

Свойства логарифмов

Определение Логарифм по основанию a от b —это число t , которое показывает, в какую степень нужно возвести a , чтобы получить b . Таким образом, выполняется основное логарифмическое тождество:

$$\forall a > 0, a \neq 1, b > 0: a^t = b \Leftrightarrow \log_a b = t$$

Здесь a называется основанием логарифма, а b —аргументом логарифма.

Свойство 0 $a^{\log_a b} = b$

Свойство 1 $\log_b a + \log_b c = \log_b ac$

Свойство 2 $\log_b a - \log_b c = \log_b \frac{a}{c}$

Свойство 3 $\log_b a^r = r \log_b a$

Свойство 4 $\log_{b^r} a = \frac{1}{r} \log_b a$

Свойство 5 $\log_b a \cdot \log_a c = \log_b c$

Свойство 6 $\log_b a \cdot \log_a b = 1$

Свойство 7 $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}, a \neq 1$

Свойство 8* $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

Свойство 9 $\frac{\log_b a}{\log_b c} = \log_c a$

Задачи: Блок 1

1. Найдите значение выражения $(\log_{17} 289) \cdot (\log_{500} \frac{1}{500})$.
2. Найдите значение выражения $16^{\log_2 5}$.
3. Найдите значение выражения $\log_{11} 242 - \log_{121} 4$.
4. Найдите значение выражения $\frac{\log_{15} 1000}{\log_{225} 10^4}$.
5. Найдите значение выражения $\log_7 144 \cdot \log_{12} 343$.
6. Найдите значение выражения $3^{\log_5 2} - 2^{\log_{25} 9}$.
7. Найдите значение выражения $(3 - \log_5 7) \left(\log_{\frac{125}{7}} 400 + \log_{\frac{7}{125}} 80 \right)$.
8. Найдите значение выражения $\log_{\frac{1}{3}} (\log_{11} 1331)$.
9. Найдите значение выражения $49^{1 - \log_7 2} + 5^{-\log_5 4}$.
10. Найдите значение выражения $81^{\frac{1}{\log_5 3}} + 27^{\log_9 36} + 3^{\frac{4}{\log_7 9}}$.
11. Найдите значение выражения $-\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt[4]{2}}$.
12. Найдите значение выражения $-\log_3 \log_3 \sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}$.
13. Найдите значение выражения $\log_b a^2 b^7$, если $\log_a b = 8$.
14. Найдите значение выражения $\log_{x^2} \left(\frac{x^2}{y^3} \right)$, если $\log_y x = 10$.
15. Найдите значение выражения $\log_{x^3} \left(\frac{x^2}{y^5} \right)$, если $\log_x y = 4$.
16. Найдите значение выражения $\log_2 \frac{\sqrt[4]{a^3 b}}{\sqrt[3]{ab^2}}$, если $\log_2 a = 12, \log_2 b = 6$.

Задачи: Блок 2

17. Найдите корень уравнения $\log_4(10 + 2x) = 3$.
18. Найдите корень уравнения $\log_{0,5}(2x - 5) = -2$.
19. Найдите корень уравнения $\log_2(x + 6) = 5$.
20. Найдите корень уравнения $\log_{12}(2x - 10) = 1$.
21. Найдите корень уравнения $\log_4(x + 1) = 3$.
22. Найдите корень уравнения $\log_3(x - 4) = \log_3 4$.
23. Найдите корень уравнения $\log_7(3x - 1) = \log_7 2$.
24. Найдите корень уравнения $\log_5(-x) = \log_5 4$.
25. Найдите корень уравнения $\log_8(9x - 18) = \log_8 36$.
26. Найдите корень уравнения $\log_2(x + 1) = \log_2(12 - 3x)$.
27. Найдите корень уравнения $\log_3(2 - x) = \log_3(2 + x)$.
28. Найдите корень уравнения $\log_{100}(2015x + 1) = \log_{100}(2016x + 1)$.
29. Найдите корень уравнения $\log_\pi(7 - 5x) = 2 \log_\pi 9$.
30. Найдите корень уравнения $\log_{\frac{2}{7}}(x + 12) = -2$.
31. Найдите корень уравнения $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(2 + 2x) = -4$.
32. Найдите корень уравнения $\log_7(5 - 3x) = 3 \log_7 2$.
33. Найдите корень уравнения $\log_{\sqrt{5}}(2x + 15) = 4 \log_{\sqrt{5}} 2$.
34. Найдите корень уравнения $\log_3(2x + 1) = \log_3(3 - x) + 1$.
35. Найдите корень уравнения $\log_5(15x + 25) = \log_5(x - 25) + 2$.
36. Найдите корень уравнения $\log_{\sqrt{2}}(3x + 1) = \log_{\sqrt{2}}(2x - 12) + 2$.
37. Найдите корень уравнения $\log_{\sqrt[3]{3}}(22x - 15) = \log_{\sqrt[3]{3}}(2x + 11) + 6$.
38. Найдите корень уравнения $\log_{x-3} 4 = 2$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите наименьший из них.
39. Найдите корень уравнения $\log_{5-2x} 9 = 2$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите наибольший из них.
40. Найдите корень уравнения $\log_{3x+3} 27 = 3$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите наибольший из них.
41. Найдите наименьший корень уравнения $\frac{x^2 - 1}{\log_2 x} = \frac{7x - 7}{\log_2 x}$.
42. Найдите корень уравнения $\log_{11}(16 + x) = \log_{11} 12$.
43. а) Решите уравнение $\log_3(x^2 - 24x) = 4$.
б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие промежутку $[\log_2(0,1); 12\sqrt{5}]$.
- (ЕГЭ 2017, резервный день)
44. а) Решите уравнение $8^x - 9 \cdot 2^{x+1} + 2^{5-x} = 0$.
б) Найдите все его корни, принадлежащие промежутку $[\log_5 2; \log_5 20]$.
- (ЕГЭ 2017, досрочная волна)

45. а) Решите уравнение $\log_5(2 - x) = \log_{25} x^4$.

б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку $\left[\log_9 \frac{1}{82}; \log_9 8\right]$.

(ЕГЭ 2014, вторая волна, резервный день)

46. Решите неравенство $\log_2 x^2 \geq 1$.

47. Решите неравенство $\log_2 x^2 \geq 1 + \log_2 x$.

48. Решите неравенство $\log_5^3 x + \log_5 x \geq 0$.

Задачи: Блок 3

49. Найдите корень уравнения $\log_{0,5}(x+5) = \log_2 0,2$.
50. Найдите корень уравнения $\log_2(8-x) = 2 \log_2(4+x)$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.
51. Найдите корень уравнения $\log_9 3^{2x+9} = 2$.
52. Найдите корень уравнения $\log_5(x+7) = \log_5(5-x) - 1$.
53. Найдите значение выражения $\frac{\log_9 32}{\log_{27} 0,5}$.
54. Найдите значение выражения $3^{2+\log_3 7}$.
55. Найдите значение выражения $\frac{2^{\log_6 2}}{2^{\log_6 432}}$.
56. Найдите $\log_a(a^4 b^3)$, если $\log_a b = 4$.
57. Найдите значение выражения $\frac{\log_7 2}{\log_7 5} - \log_5 10$.
58. а) Решите уравнение $(x^2 + 2x + 1)(\log_2(x^2 - 3) + \log_{0,5}(\sqrt{3} - x)) = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2, 5; -1, 5]$
59. а) Решите уравнение $(x^2 + 4x + 2)(4^{3x+1} + 8^{2x-1} - 11) = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-0, 5; 0, 5]$.
60. а) Решите уравнение $16 \log_9^2 x + 4 \log_{\frac{1}{3}} x - 3 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[0, 5; 5]$.

Ответы

Задачи: Блок 1

1. -2
2. 625
3. 2
4. 1,5
5. 6
6. 0
7. 1
8. -1
9. 12,5
10. 890
11. 3
12. 2
13. 7,25
14. 0,85
15. -6
16. 2,5

Задачи: Блок 2

17. 27
18. 4,5
19. 26
20. 11
21. 63
22. 8
23. 1
24. -4
25. 6
26. 2,75
27. 0
28. 0
29. -14,8
30. 0,25
31. 1
32. -1
33. 0,5
34. 1,6
35. 65
36. 25
37. 28,5
38. 5
39. 1
40. 0
41. 6

42. -4

43. а) -3; 27

б) -3

44. а) 0,5; 2

б) 0,5

45. а) -2; 1

б) -2

46. $(-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty)$

47. $[2; +\infty)$

48. $[1; +\infty)$

Задачи: Блок 3

49. 0

50. -1

51. -2, 5

52. -5

53. -7, 5

54. 63

55. $\frac{1}{8}$

56. 16

57. -1

58. а) -1; $-1 - \sqrt{3}$

б) -1

59. а) $-2 - \sqrt{2}; \sqrt{2} - 2; \log_{64} \frac{8}{3}$

б) $\sqrt{2} - 2; \log_{64} \frac{8}{3}$

60. а) $\frac{1}{\sqrt{3}}; 3\sqrt{3}$

б) $\frac{1}{\sqrt{3}}$