

## Веб 29. Логарифмы–1. Уравнения: с нуля и до олимпиад

19 июня

**Определение 1.** Логарифмом числа  $b$  по основанию  $a$  (обозначение:  $\log_a b$ ) называют такое число  $c$ , что  $a^c = b$ . ОДЗ:  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $b > 0$ .

**Топ-9** полезных свойств логарифмов, работающих на ОДЗ:

1. Логарифм произведения:  $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$ .

2. Логарифм частного:  $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ .

3. Логарифм степени:  $\log_a b^k = k \log_a b$ .

4. Логарифм степени основания:  $\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \log_a b$ .

5. “Обратный” логарифм:  $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ .

6. Переход к новому основанию:  $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ .

7. “Башенка”:  $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ .

8. При  $a > 1$  функция  $\log_a x$  является *возрастающей*.

9. При  $a < 1$  функция  $\log_a x$  является *убывающей*.

1. Вычислите  $2^{\log_2 \sqrt{2} 15}$ .

2. Найдите  $(16/25)^{\log_{125/64} 3}$ .

3. Решите уравнение  $\log_2 \left( (x^2 - 4x)^2 \right) = 2 \log_2(18 - 5x)$ .

4. Решите уравнение  $\log_x 3 + \log_3 x = \log_{\sqrt{x}} 3 + \log_3 \sqrt{x} + 0,5$ .

5. Решите уравнение

$$\frac{1}{2} \log_2 (x^2) + \log_2 (x - 6) = 4.$$

6. Решите уравнение

$$\sqrt{\log_x \sqrt{2x}} \cdot \log_4 x = -1.$$

7. Решить уравнение  $5^{\log_2 x} + 2x^{\log_2 5} = 15$ .

8. [Физтех, 2014] Решите уравнение

$$\log_{2^{x+1}+1} (3x^2 + 4x - 3) = \log_{10-2^{2-x}} (3x^2 + 4x - 3).$$

9. [ПВГ, 2016] Решите уравнение

$$\sqrt{\log_x \sqrt{2x}} \cdot \log_2 x = -1.$$

10. [Физтех, 2014] Решите уравнение

$$\log_{7x-6} (7x^2 + x - 6) \cdot \log_{x+1} (x^3 + 1) = \log_{7x-6} (7x^2 + x - 6) + \log_{x+1} (x^3 + 1).$$

11. [Физтех, 2015] Решите уравнение

$$x^{\log_3(27x^2)} = \frac{x^9}{81}.$$

12. [ПВГ, 2019] Решите уравнение

$$\log_{2/9} 2 = (\log_x 2) \cdot (\log_{4x} 2) \cdot (\log_{9x} 2).$$

**Домашнее задание**

13. Решите уравнение  $\log_{5-x} (2x^2 - 5x + 31) = 2$ .

14. Решите уравнение

$$\log_{49} (2x^2 + x - 5) + \log_{\frac{1}{7}} (1 + x) = 0.$$

15. Решите уравнение  $\log_{4x+1} 7 + \log_{9x} 7 = 0$ .

16. Решите уравнение  $\log_3 (3^x - 8) = 2 - x$ .

17. [Физтех, 2013] Решите уравнение

$$\log_{5x} (x^2 + 9x + 15) + \log_{125x} x^3 = \frac{2}{x}.$$

18. [ПВГ, 2016] Решите уравнение

$$(1 - \log_2 x) \cdot \sqrt{\log_{\frac{x}{2}} \sqrt{x}} = 1.$$