

Информатика. Простейшие исполнители и алгоритмы

В предыдущих заданиях вы отточили навыки в работе с системами счисления. Они пригодятся и в работе с исполнителями, но главным станет анализ задачи. Цель анализа – сузить область требований, изначально данных в условии, с помощью рассмотрения особенностей отдельной задачи, например: определение программы для получения из одной цифры другой, определение изначального числа, когда дано ограничение на то, что будет получено в результате выполнения алгоритма. Зачастую благодаря анализу возможно свести задачу к решению неравенства.

Иногда встречаются задачи, в которых к числу приписывается какая-либо цифра (в основном 0 или 1, т.к. работа в двоичной системе счисления), остановимся на алгоритме решения такого прототипа поподробнее.

Начнем разбор с десятичной системы счисления. Как вы знаете, умножение числа на 10 (основание СС) добавляет к этому числу в конце ноль, умножение на 10^2 – два нуля и так далее. В общем виде правило работает так: при умножении числа на 10^m к числу приписываются m нулей.

Добавление конкретного числа работает следующим образом: к изначальному числу дописывается столько нулей, сколько разрядов у приписываемого числа, затем к полученному результату *прибавляется* число, которое требовалось приписать. Допустим к числу 50 требуется приписать 20. Рассмотрим алгоритм:

$$50 \cdot 10^2 \rightarrow 5000$$

$$5000 + 20 \rightarrow 5020$$

Аналогично происходит и в других системах счисления. Докажем это на примере двоичной СС. Возьмем число 44, записанное в десятичной СС. При умножении 44_{10} на 2_{10} получится 88_{10} . Переведем 44 и 88 в двоичную СС:

$$44_{10} = 101100_2$$

$$88_{10} = 1011000_2$$

Как можно заметить, на конце появился ноль. Если же мы приписанный справа разряд заменим на 1, прибавив ее, то весь алгоритм в целом будет являться приписыванием 1 к двоичной записи числа 44_{10} .

Таким образом, если число умножить на основание N - ной системы счисления (основание и число записаны в десятичной системе счисления) в степени k , то к N - ричной записи числа допишется k нулей.

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1

У исполнителя Атом есть 2 команды:

1. Прибавить к числу 2.
2. Прибавить к числу 3.

Какое число будет выведено в результате программы 212211 при исходном числе 54?

Ответ

69

Решение

В программе 3 команды 1 и 3 команды 2, значит в сумме к изначальному числу прибавляется $2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 15$. Следовательно ответ: $54 + 15 = 69$

Задача 2

У исполнителя Молекула есть 2 команды:

1. Прибавить к числу 5.
2. Умножить текущее число на 2.

Какое число будет выведено в результате программы 121211 при исходном числе 3?

Ответ

52

Решение

Программа прибавит к числу 5 и умножит текущее число на 2, после чего действия повторятся еще раз. Далее, к числу прибавится 10.

$$3 \rightarrow 16$$

$$16 \rightarrow 42$$

$$42 \rightarrow 52$$

Задача 3

У исполнителя Молекула есть 2 команды:

1. Прибавить к числу 4.
2. Умножить текущее число на x .

Чему будет равен x , если известно, что Молекула осуществил программу 21112 при исходном числе 10, получив 310?

Ответ

5

Решение

Программа умножит изначальное число на x , прибавит $4 \cdot 3 = 12$, После чего опять умножит полученное число на x .

$$10 \rightarrow 10x$$

$$10x \rightarrow 10x + 12$$

$$10x + 12 \rightarrow 10x^2 + 12x$$

Решим уравнение:

$$10x^2 + 12x = 310$$

$$10x^2 + 12x - 310 = 0$$

$$5x^2 + 6x - 155 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 3^2 + 5 \cdot 155 = 784 = 28^2$$

$$x = \frac{-3 + 28}{5} = 5 \text{ (посчитаем сразу нужное)}$$

Задача 4

У исполнителя Планктон есть 2 команды:

1. Прибавить к числу 1.
2. Умножить текущее число на 3.

Напишите программу, состоящую из номеров команд, которая переводит число 3 в 90 ровно за 6 команд.

Ответ

221112

Решение

Удобнее всего будет начать анализ с конечных шагов программы. Для восстановления программы будет выполнять обратные действия, т.е. если команда должна была прибавить число, то обратное к нему - это вычитание, обратное к умножению - это деление.

Число 90 делится на 3, после деления получим число 30.

Число 30 также делится на 3, в результате имеем число 10.

Число 10 не кратно 3, вычтем из него 1 и получим 9.

Поделив 9 на 3, мы получим 3 - число, которое надо было получить, но это произошло за 4 команды, нам же требуется программа из 6 команд.

На этапе получения числа 30 из 90 попробуем отнять из 30 единицу три раза. Получим число 27. Из него можно получить число 3 делением на 3 два раза. В итоге получится ровно 6 команд.

Задача 5

У исполнителя Планктон есть 2 команды:

1. Прибавить к числу 3.

2. Умножить текущее число на 4.

Напишите программу, состоящую из номеров команд, которая переводит число 7 в 184 ровно за 5 команд.

Ответ

12112

Решение

Удобнее всего будет начать анализ с конечных шагов программы. Для восстановления программы будет выполнять обратные действия, т.е. если команда должна была прибавить число, то обратное к нему - это вычитание, обратное к умножению - это деление.

Число 184 кратно 4, поделим его на 4 и получим 46.

Число 46 не делится на 4, вычтем из него 3, результат - число 43.

Число 43 тоже не делится на 4, опять вычтем 3 и получим 40.

Число 40 делится на 4, поделим и получим 10.

Последним действием получим из 10 требуемое число вычитанием 3.

Инвертируем программу, по которой мы получили 7 из 184, в результате получим требуемую в условии программу 12112.

Задача 6

Исполнитель Клон получает на вход четырехзначное число R. По этому числу строится новое число N по следующим правилам:

1. Складываются первая и четвертая, а также вторая и третья цифры исходного числа.

2. Полученные числа без разделителей и других знаков записываются друг за другом в порядке невозрастания.

Пример. Исходное число: 5429. Суммы: $5 + 9 = 14$; $4 + 2 = 6$. Результат: 146.

Найдите наибольшее число R, в результате обработки которого исполнитель выведет число 182.

Ответ

9209

Решение

Поскольку требуется найти наибольшее изначальное число, то наибольшая сумма должна быть суммой первой и четвертой цифр, чтобы в старшем разряде стояло максимальное возможное число.

Проанализировав число 182, можно понять, что были получены 2 суммы: 18

и 2. Числа, из которых можно получить сумму 18 - это две 9, значит первый и четвертый разряды числа R - это две девятки. Числа, из которых можно получить сумму 2 - это 1 и 1 или 2 и 0. Для максимизации изначального числа в паре слагаемых одно из чисел должно быть максимально возможным (оно займет место наибольшего из незанятых разрядов в числе R), но таким, чтобы его можно было дополнить другим до требуемой суммы. Значит нам подходит пара 2 и 0. Число 2 будет стоять на втором месте, а 0 - на третьем. В итоге получим число 9209.

Задача 7

Исполнитель Уходько получает на вход четырехзначное число R. По этому числу строится новое число N по следующим правилам:

1. Складываются первая и третья, а также вторая и четвертая цифры исходного числа.
2. Полученные числа без разделителей и других знаков записываются друг за другом в порядке невозрастания.

Пример. Исходное число: 5429. Суммы: $5 + 2 = 7$; $4 + 9 = 13$. Результат: 137. Найдите наименьшее число R, в результате обработки которого исполнитель выведет число 1212.

Ответ

3399

Решение

Поскольку требуется найти наименьшее изначальное число, то на старших разрядах должны быть наименьшие цифры из возможных в их парах.

Проанализировав число 1212, можно понять, что были получены 2 суммы: 12 и 12. Пара чисел, из которых можно получить сумму 12 может быть разная. Для минимизации изначального числа в паре слагаемых одно из чисел должно быть максимально возможным (оно займет место наименьшего разряда в числе R), но таким, чтобы его можно было дополнить другим до требуемой суммы. Значит нам подходит пара 9 и 3. Числа 3 будут стоять на первом и втором местах, а числа 9 - на третьем и четвертом. В итоге получим число 3399.

Задача 8

Исполнитель Пескоед получает на вход четырехзначное число R. По этому числу строится новое число N по следующим правилам:

1. Складываются первая и вторая, а также третья и четвертая цифры исходного числа.
2. Полученные числа без разделителей и других знаков записываются друг за

другом в порядке неубывания.

Пример. Исходное число: 5429. Суммы: $5 + 4 = 9$; $2 + 9 = 11$. Результат: 911. Найдите наибольшее число R, в результате обработки которого исполнитель выведет число 716.

Ответ

9770

Решение

Поскольку требуется найти наибольшее изначальное число, то наибольшая сумма должна быть суммой первой и второй цифр, чтобы в старшем разряде стояло максимальное возможное число.

Проанализировав число 716, можно понять, что были получены 2 суммы: 7 и 16. Пара чисел, из которых можно получить сумму 16 может быть разная. Для максимизации изначального числа в паре слагаемых одно из чисел должно быть максимально возможным (оно займет место старшего разряда в числе R), но таким, чтобы его можно было дополнить другим до требуемой суммы. Значит нам подходит пара, где одна из цифр максимальная - 9, а вторая ее дополняет до 16 - 7. Число 9 займет старший разряд, число 7 - следующий. Аналогично проанализировав сумму 7, получим числа 7 и 0. Число 7 будет стоять на третьем месте, 0 - на четвертом. В итоге имеем число 9770.

Задача 9

Исполнитель Пескоед получает на вход два двузначных числа. По этим числам строится новое число по следующим правилам:

1. Старшие разряды перемножаются.
2. Младшие разряды складываются.
3. Полученные числа без разделителей и других знаков записываются друг за другом в порядке неубывания.

Пример. Исходные числа: 54 и 29. Суммы: $5 \cdot 2 = 10$; $4 + 9 = 13$. Результат: 1013.

Найдите наибольшую сумму изначальных чисел, в результате обработки которых исполнитель выведет число 1442.

Ответ

154

Решение

Поскольку требуется найти наибольшую сумму изначальных чисел, то их старшие разряды должны иметь наибольшую сумму сами по себе (как отдельные

числа).

Проанализировав число 1442, можно понять, что были получено 2 числа: 14 и 42, т.к. максимальное число, которое возможно получить при перемножении двух цифр (81), намного меньше 442, а по-другому поделить число 1442 не получится, потому что условие неубывания нарушится.

Что было результатом умножения, а что - результатом сложения, определяется однозначно, т.к. 42 можно получить только умножением цифр 6 и 7.

Младшие разряды можно не определять, поскольку для ответа важна лишь сумма изначальных чисел. Сложение многозначных чисел можно рассматривать как поразрядное сложение, например, если требуется сложить 65 и 27, то можно отдельно сложить 60 и 20, 5 и 7, и сложить две полученные из этих пар суммы.

Таким образом сложим 60 и 70 и прибавим к полученному результату сумму младших разрядов (14). Итоговое число - это $60 + 70 + 14 = 154$.

Задача 10

Исполнитель Пескоед получает на вход два двузначных числа. По этим числам строится новое число по следующим правилам:

1. Старшие разряды перемножаются.
2. Младшие разряды складываются.
3. Полученные числа без разделителей и других знаков записываются друг за другом в порядке неубывания.

Пример. Исходные числа: 54 и 29. Суммы: $5 \cdot 2 = 10$; $4 + 9 = 13$. Результат: 1013.

Найдите наибольшую сумму изначальных чисел, в результате обработки которых исполнитель выведет число 1415.

Ответ

105

Решение

Поскольку требуется найти наибольшую сумму изначальных чисел, то их старшие разряды должны иметь наибольшую сумму сами по себе (как отдельные числа).

Проанализировав число 1415, можно понять, что были получены 2 числа: 14 и 15, т.к. максимальное число, которое возможно получить при перемножении двух цифр (81), меньше 415, а по-другому поделить число 1415 не получится, ибо условие неубывания нарушится.

Что было результатом умножения, а что - результатом сложения, не опреде-

ляется однозначно, поэтому следует понять, что будет выгоднее всего иметь в качестве старших разрядов.

Несмотря на то что 15 само по себе больше 14, сумма множителей больше у 14: 3 и 5 (сумма 8) против 7 и 2 (сумма 9). Значит для максимизации суммы изначальных чисел выгоднее взять 14 как результат умножения.

Младшие разряды можно не определять, поскольку для ответа важна лишь сумма изначальных чисел. Сложение многозначных чисел можно рассматривать как поразрядное сложение, например, если требуется сложить 65 и 27, то можно отдельно сложить 60 и 20, 5 и 7, и сложить две полученные из этих пар суммы.

Таким образом сложим 20 и 70 и прибавим к полученному результату сумму младших разрядов (15). Итоговое число - это $20 + 70 + 15 = 105$.

Задача 11

Исполнитель Машина получает на вход натуральное число R и преобразует его в новое число N с помощью следующего алгоритма:

1. Строится двоичная запись числа $4R$.
2. К этой записи дописываются два разряда по следующему правилу:
 - а. Все цифры инвертируются, рассчитывается их сумма и к двоичной записи, полученной на первом шаге алгоритма, приписывается остаток от деления суммы на 2.
 - б. Если полученное число четное, то к текущей записи приписывается 1, если нечетное – то приписывается 0.

Полученная запись является двоичной записью искомого числа N . Найдите минимальное число R , которое после работы программы преобразуется в число большее 160. Ответ дайте в десятичной системе счисления.

Примечание. Запись $4R$ означает, что R было умножено на 4.

Ответ

10

Решение

Умножая число R на 4, мы приписываем к двоичной записи этого числа два нуля (поскольку 4 - это основание рассматриваемой системы счисления в степени 2). Если сумма инвертированных цифр четна, то дополнительно дописывается 01, если нечетна - дописывается 10.

Переведем число 193 из десятичной системы счисления в двоичную:

$$160_{10} = 10100000_2$$

Отбросим последние два разряда. Сумма инвертированных цифр полученного

числа (101000) четна, значит на втором шаге алгоритма к числу приписалось бы 01. Получается, что отличие от двоичной записи числа 160 заключается в последней цифре. Т.к. у 160 эта цифра меньше, то число $N = 161$ нам подходит. Оно получается из числа 10 (отбросим два нуля от 101000, и получим двоичную запись числа 10).