Информатика. Теория игр. Прогаем нестандартных тигров на убывание, ограничение ходов, условие проигрыша и т.д. + УНИВЕРСАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ-УБИЙЦА ПОЗИЦИОННЫХ ИГР.

Произведение камней

Задача 1

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в одну из куч один камень или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, пусть в одной куче будет 9 камней, а в другой 10 камней; такую позицию мы будем обозначать (9, 10). За один ход из позиции (9, 10) можно получить любую из четырёх позиций: (10, 10), (9, 11), (18, 10), (9, 20). Игра завершается в тот момент, когда произведение количества камней в кучах становится не менее 128.

Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший позицию, в которой в кучах будет 128 или более камней. В начальный момент в первой куче было 3 камня, а во второй куче S камней $1 \leq S \leq 124$.

Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока — значит описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника. В описание выигрышной стратегии не следует включать ходы играющего по этой стратегии игрока, не являющиеся для него безусловно выигрышными, т. е. не являющиеся выигрышными независимо от игры противника.

Найдите минимальное значение S, при котором Ваня выигрывает своим первым ходом при любой игре Пети.

Ответ. 21

Задача 2

Для игры, описанной в предыдущем задании, найдите все такие значения S, при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём Петя не может выиграть за один ход и Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

В ответе запишите числа в порядке возрастания без пробелов и знаков препинания.

Ответ. 101520

Решение.

Задача 3

Для игры, описанной в задании 1, найдите два таких значения S, при которых одновременно выполняются два условия:

– у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;

– у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

В ответе запишите числа в порядке возрастания без пробелов и знаков препинания.

Ответ. 1419

Решение.

```
from functools import lru_cache

def moves(heap):
    a, b = heap
    return (a + 1, b), (a, b + 1), (a * 2, b), (a, b * 2)

@lru_cache(None)
def game(heap):
    a, b = heap
    if a * b >= 128:
        return 'END'
    elif any(game(x) == 'END' for x in moves(heap)):
        return 'P1'
    elif all(game(x) == 'P1' for x in moves(heap)):
```

```
        return 'V1'
    elif any(game(x) == 'V1' for x in moves(heap)):
        return 'P2'
    elif all(game(x) == 'P1' or game(x) == 'P2' for x in moves(heap)):
        return 'V2'

for s in range(1, 125):
    print(s, game((3, s)))
```

Та самая задача папиного друга, которая может завалить вам 19-21. А все потому что надо внимательно читать условие. Т.к. в Python нет встроенной функции поэлементного перемножения, идея сводится к тому, чтобы распаковать кортеж $heap$ *в переменные* a *и* b*, и посчитать произведение* $a \cdot b$*.*

Задача 4

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в одну из куч один камень или увеличить количество камней в куче в четыре раза. Например, пусть в одной куче будет 9 камней, а в другой 10 камней; такую позицию мы будем обозначать (9, 10). За один ход из позиции (9, 10) можно получить любую из четырёх позиций: (10, 10), (9, 11), (36, 10), (9, 40). Игра завершается в тот момент, когда произведение количества камней в кучах становится не менее 1056.

Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший позицию, в которой в кучах будет 1056 или более камней. В начальный момент в первой куче было 8 камней, а во второй куче S камней $1 \leq S \leq 131$.

Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока — значит описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника. В описание выигрышной стратегии не следует включать ходы играющего по этой стратегии игрока, не являющиеся для него безусловно выигрышными, т. е. не являющиеся выигрышными независимо от игры противника.

Найдите минимальное значение S, при котором Ваня выигрывает своим первым ходом при любой игре Пети.

Ответ. 32

Задача 5

Для игры, описанной в предыдущем задании, найдите три таких значения S, при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём Петя не может выиграть за один ход и Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

В ответе запишите числа в порядке возрастания без пробелов и знаков препинания.

Ответ. 82931

Задача 6

Для игры, описанной в задании 4, найдите два таких значения S, при которых одновременно выполняются два условия:

– у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;

– у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

В ответе запишите числа в порядке возрастания без пробелов и знаков препинания.

Ответ. 2830

```
from functools import lru_cache

def moves(heap):
    a, b = heap
    return (a * 4, b), (a, b * 4), (a + 1, b), (a, b + 1)

@lru_cache(None)
def game(heap):
    a, b = heap
    if a * b >= 1056:
        return 'END'
    elif any(game(x) == 'END' for x in moves(heap)):
        return 'P1'
    elif all(game(x) == 'P1' for x in moves(heap)):
        return 'V1'
    elif any(game(x) == 'V1' for x in moves(heap)):
        return 'P2'
    elif all(game(x) == 'P1' or game(x) == 'P2' for x in moves(heap)):
        return 'V2'

for s in range(132, 0, -1):
    print(s, game((8, s)))
```

Тут стоит обратить внимание на несколько тонких моментов. 99.9% людей получат переполнение рекурсии на этой задаче. Как этого избежать? Есть два основных варианта. Первый: перебирайте числа в обратном порядке. Это не решит целиком проблему, но так вы хотя бы сможете посчитать большую часть позиций. Второй: ПОМЕНЯТЬ МЕСТАМИ ХОДЫ. Да, да, это разные вещи. Если

*сначала будет +1 а потом *4, то рекурсия упадет, но если мы сделаем *4 а потом +1 то все будет круто. Смысл в том, что когда all/any находят неподходящее значение, они не будут смотреть остальные значения. Шанс получить неподходящее значение с операцией *4 больше чем шанс получить неподходящее значение +1, потому что ход *4 агрессивней.*

Убывание камней

Задача 7

Два игрока, Пинки и Вжик, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Пинки. За один ход игрок может убрать из одной из куч один камень или уменьшить количество камней в куче в два раза (если количество камней в куче нечётно, остаётся на 1 камень меньше, чем убирается). При любом из ходов кол-во камней в одной из куч должно измениться. Например, пусть в одной куче будет 6 камней, а в другой 9 камней; такую позицию мы будем обозначать (6, 9). За один ход из позиции (6, 9) можно получить любую из четырёх позиций: (5, 9), (6, 8), (3, 9), (6, 4). Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не более 34.

Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший позицию, в которой в кучах будет 34 или менее камней. В начальный момент в первой куче было 22 камня, во второй куче S камней, $S > 12$

Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока — значит описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника. В описание выигрышной стратегии не следует включать ходы играющего по этой стратегии игрока, не являющиеся для него безусловно выигрышными, т. е. не являющиеся выигрышными независимо от игры противника.

Найдите минимальное значение S, при котором Вжик выигрывает своим первым ходом при любой игре Пинки.

Ответ. 26

Задача 8

Для игры, описанной в предыдущем задании, найдите два таких максимальных значения S, при которых у Пинки есть выигрышная стратегия, причём Пинки не может выиграть за один ход и Пинки может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Вжик.

В ответе запишите числа в порядке возрастания без пробелов и знаков препинаний.

Ответ. 5253

Задача 9

Для игры, описанной в задании 7, найдите такое значение S, при котором одно-

временно выполняются два условия:

– у Вжика есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пинки;

– у Вжика нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

Ответ. 29

Решение.

```
from functools import lru_cache

def moves(heap):
    a, b = heap
    m = []
    if a > 0:
        m += [(a - 1, b), (a // 2, b)]
    if b > 0:
        m += [(a, b - 1), (a, b // 2)]
    return m

@lru_cache(None)
def game(heap):
    if sum(heap) <= 34:
        return 'END'
    elif any(game(x) == 'END' for x in moves(heap)):
        return 'P1'
    elif all(game(x) == 'P1' for x in moves(heap)):
        return 'V1'
    elif any(game(x) == 'V1' for x in moves(heap)):
        return 'P2'
    elif all(game(x) == 'P1' or game(x) == 'P2' for x in moves(heap)):
        return 'V2'

for s in range(12, 100):
    print(s, game((22, s)))
```

Задача 10

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат три кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может убрать из одной из куч один камень или уменьшить количество камней в куче в два раза (если количество камней в куче нечётно, остаётся на 1 камень больше, чем убирается). При любом из ходов кол-во камней в одной из куч должно измениться. Например, пусть в первой куче будет 6 камней, во второй куче 7 камней, а в третьей 8 камней; такую позицию мы будем обозначать (6, 7, 8). За один ход из позиции (6, 7, 8) можно получить любую из четырёх позиций: (5, 7, 8), (6, 6, 8), (6, 7, 7), (3, 7, 8), (6, 4, 8), (6, 7, 4). Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не более 32.

Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший позицию, в которой в кучах будет 32 или менее камней. В начальный момент в первой и второй куче было 11 камней, в третьей куче S камней, $S > 11$.

Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока — значит описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника. В описание выигрышной стратегии не следует включать ходы играющего по этой стратегии игрока, не являющиеся для него безусловно выигрышными, т. е. не являющиеся выигрышными независимо от игры противника.

Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после неудачного первого хода Пети. Укажите максимальное значение S, когда такая ситуация возможна.

Ответ. 40

Задача 11

Для игры, описанной в предыдущем задании, найдите количество таких значений S, при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём Петя не может выиграть за один ход и Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Ответ. 5

Задача 12

Для игры, описанной в задании 10, найдите такое значение S, при котором одновременно выполняются два условия:

– у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или

вторым ходом при любой игре Пети;

– у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

Ответ. 24

Решение.

```
from functools import lru_cache

def moves(heap):
    a, b, c = heap
    m = []
    if a > 1:
        m += [(a - 1, b, c), ((a + 1) // 2, b, c)]
    if b > 1:
        m += [(a, b - 1, c), (a, (b + 1) // 2, c)]
    if c > 1:
        m += [(a, b, c - 1), (a, b, (c + 1) // 2)]
    return m

@lru_cache(None)
def game(heap):
    if sum(heap) <= 32:
        return 'END'
    elif any(game(x) == 'END' for x in moves(heap)):
        return 'P1'
    elif any(game(x) == 'P1' for x in moves(heap)):
        return 'V1'
    elif any(game(x) == 'V1' for x in moves(heap)):
        return 'P2'
    elif all(game(x) == 'P1' or game(x) == 'P2' for x in moves(heap)):
        return 'V2'

for s in range(12, 100):
    print(s, game((11, 11, s)))
```

Признавайтесь, попались в еще одну краболовку. Опять превышена глубина рекурсии, хмм, но что же в этот раз, даже если поменять ходы местами ничего не поменяется. Рассказываю, есть такая штука как петля, когда вы из одной позиции попадаете в ту же самую позицию. Замкнутый круг, бесконечный цикл, закрытый клуб. В данном случае, если у нас кол-во камней в куче 1, то при операции (1 + 1) // 2 или (1 // 2) + (1 % 2) мы получим 1. И так бесконечно много раз, гуляете по кругу вокруг 1 и ничего не можете сделать, круто да, поэтому просто ставим условие > 1 и кайфуем.

Ограничение по ходам

Задача 13

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один или три камня или увеличить количество камней в куче в 3 раза, при этом после каждого хода в куче должно быть нечетное количество камней. Например, пусть в куче будет 6 камней. Тогда за один ход можно получить кучу из 7 или 9. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 51.

Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший позицию, в которой в куче будет 51 или более камней. В начальный момент в куче было S камней; $1 \leq S \leq 50$.

Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока — значит описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника. В описание выигрышной стратегии не следует включать ходы играющего по этой стратегии игрока, не являющиеся для него безусловно выигрышными, т. е. не являющиеся выигрышными независимо от игры противника.

Найдите минимальное значение S, при котором Ваня выигрывает своим первым ходом при любой игре Пети.

Ответ. 7

Задача 14

Для игры, описанной в предыдущем задании, найдите два таких максимальных значения S, при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём Петя не может выиграть за один ход и Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Ответ. 1214

Задача 15

Для игры, описанной в задании 13, найдите количество значений S, при которых одновременно выполняются два условия:

– у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;

– у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

Ответ. 2

Решение.

```
from functools import lru_cache

def moves(heap):
    m = []
    if (heap * 3) % 2 != 0:
        m += [heap * 3]
    if (heap + 1) % 2 != 0:
        m += [heap + 1]
    if (heap + 3) % 2 != 0:
        m += [heap + 3]
    return m

@lru_cache(None)
def game(heap):
    if heap >= 51:
        return 'END'
    elif any(game(x) == 'END' for x in moves(heap)):
        return 'P1'
    elif all(game(x) == 'P1' for x in moves(heap)):
        return 'V1'
    elif any(game(x) == 'V1' for x in moves(heap)):
        return 'P2'
    elif all(game(x) == 'P1' or game(x) == 'P2' for x in moves(heap)):
        return 'V2'

for s in range(1, 51):
    print(s, game(s))
```

Идея такая же как и на убывание камней, создаем массив m в который будем добавлять ходы только тогда, когда они ведут в нечетную позицию, и все.

Задача 16

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может убрать из кучи половину камней, если количество камней в куче делится на два, иначе убрать из кучи два камня или убрать из кучи две трети камней, если количество камней в куче делится на три, иначе убрать из кучи три камня. Например, пусть в куче будет 6 камней. Тогда за один ход можно получить кучу из 3 или 2 камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится равным 1.

Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший позицию, в которой в куче будет 1 камнень. В начальный момент в куче было S камней; $1 \leq S \leq 37$.

Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока — значит описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника. В описание выигрышной стратегии не следует включать ходы играющего по этой стратегии игрока, не являющиеся для него безусловно выигрышными, т. е. не являющиеся выигрышными независимо от игры противника.

Найдите максимальное значение S, при котором Ваня может выиграть своим первым ходом после неудачного хода Пети, который мог выиграть своим первым ходом.

Ответ. 4

Задача 17

Для игры, описанной в предыдущем задании, найдите минимальное и максимальное значения S, при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём Петя не может выиграть за один ход и Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

В ответе запишите числа в порядке возрастания без пробелов и знаков препинаний.

Ответ. 718

Задача 18

Для игры, описанной в задании 16, найдите минимальное значение S, при котором одновременно выполняются два условия:

– у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;

– у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

Ответ. 9

Решение.

```
from functools import lru_cache
def moves(heap):
    m = []
    if heap % 2 == 0:
        m += [heap // 2]
    else:
        if heap > 1:
            m += [heap - 2]
    if heap % 3 == 0:
        m += [heap // 3]
    else:
        if heap > 2:
            m += [heap - 3]
    return m
@lru_cache(None)
def game(heap):
    if heap == 1:
        return 'END'
    elif any(game(x) == 'END' for x in moves(heap)):
        return 'P1'
    elif all(game(x) == 'P1' for x in moves(heap)):
        return 'V1'
    elif any(game(x) == 'V1' for x in moves(heap)):
        return 'P2'
    elif all(game(x) == 'P1' or game(x) == 'P2' for x in moves(heap)):
        return 'V2'

for s in range(1, 38):
    print(s, game(s))
```

Тоже самое, что и в прошлой задаче. Вообще в задачах на ограничение ходов меняется только функция $moves()$*, функцию* $game()$ *мы не трогаем.*

Условие проигрыша

Задача 19

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу два камня или увеличить количество камней в куче в три раза. Например, имея кучу из 17 камней, за один ход можно получить кучу из 19 или 51 камней. Чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 45. Если при этом в куче оказалось не более 112 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник.

В начальный момент в куче было S камней, $1 \leq S \leq 44$.

Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока — значит описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника. В описание выигрышной стратегии не следует включать ходы играющего по этой стратегии игрока, не являющиеся для него безусловно выигрышными, т. е. не являющиеся выигрышными независимо от игры противника.

Найдите максимальное значение S, при котором Ваня выигрывает своим первым ходом при любой игре Пети.

Ответ. 42

Задача 20

Для игры, описанной в предыдущем задании, найдите все такие значения S, при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём Петя не может выиграть за один ход и Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

В ответе запишите числа в порядке возрастания без пробелов и знаков препинания.

Ответ. 143940

Задача 21

Для игры, описанной в задании 19, найдите такое максимальное значение S, при котором одновременно выполняются два условия:

– у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или

вторым ходом при любой игре Пети;

– у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

Если такого значения нет, в ответ запишите 0.

Ответ. 38

Решение.

```
from functools import lru_cache

def moves(heap):
    return heap + 2, heap * 3

@lru_cache(None)
def game(heap):
    if 45 <= heap <= 112:
        return 'END'
    elif heap > 112:
        return 'P1'
    elif any(game(x) == 'END' for x in moves(heap)):
        return 'P1'
    elif all(game(x) == 'P1' for x in moves(heap)):
        return 'V1'
    elif any(game(x) == 'V1' for x in moves(heap)):
        return 'P2'
    elif all(game(x) == 'P1' or game(x) == 'P2' for x in moves(heap)):
        return 'V2'

for s in range(1, 45):
    print(s, game(s))
```

Задача 22

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может:

а) добавить в кучу один камень

б) добавить в кучу два камня

в) добавить в кучу три камня

г) увеличить количество камней в куче в три раза

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 50. Если при этом в куче оказалось не более 100 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник.

В начальный момент в куче было S камней, $1 \leq S \leq 49$.

Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока — значит описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника. В описание выигрышной стратегии не следует включать ходы играющего по этой стратегии игрока, не являющиеся для него безусловно выигрышными, т. е. не являющиеся выигрышными независимо от игры противника.

Известно, что Петя выигрывает в первый ход. Укажите все такие значения и соответствующие ходы Пети. Например, если Петя выигрывает при $S = 23, 24, 25, \ldots, 33$ путем добавления единицы, в ответ нужно записать $([23; 33]; +1)$.

Ответ. ([17; 33]; *3), (47; +3), (48; +2, +3), (49; +1, +2, +3)

Задача 23

У кого из игроков есть выигрышная стратегия при $S = 13$?

Ответ. (13; П)

Задача 24

У кого из игроков есть выигрышная стратегия при $S = 45$?

Ответ. (45; П)

Решение.

```
from functools import lru_cache

def moves(heap):
```

```
    return heap + 1, heap + 2, heap + 3, heap * 3

@lru_cache(None)
def game(heap):
    if 50 <= heap <= 100:
        return 'END'
    elif heap > 100:
        return 'P1'
    elif any(game(x) == 'END' for x in moves(heap)):
        return 'P1'
    elif all(game(x) == 'P1' for x in moves(heap)):
        return 'V1'
    elif any(game(x) == 'V1' for x in moves(heap)):
        return 'P2'
    elif all(game(x) == 'P1' or game(x) == 'P2' for x in moves(heap)):
        return 'V2'

for s in range(1, 50):
    print(s, game(s))
```

Такая же идея, как и в прошлой задаче. Обозначаем условие «победителем становится его противник» как $elif\ heap > 100: return\ 'P1'$ *и кайфуем.*

Гробы (нет)

Задача 25

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит лист бумаги, на котором написано двоичное число. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может приписать справа или слева к имеющемуся на листе числу двоичную запись любого из чисел вида $4^n + 3$, где n — произвольное натуральное число, либо приписать справа или слева от имеющегося на листе числа его копию. Например, имея двоичное число 11001, за один ход можно получить путём копирования число 1100111001 или путём приписывания двоичной записи числа 7 числа 11001111 или 11111001.

Игра завершается в тот момент, когда количество единиц в двоичной записи числа на листе станет больше или равно 60. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т. е. первым получивший двоичное число, в записи которого использовано 60 или более единиц.

В начальный момент единиц в числе было $S (1 \leq S \leq 57)$.

Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника.

Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после неудачного первого хода Пети. Укажите минимальное значение S, когда такая ситуация возможна.

Ответ. 15

Задача 26

Для игры, описанной в предыдущем задании, найдите такие значения S, при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

– Петя не может выиграть за один ход;

– Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Из всех найденных значений запишите в ответе минимальное и максимальное в порядке возрастания.

Ответ. 1426

Задача 27

Для игры, описанной в задании 25, найдите минимальное значение S, при котором одновременно выполняются два условия:

– у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;

– у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

Ответ. 21

Решение.

```
from functools import lru_cache

def moves(heap):
    return heap + 3, heap * 2

@lru_cache(None)
def game(heap):
    if heap >= 60:
        return 'END'
    elif any(game(x) == 'END' for x in moves(heap)):
        return 'P1'
    elif all(game(x) == 'P1' for x in moves(heap)):
        return 'V1'
    elif any(game(x) == 'V1' for x in moves(heap)):
        return 'P2'
    elif all(game(x) == 'P1' or game(x) == 'P2' for x in moves(heap)):
        return 'V2'

for s in range(1, 58):
    print(s, game(s))
```

Легчайшая задача. Заметим, что $4^n + 3 = 2^{2n} + 3$. *Такие числа в двоичной системе выглядят следующим образом: при* $n = 1$ *число будет* $100 + 11$, *при* $n = 2$ *число будет* $10000 + 11$, *при* $n = 3$ *число будет* $1000000 + 11$. *Уловили суть? Неважно какой будет* n, *число такого вида всегда будет прибавлять ровно* 3 *еди-*

нички. А что делать со второй операцией? Она просто увеличивает количество единичек в два раза, например было число 110 *стало* 110110*, количество единичек увеличилось в два раза. Получается задача развалилась, у нас всего две команды* $+3$ *и* $*2$*.*

Задача 28

Два игрока, Петя и Ваня по очереди стирают буквы из слова или фразы. Первым ходит Петя. За один ход разрешается стереть или ровно одну букву, или все одинаковые буквы. Выигрывает тот, кто сотрёт последнюю букву.

Укажите количество слов из списка ниже, начиная с которых выигрывает Петя.

КУ РАК АРА КУКУ ЛООМ ОКОРОК КАРАТ МЕМО КЕТЕКЕ НАНАЦА ПРОРОК МОЛОКО РАПИРА АНКАРА АРАРАТ

Ответ. 9

Задача 29

Укажите все слова из представленных, начиная с которых Ваня не может гарантированно выиграть своим первым ходом, но может выиграть либо своим первым или вторым ходом, в зависимости от хода Пети.

Ответ. КУКУ

Задача 30

Дана фраза: ТЕХНИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА. Кто выиграет в этой игре?

Ответ. Ваня

Решение.

```
from functools import lru_cache

def moves(s):
    m = []
    for c in set(s):
        m += [s.replace(c, '', 1), s.replace(c, '')]
    return m

@lru_cache(None)
def game(s):
    if s == '':
        return 'END'
    elif any(game(x) == 'END' for x in moves(s)):
        return 'P1'
    elif all(game(x) == 'P1' for x in moves(s)):
```

```
        return 'V1'
    elif any(game(x) == 'V1' for x in moves(s)):
        return 'P2'
    elif all(game(x) == 'P1' or game(x) == 'P2' for x in moves(s)):
        return 'V2'
    elif any(game(x) == 'V2' for x in moves(s)):
        return 'P3'
    elif all(game(x) == 'P1' or game(x) == 'P2' or
             game(x) == 'P3' for x in moves(s)):
        return 'V3'

s = ['КУ', 'РАК', 'АРА', 'КУКУ', 'ЛООООМ', 'ОКОРОК', 'КАРАТ', 'МЕМО',
     'КЕТЕКЕ', 'НАНАЦА', 'ПРОРОК', 'МОЛОКО', 'РАПИРА', 'АНКАРА', 'АРАРАТ']

for word in s:
    print(word, game(word))

@lru_cache(None)
def game1(s):
    if s == '':
        return 0
    steps = [game1(x) for x in moves(s)]
    if any(x % 2 == 0 for x in steps):
        return min(x for x in steps if x % 2 == 0) + 1
    return max(steps) + 1

print('ТЕХНИЧЕСКАЯКИБЕРНЕТИКА', game1('ТЕХНИЧЕСКАЯКИБЕРНЕТИКА'))
```