5-часовой веб по графам. С нуля до Леммы Холла и задач со Всеросса

24 июня

Определение 1. *Графом* называется множество точек (*вершин*), некоторые из которых соединены линиями (*ребрами*).

1. В некотором государстве 100 городов, из которых выходит по 3 дороги, и 100 городов, из которых выходит по 4 дороги. Сколько дорог всего в этом государстве?

Определение 2. *Степенью* вершины графа называется количество выходящих из вершины ребер.

Рисуем графы.

2. В углах доски 3×3 стоят кони: по 2 коня черного и белого цветов, причем кони одного цвета стоят в противоположных углах. За один ход разрешается выбрать любого коня и сделать им ход в свободную клетку. Можно ли переставить коней так, чтобы по прежнему все кони стояли в углах, но кони одного цвета стояли в углах при одной стороне?

3. [ОММО, 2020] Пете необходимо спаять электрическую схему, состоящую из 10 чипов, соединённых между собой проводами (один провод соединяет два различных чипа; два чипа может соединять не более одного провода), при этом из одного чипа должно выходить 9 проводов, из одного — 8, из одного — 7, из двух — по 5 , из трёх — по 3 , из одного — 2, из одного — 1. Может ли Петя спаять такую схему?

Лемма о рукопожатиях. В графе количество вершин нечетной степени четно.

Переформулировка леммы. Сумма степеней вершин графа равна удвоенному числу ребер.

4. Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?

5. Дима выписал на доску первые 20 простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, ... Серёжа хочет соединить эти числа рёбрами так, чтобы из каждого числа выходило столько рёбер, какова величина этого числа. Два числа могут быть соединены несколькими рёбрами. Удастся ли Серёже осуществить желаемое?

Определение 3. Граф называется *связным*, если от любой его вершины можно добраться до любой другой.

6. В королевстве из каждого города выходит 100 дорог, причем из каждого города можно доехать до любого другого. Одну дорогу закрыли на ремонт. Докажите, все еще от каждого города можно добраться до любого другого.

7. Можно ли все рёбра полного графа с 55 вершинами раскрасить в 54 цвета таким образом, чтобы все рёбра, выходящие из одной вершины, были разного цвета?

8. Любой из 102 учеников математического кружка знаком хотя бы с 68 другими. Докажите, что найдутся четыре человека, имеющие одинаковое число знакомых.

Ищем подходящие конструкции.

9. В классе 20 учеников, причём каждый дружит не менее, чем с 14 другими. Можно ли утверждать, что найдутся четыре ученика, которые все дружат между собой?

10. На конференции присутствуют 50 учёных, каждый из которых знаком по крайней мере с 25 участниками конференции. Докажите, что найдутся четверо из них, которых можно усадить за круглый стол так, чтобы каждый сидел рядом со знакомыми ему людьми.

11. [Курчатов, 2017, 8 класс] В математическом конкурсе участвуют 14 школьников. Участникам конкурса было предложено 6 задач. В результате каждую задачу правильно решили больше половины школьников. Докажите, что обязательно найдётся пара участников, которые в объединении правильно решили все задачи.

Задачи на подсчёт, иногда двойной.

12. [Высшая Проба, 2017, 9 класс] Каждый член партии доверяет пяти однопартийцам, но никакие двое не доверяют друг другу. При каком минимальном размере партии такое возможно?

13. В классе некоторые ученики дружат, некоторые нет. Известно, что у любых двух друзей есть ровно 5 общих друзей. Докажите, что количество пар друзей делится на 3.

14. [Ломоносов, 2016, 7–9 класс] В одном интернет-сообществе каждый из участников имеет ровно 22 друга (дружба обоюдная). При этом если два члена сети дружат, то у них нет общих друзей, а если не дружат, то у них ровно 6 общих друзей. Сколько человек в этом интернет-сообществе?

Ранжирование графов.

15. В стране из каждого города выходит не более 4 дорог. Также известно, что между любыми двумя городами существует путь, проходящий не более чем по двум другим городам. Докажите, что в этой стране не более 53 городов.

Определение 4. Назовём *подвешиванием (ранжированием)* графа следующую процедуру. Выберем любую вершину графа. Назовём её нулевым уровнем (рангом). На первом уровне расположим все вершины, соединённые с вершиной нулевого уровня. На каждом следующем уровне будем располагать все вершины, соединённые с вершинами предыдущего уровня и не расположенные на более ранних уровнях. Процесс продолжается, пока все вершины не расположатся на уровнях.

16. Докажите, что в любом связном графе найдётся вершина, при удалении которой оставшийся граф будет связным.

17. Степень всех вершин графа не меньше n, причем в нем нет циклов длины 3, 4 и 5. Докажите, что в нем найдутся n^2-n вершин, никакие две из которых не соединены между собой.

Определение 5. Граф называется *двудольным*, если все вершины этого графа можно разбить на две доли так, чтобы рёбрами были соединены только вершины разных долей.

18. Докажите, что граф является двудольным тогда и только тогда, когда в нём нет нечётных циклов.

19. [Всеросс, 1993, округ, 11.8] В стране 1993 города, и из каждого выходит не менее 93 дорог. Известно, что из каждого города можно проехать по дорогам в любой другой. Докажите, что это можно сделать не более, чем с 62 пересадками. (Дорога соединяет между собой два города.)

Гуляем по графу.

20. В графе степень каждой вершины равна 2. Докажите, что все рёбра этого графа можно разбить на непересекающиеся циклы.

21. В графе степень каждой вершины не меньше $k \geqslant 2$. Докажите, что в этом графе существует простой цикл длины не меньше $k+1$.

22. В Однобоком графстве между некоторыми (но, к сожалению, еще не между всеми) усадьбами проложены дороги с односторонним движением. При этом при появлении любой новой дороги (также с односторонним движением) между усадьбами, не соединенными дорогой до этого, оказывается, что от любой усадьбы до любой другой можно добраться, не нарушая правил. Докажите, что такая возможность имеется уже сейчас.

23. Степени всех вершин графа не меньше 3. Докажите, что в нем существует хотя бы один чётный цикл.

Паросочетания.

Определение 6. Набор ребер в графе называется *паросочетанием*, если они не имеют общих вершин.

24. 200 теннисистов сыграли 140 партий так, что каждый участвовал хотя бы в одной. Докажите, что найдутся 60 партий, в которых участвовали 120 различных теннисистов.

25. Дан граф на $2n$ вершинах, степень каждой вершины не меньше n. Докажите, что в графе можно выделить паросочетание на всех вершинах.

26. [Одна задача, чтобы стать призёром Турнира Городов-2009] Оля и Максим оплатили путешествие по архипелагу из 2009 островов, где некоторые острова связаны двусторонними маршрутами катера. Они путешествуют, играя. Сначала Оля выбирает остров, на который они прилетают. Затем они путешествуют вместе на катерах, по очереди выбирая остров, на котором еще не были (первый раз выбирает Максим). Кто не сможет выбрать остров, проиграл. Докажите, что Оля может выиграть.

27. [Лемма Холла.] Пусть дан двудольный граф, состоящий из n синих вершин и скольких-то красных вершин. Тогда в этом графе можно выделить паросочетание, содержащее все синие вершины, тогда и только тогда, когда для любого числа $k (1 \leqslant k \leqslant n)$ из любых k синих вершин выходят ребра по крайней мере в k красных вершин.

Доказательство 1. Назовем множество из k парней критическим, если они знакомы ровно с k девушками в совокупности. Рассмотрим минимальное критическое множество и попробуем кого-нибудь поженить.

Доказательство 2. Рассмотрим максимальное паросочетание. Назовем неудачниками тех t юношей, которых мы не смогли поженить. По условию, они знакомы хотя бы с t девушками. Но всех тех девушек мы обязаны были женить, добавим их мужей к тем t неудачникам, и так далее.

28. Каждый из двух равновеликих квадратов разбит на 100 равновеликих частей. Докажите, что можно сложить эти квадраты в стопку и проткнуть в 100 точках так, чтобы каждая из 100 частей каждого из квадратов была проткнута.

29. Даны n мальчиков и $2n-1$ конфета. Докажите, что можно дать каждому мальчику по конфете так, чтобы мальчику, которому не нравится его конфета, не нравились и конфеты остальных мальчиков (чтобы не создавать предпосылок для драки).

30. [Самая сложная задача Всеросса–2006)] В лагерь приехало несколько пионеров, каждый из них имеет от 50 до 100 знакомых среди остальных. Докажите, что пионерам можно выдать пилотки, покрашенные в 1331 цвет так, чтобы у знакомых каждого пионера были пилотки хотя бы 20 различных цветов.