# Теория вероятностей

## Содержание

# 1 Базовые понятия теории вероятностей

Во всех задач на теорию вероятностей мы имеем дело с некоторым *случайным экспериментом.* Бросок кубика, вытаскивание шариков из коробки вслепую, вытягивание билета на экзамене, все это — случайные эксперименты.

**Определение** *Случайный эксперимент* — это любой эксперимент или событие из реальной жизни, результат которого невозможно точно предсказать.

**Определение** Реализация случайного эксперимента приводит к одному из *элементарных исходов.* Множество всех элементарных исходов случайного эксперимента называют *пространством элементарных исходов.*

Например, при броске обычного шестигранного кубика возможны шесть элементарных исходов: выпало 1 очко, выпало 2 очка, ..., выпало 6 очков. Вероятностным пространством будет множество $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Пока мы будем рассматривать эксперименты с конечным числом элементарных исходов.

**Определение** Каждому элементарному исходу соответствует некоторое неотрицательное число — *вероятность* его возникновения. Сумма вероятностей всех элементарных исходов случайного эксперимента должна равняться 1.

Так, если в примере с кубиком все значения выпадают **равновероятно**, то вероятности всех шести элементарных исходов равны между собой и в сумме дают 1 (по определению вероятности), значит,

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = \frac{1}{6}$$

**Далеко не во всех** случайных экспериментах элементарные исходы **равновероятны!**

**Определение** *Событием* называют любое подмножество пространства элементарных исходов.

При броске кубика событию (в житейском понимании этого слова) «выпало четное количество очков» соответствует подмножество $\{2; 4; 6\}$ вероятностного пространства $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

**Определение** События называют *несовместными*, если у них нет ни одного общего элементарного исхода.

События «выпало четное число очков» и «выпало нечетное число очков» несовместны, ведь им соответствуют множества $\{2; 4; 6\}$ и $\{1; 3; 5\}$, пересечение которых пусто.

Напротив, события «выпало четное число очков» и «выпало число очков, кратное 3» **не являются** несовместными, так как соответствующие им множества $\{2; 4; 6\}$ и $\{3; 6\}$ имеют общий элементарный исход — выпадение шестерки.

**Важно!** Из определения очевидно следует, что любые два различных элементарных исхода несовместны.

**Ключевой факт, которым мы пользуемся во всех задачах**

Если события $A$ и $B$ **несовместны**, то вероятность того, что произойдет хотя бы одно из них, равна сумме их вероятностей. Так как мы знаем, что $A$ и $B$ — это на самом деле множества, а формулировка «хотя бы одно» означает их объединение, можем записать следующим образом

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

В частности, получаем, что вероятность события равна сумме вероятностей всех элементарных исходов, из которых оно состоит (т.к. они все между собой несовместны).

**№1**

На экзамене по геометрии школьник отвечает на один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос по теме «Тригонометрия», равна 0,1. Вероятность того, что это вопрос по теме «Внешние углы», равна 0,15. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

**Ответ**

0,25

**Решение**

Пусть событие $A$ — это получение вопроса по тригометрии, а событие $B$ — получение вопроса по внешним углам. В условии сказано, что нет вопросов, относящихся к обоим темам, следовательно, события $A$ и $B$ несовместны, и вероятность того, что произойдет хотя бы одно из них, равна сумме их вероятностей. Тогда

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0{,}1 + 0{,}15 = 0{,}25$$

**№2**

В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

**Ответ**

0,52

**Решение**

В конце дня могло возникнуть четыре различных ситуации:

- кофе остался в обоих автоматах $(++)$;
- кофе закончился только в первом автомате $(-+)$;
- кофе закончился только во втором автомате $(+-)$;
- кофе закончился в обоих автоматах $(--)$.

Это и есть ни что иное, как наши четыре элементарных исхода. По условию для каждого автомата по отдельности вероятность того, что в нем закончится кофе, равна 0,3. Значит, событию «кофе закончилось в первом автомате», которое состоит из элементарных исходов $\{(-+);(--)\}$, соответствует вероятность 0,3. Событию «кофе закончится в обоих автоматах» соответствует ровно один элементарный исход $(--)$. Тогда

$$P((-+)) = P(\{(-+);(--)\}) - P((--)) = 0{,}18$$

По аналогичным соображениям

$$P((+-)) = P(\{(+-);(--)\}) - P((--)) = 0{,}18$$

Теперь легко найти вероятность интересующего нас элементарного исхода «кофе остался в обоих автоматах $(++)$»

$$P(\{(++);(-+);(+-);(--)\}) - P((-+)) - P((+-)) - P((--)) = 1 - 0{,}18 - 0{,}18 - 0{,}12 = 0{,}52$$

## 2 Условная вероятность

**№3**

Игральную кость бросили два раза. Известно, что два очка не выпали ни разу. Найдите при этом условии вероятность события «сумма выпавших очков окажется равна 4».

**Ответ**

0,08

**Решение 1 через погружение в новое пространство**

Рассмотрим все возможные элементарные исходы в эксперименте с броском двух кубиков. Это всевозможные пары натуральных чисел, где первое число пары — число очков, выпавших на первом кубике, второе число пары — число очков, выпавших на втором кубике. Каждое число пары может принимать одно из шести значений $\{1;2;3;4;5;6\}$, тогда общее количество элементарных исходов равно $6\cdot 6=36$, все они **равновероятны**.

Нам известно, что два очка не выпало ни разу. Это условие погружает нас в новое пространство элементарных исходов, меньшее, чем изначальное, в котором больше нет исходов с двойкой, они нереализуемы. Элементарные исходы с двойкой:

$$\begin{array}{ll}(1;2) & (2;1)\\ (2;2) & \\ (3;2) & (2;3)\\ (4;2) & (2;4)\\ (5;2) & (2;5)\\ (6;2) & (2;6)\end{array}$$

Их всего 11, тогда в новом пространстве всего $36-11=25$ элементарных исходов. Найдем все элементарные исходы нового пространства, в которых сумма очков равна 4 — это только $(1;3)$ и $(3;1)$, ведь исхода $(2;2)$ нет в нашем новом пространстве. Все исходы нового пространства также равновероятны, тогда вероятность события $\{(1;3);(3;1)\}$ «сумма выпавших очков окажется равна 4» равна отношению числа элементарных исходов в нем к общему количеству элементарных исходов

$$P=\frac{2}{25}=0{,}08$$

**Решение 2 через формулу условной вероятности**

**Определение** *Условной вероятностью* события $A$ при условии события $B$ называют отношение вероятности того, что события $A$ и $B$ произошли одновременно и вероятности события $B$. Здесь, конечно, вероятность $B$ должна быть больше нуля. В виде формулы:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

Пусть событие $A$ — «сумма выпавших очков окажется равна 4», ему соответствует множество $\{(1;3);(2;2);(3;1)\}$ элементарных исходов. Событие $B$ — «два очка не выпали ни разу», ему соответствует множество всех элементарных исходов пространства, кроме тех, которые содержат 2, в первом решении мы посчитали, что таких исходов 25. По определению условной вероятности

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Событие $A \cap B$ содержит все исходы события $A$, кроме тех, в которых есть двойка, то есть $A \cap B = \{(1;3);(3;1)\}$. Так как элементарные исходы в нашей задаче равновероятны, получим

$$P(A \cap B) = \frac{2}{36}$$
$$P(B) = \frac{25}{36}$$
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \left(\frac{2}{36}\right) / \left(\frac{25}{36}\right) = \frac{2}{25} = 0{,}08$$

**№4**

Первый игральный кубик обычный, а на гранях второго кубика нет нечетных чисел, а четные числа 2, 4 и 6 встречаются по два раза. В остальном кубики одинаковые. Один случайно выбранный кубик бросают два раза. Известно, что в каком-то порядке выпали 4 и 6 очков. Какова вероятность того, что бросали первый кубик?

**Ответ**

$0,2$

**Решение**

Выпишем все исходы, когда выпали 4 и 6 очков в некотором порядке. Остальные исходы нас не интересуют, ведь из условия известно, что событие «в каком-то порядке выпали 4 и 6 очков» уже произошло, и мы погружаемся в новое пространство элементарных исходов. В случае, если был выбран первый кубик, таких исходов всего два: $(4,6)$ и $(6,4)$. В случае, если был выбран второй кубик, таких исходов восемь: $(4_1,6_1)$, $(4_1,6_2)$, $(4_2,6_1)$, $(4_2,6_2)$, $(6_1,4_1)$, $(6_1,4_2)$, $(6_2,4_1)$, $(6_2,4_2)$. Индексами показано, что на втором кубике есть две шестерки и две четверки. Все 10 перечисленных исходов равновероятны, среди них 2 соответствуют выбору первого кубика, значит, искомая вероятность равна $\frac{2}{10} = 0,2$.



## 3 Цепочки событий. Теорема об умножении вероятностей

**№5**

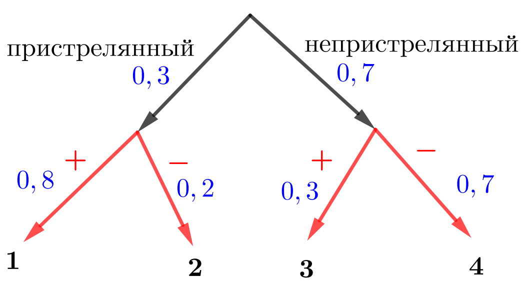
Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью $0,8$, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью $0,3$. На столе лежат 10 револьверов, из них только 3 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнется.

**Ответ**

0,55

**Решение 1**

Изобразим все возможные последовательности событий с помощью дерева.



Всего возможны четыре элементарных исхода:

1. Джон схватил пристрелянный револьвер и попал;
2. Джон схватил пристрелянный револьвер и не попал;
3. Джон схватил непристрелянный револьвер и попал;
4. Джон схватил непристрелянный револьвер и не попал.

Нам нужно найти вероятность события, что Джон промахнется, оно содержит элементарные исходы 2 и 4. Из 10 револьверов 3 пристрелянные, значит, Джон схватит пристрелянный с вероятностью 0,3, а непристрелянный с вероятностью 0,7.

Найдем вероятность исхода 2. Она равна произведению вероятностей на всех стрелках на пути к исходу 2, т.е. $P(2) = 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}06$. По аналогичным соображениям вероятность исхода 4 равна $P(4) = 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}49$. Тогда вероятность события, что Джон промахнется, равна сумме вероятностей элементарных исходов, составляющих это событие

$$P(-) = P(2) + P(4) = 0{,}06 + 0{,}49 = 0{,}55$$

**Решение 2 через теорему об умножении вероятностей**

**Теорема об умножении вероятностей**

Преобразовав формулу условной вероятности для событий $A$ и $B$, где $P(B) \neq 0$, получим

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

Обозначим через $A$ событие «Джон схватил пристрелянный пистолет», через $\overline{A}$ — «Джон схватил непристрелянный пистолет», через $B$ — «Джон попал», через $\overline{B}$ — Джон не попал.

В первом решении мы объяснили, что $P(A) = 0{,}3$, $P(\overline{A}) = 0{,}7$. Нам нужно найти вероятность события $\overline{B}$, его можно представить как объединение несовместных событий $(\overline{B} \cap A) \cup (\overline{B} \cap \overline{A})$, ведь когда Джон промахнулся, он стрелял либо из пристрелянного, либо из непристрелянного револьвера, других вариантов нет.

Найдем вероятность события $\overline{B} \cap A$, учитывая, что по условию вероятность $P(\overline{B}|A)$, т.е. промаха из пристрелянного, равна $1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

$$P(\overline{B} \cap A) = P(A) \cdot P(\overline{B}|A) = 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}6$$

Найдем вероятность события $\overline{B} \cap \overline{A}$, учитывая, что по условию вероятность $P(\overline{B}|\overline{A})$, т.е. промаха из непристрелянного, равна $1 - 0{,}3 = 0{,}7$.

$$P(\overline{B} \cap \overline{A}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}|\overline{A}) = 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}49$$

Суммируя полученные вероятности, получаем ответ 0,55.

**№6**

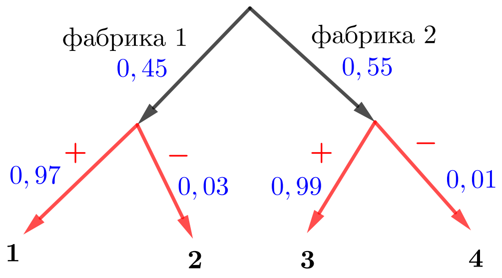
Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стекол, вторая — 55%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, а вторая — 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

**Ответ**

0,019

**Решение**

Нарисуем дерево как в предыдущей задаче.




Нас интересуют исходы 2 и 4, когда стекло бракованное. Мы уже знаем, что вдоль цепочки событий можно умножать.

Вероятность исхода 2 равна $p_2 = 0,45 \cdot 0,03 = 0,0135$.

Вероятность исхода 4 равна $p_4 = 0,55 \cdot 0,01 = 0,0055$.

Тогда вероятность того, что случайно купленное стекло — бракованное, равна сумме вероятностей $p = p_2 + p_4 = 0,019$.

**№7**

В коробке 11 синих, 6 красных и 8 зеленых фломастеров. Случайным образом выбирают два фломастера. Какова вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастер?

**Ответ**

0,22

**Решение**

Из всех возможных элементарных исходов нам подходят два:

- сначала взяли синий, затем красный $(c, k)$;
- сначала взяли красный, затем синий $(k, c)$.

Всего фломастеров 25. Вероятность первым взять красный равна $\frac{6}{25}$, т.к. мы выбираем фломастеры равновероятно. Вероятность взять синий, **при условии, что один красный уже взят**, равна $\frac{11}{24}$, потому что из оставшихся 24 фломастеров 11 синих. Тогда вероятность цепочки

$$P(k, c) = \frac{6}{25} \cdot \frac{11}{24} = 0{,}11$$

Вероятность первым взять синий равна $\frac{11}{25}$. Вероятность взять красный, **при условии, что один синий уже взят**, равна $\frac{6}{24}$, потому что из оставшихся 24 фломастеров 6 красных. Тогда вероятность цепочки

$$P(c, k) = \frac{11}{25} \cdot \frac{6}{24} = 0{,}11$$

Складывая вероятности этих элементарных исходов, получаем вероятность 0,22 того, синий и красный взяты в произвольном порядке.

## 4 Независимые события

События $A$ и $B$ называются независимыми, если вероятность одного из них не зависит от исхода второго, т.е. обычная вероятность $P(A)$ события $A$ равна условной вероятности $P(A|B)$ и аналогично $P(B) = P(B|A)$. Если в теорему об умножении вероятностей

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

подставить $P(A|B) = P(A)$, то получим классическое определение независимых событий:

**Определение** События $A$ и $B$ называются независимыми тогда и только тогда, когда

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A)$$

Фактически независимость в условии задачи позволяет нам напрямую перемножать вероятности событий, чтобы получить вероятность их пересечения, не находя условную вероятность. Классические примеры независимых событий (где независимость негласно подразумевается): последовательные броски кубика (вероятности выпадения чисел в каждом следующем броске не зависит от результатов предыдущих бросков), многократные подбрасывания монетки, да и многие другие одинаковые действия повторенные несколько раз.

**№8**

Стрелок в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не попадет в нее. Вероятность попадания при каждом отдельном выстреле равна $p = 0{,}6$. Найдите вероятность того, что стрелку потребуется ровно три попытки.

**Ответ**

0,096

**Решение**

Чтобы стрелок сделал ровно три попытки, он должен промахнуться первые два раза и попасть на третий. Вероятность промахнуться $1 - p = 0{,}4$. Получаем $0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}096$. Мы можем перемножать веротности, потому что в условии сказано, что вероятность попадания при каждом отдельном выстреле равна 0,6, т.е. не зависит от результатов других выстрелов.