника ABC выбрана точка A_1 такая, что $\frac{BA_1}{BC} = t$. Докажите, что $\overline{AA_1} = (1-t)\overline{AB} + t\overline{AC}$.

3. Точки M, K, N и L — середины сторон AB, BC, CD и DE пятиугольника $ABCDE$ (не обязательно выпуклого), P и Q — середины отрезков MN и KL. Докажите, что отрезок PQ в четыре раза меньше стороны AE и параллелен ей.

4. [ОММО, 2014] Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Точки M, N, P и Q– середины сторон AB, BC, CD и DE соответственно, точки H и K — середины MP и NQ соответственно. Найдите длину отрезка HK, если $AE = 7$.

5. [Ломоносов, 2016] В треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1– середины сторон BC, $\xrightarrow{AC}$ и AB соответственно. Найдите длину стороны AC, если известно, что сумма векторов $3 \cdot \overrightarrow{AA_1} + 4 \cdot \overrightarrow{BB_1} + 5 \cdot \overrightarrow{CC_1}$ равна вектору с координатами $(2, 1)$.

6. [ОММО, 2022] Точка O является центром окружности, описанной около треугольника ABC со сторонами $BC = 8$ и $AC = 4$. Найдите длину стороны AB, если длина вектора $4\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - 3\overrightarrow{OC}$ равна 10.

Домашнее задание

7. Пусть $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$ — два параллелограмма с общей вершиной. Докажите, что один из векторов $\overline{BB}_1$, $\overline{CC}_1$ и $\overline{DD}_1$ коллинеарен сумме двух других.

8. [ОММО, 2016] В треугольнике ABC с отношением сторон $AB : AC = 5 : 4$ биссектриса угла BAC пересекает сторону BC в точке L. Найдите длину отрезка AL, если длина вектора $4 \cdot \overrightarrow{AB} + 5 \cdot \overrightarrow{AC}$ равна 2016.

9. [ОММО, 2017] Пусть L — точка пересечения диагоналей CE и DF правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной 3. Точка K такова, что $\overrightarrow{LK} = 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

Определите, лежит ли точка K внутри, на границе или вне $ABCDEF$, а также найдите длину отрезка KC.

10. Из медиан треугольника ABC составлен треугольник $A_1B_1C_1$, а из медиан треугольника $A_1B_1C_1$ составлен треугольник $A_2B_2C_2$. Докажите, что треугольники ABC и $A_2B_2C_2$ подобны, и найдите коэффициент подобия.