Информатика, Марафон. Теория игр.

Теория игр - раздел математики, в котором рассматриваются различные концепции игр, где изучаются виды стратегий, зависящие от каждого хода.

Основная идея заключается в том, что любая нынешняя позиция игры зависит от предыдущей, то есть задается динамически. Все три задания взаимосвязаны между собой. Если рассмотреть игру с камешками, то можно разделить идею на три этапа:

- Так, в №19, как правило, делается оценка сверху таким образом, чтобы было ясно с какого и по какое значение можно выиграть в один ход.
- Следовательно, в №20 будут использоваться значения, меньшие чем минимальное значение оценки в №19.
- В задании №21 выгодно, при возможности, получить стратегию, которая приходила бы в одну из победных в №20, что значительно может сократить рассчет всевозможных позиций.

Каждое из заданий удобно фиксировать в виде дерева вариантов. В ЕГЭ предлагается несколько типов игр, которые будут рассмотрены ниже.

Перед их решением стоит понимать, что существует ряд типичных ошибок. Так, к примеру, в задании, где требуется найти минимальное значение S экзаменуемый может допустить ошибку и найти просто подходящее под условия число S (не обосновав, что меньших не существует). Или же некоторые условия задач могут поставить в тупик, из-за отсутствия, на первый взгляд, требуемого числа в задачах с двумя кучами, ведь некоторые задачи требует перебора, но разумного - при решении 20го и 21го задания у вас уже будет лежать ограничение на довольно большой промежуток всевозможных чисел S.

Игра в камешки — одна куча

№19 Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один или четыре камня, либо увеличить количество камней в куче в пять раз. Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 16, 19 или 75 камней.

Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т. е. первым получивший кучу, в которой будет 68 или больше камней. В начальный момент в куче было S камней: $1 \leqslant S \leqslant 67$.

Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после неудачного первого хода Пети. Укажите минимальное значение S, когда такая ситуация возможна.

№20

Найдите два таких значения S, при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

— Петя не может выиграть за один ход;

— Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания без разделительных знаков.

№21

Найдите минимальное значение S, при котором одновременно выполняются два условия:

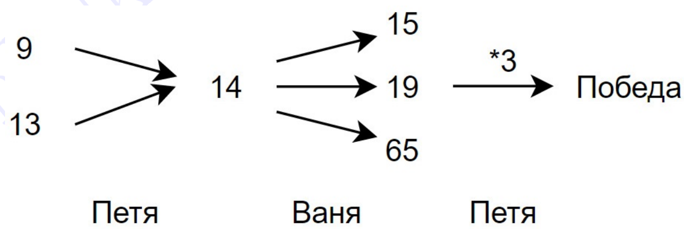
— у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;

— у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

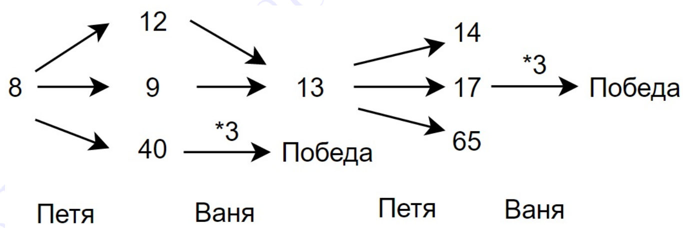
Решение с рассуждениями:

№19. Поскольку ход с максимальным увеличением это *5, то требуется понять, какое минимальное число превзойдет 67. Это число - 14. Однако в это число еще требуется попасть, но это можно сделать только из 13 или 10, что не очень выгодно. Но можно заметить, что число 15 кратно 5, соответственно в него можно попасть из 3, что уже будет являться минимальным значением (если посмотреть варианты из 2, то по итогу даже используя "максимальный"ход попасть в позицию > 67 не выйдет). То есть, минимальное значение S это 3.

№20. Поскольку Ваня не может выиграть, а Петя должен, но лишь вторым ходом, то можно попробовать действовать таким образом. Мы определили, что при $S < 15$ в выигрышную позицию за один ход попасть невозможно. Тогда, почему бы не предложить такие значения S, чтобы после хода Вани S было больше или равнялось 15. Это можно сделать только тогда, когда позиция Вани будет $S = 14$. Соответственно, исходя из этого предложим два значения S и зафиксируем это деревом ниже:



№21. Рассуждаем схожим способом: нам заведомо известно, что при $S = 9$ выиграет Петя. А что будет, если $S = 8$? Стоит рассмотреть, возможно ли выиграть Ване в таком случае:



Но почему не подойдут значения, меньшие 8? Потому что самое минимальное значение, после первого хода Пети будет как раз 9. Однако тогда если Ваня умножит 9 на 3 - тогда выиграет Петя. Если Ваня прибавит 4 камня, то Петя из позиции 13 может поставить позицию 14 Ване, откуда также невозможно выиграть в один ход.

Таким образом, ответ — 8.

Игра в камешки — две кучи

№19

Два Игрока, Петя и Ваня играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в одну из куч один камень или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, пусть в одной куче 10 камней, а в другой 5 камней; такую позицию в игре будем обозначать (10,5). Тогда за один ход можно получить одну из четырех позиций: (11,5), (20,5), (10,6), (10,10).

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 77. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т. е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 77 или больше камней.

В начальный момент в первой куче было семь камней, во второй куче — S камней; $1 \leqslant S \leqslant 69$.

Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после неудачного первого хода Пети. Укажите минимальное значение S, когда такая ситуация возможна.

№20

Найдите два таких значения S, при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

— Петя не может выиграть за один ход;

— Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания без разделительных знаков.

№21

Найдите минимальное значение S, при котором одновременно выполняются два условия:

— у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;

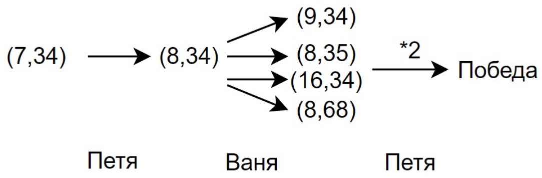
— у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

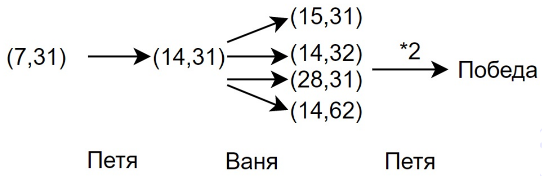
Решение с рассуждениями:

№19. Поскольку игра должна закончиться в 2 хода, то заметим, что минимальное значение количества камней в обеих кучах, при котором игра заканчивается — 77. Эта ситуация возможна, например, когда в первой куче 7 камней, а во второй — 70. Значит, чтобы Ваня мог выиграть своим первым ходом, количество камней во второй куче должно быть больше или равно 35. Но минимальным числом умножением на 2, мы можем добиться только 36 и более камней. Это возможно при значении S = 18.

№20. Из предыдущего стало понятно, что S не может быть равно 35 и 36. Рассмотрим значение S = 34.

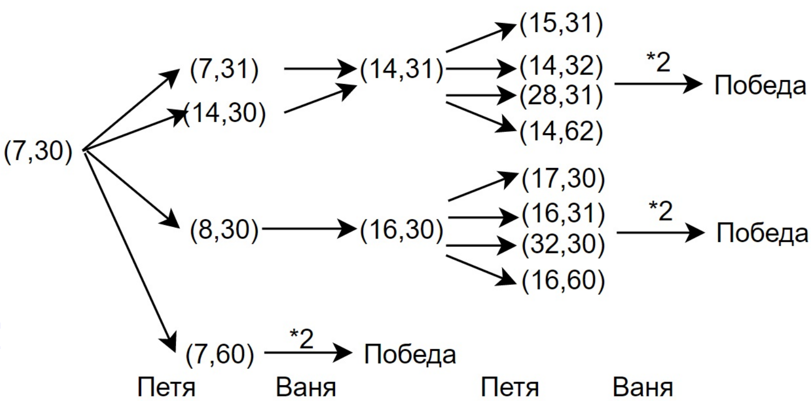
Перебором вниз (или просто попытавшись увеличить число 7 в два раза и прикинуть, какое число может подойти) рассмотрим еще и значение S = 31:





Таким образом, ответ — 3134.

№21. Попробуем S = 30, чтобы одна из рассматриваемых ситуаций пришла в вышеописанную:



Остается рассмотреть, что позиций с меньшим значением для этого задания быть не может. На самом деле все довольно просто - путем проверки и понимания того, что число S меньшее 30 будет увеличиваться медленнее — можно заключить, что 30 это минимальное подходящее число.

Игра "буквы"

Петя и Ваня играют в игру: есть набор слов, необходимо последовательно называть буквы этих слов. Побеждает тот игрок, который называет последнюю букву любого слова из набора. Петя ходит первым.

Например, есть набор слов Волк, Информатика, Страшно; для заданного набора слов Петя своим первым ходом может назвать букву В, И или С. Если Петя выберет букву В, то победит Ваня (следующие ходы: Петя - В, Ваня - О, Петя - Л, Ваня - К).

№19

Напишите, за какое минимальное количество ходов один из ребят сможет выиграть:

А) Даны 2 слова (набора букв) (ИКЛМНИКЛМНХ, НМЛКИНМЛКИ).

Б) Даны 2 слова (ТРИТРИТРИ...ТРИ, РИТАРИТАРИТАРИТА...РИТА). В первом слове 99 букв, во втором 164. Определить выигрышную стратегию.

№20

Необходимо поменять две буквы местами из набора пункта 1А в слове с наименьшей длинной так, чтобы выигрышная стратегия была у другого игрока. Объяснить выигрышную стратегию.

№21

Дан набор слов (Ворона, Волк, Волна, Производная, Прохор, Просо). У кого из игроков есть выигрышная стратегия? Обосновать ответ и написать дерево всех возможных партий для выигрышной стратегии.

Решение с рассуждениями:

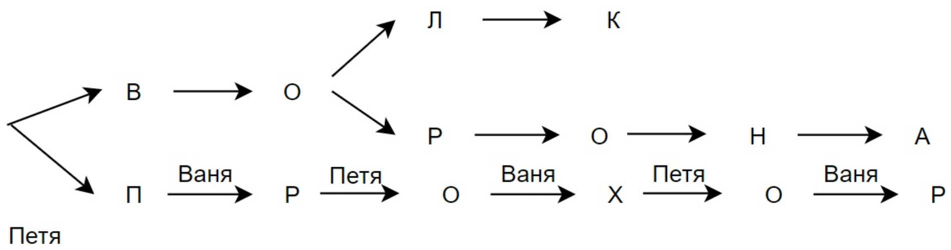
№19. А) Чтобы выиграть Пете, нужно выбрать первую букву слова с нечетным количеством букв, чтобы он сделал последний ход. При исходном наборе слов выигрышная стратегия есть у Пети. Она заключается в том, что своим первым ходом он должен выбрать букву И (слово ИКЛМНИКЛМНХ из 11 букв). Следовательно, в конце концов Петя назовет последнюю букву этого слова и выиграет.

Б) У Пети вновь есть возможность выиграть, для этого ему требуется выбрать слово с нечетным количеством букв, т.к. при такой стратегии последнюю букву в любом случае записывает Петя. Получается, Петя должен выбрать слово с 99 буквами.

№20. Если поменять местами во втором слове (НМЛКИНМЛКИ) буквы Н и И, то получится следующий набор слов: (ИКЛМНИКЛМНХ, ИМЛКННМЛКИ)

Для данного набора выигрышная стратегия есть у Вани. Петя в любом случае должен будет выбрать букву И, а Ваня следующим ходом может перевести игру в проигрышную позицию для Пети, т.е. перейти на второе слово, назвав букву М.

№21. Выигрышная стратегия есть у Вани, так как при любом выборе Пети, Ваня может перевести игру в проигрышную позицию для Пети, т.е. "перейти"на слово с четным количеством букв. Такая стратегия позволит Ване написать последнюю букву и тем самым выиграть игру:



Другие игры

№1

Двое по очереди ломают шоколадку 5х8. За ход можно разломать любой кусок по прямой линии между дольками. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Решение:

Долек всегда будет $5 * 8 = 40$ штук, а шоколадка в начале была одна. Заметим, что на каждом ходу один кусок шоколадки всегда разламывается на 2, т.е. количество различных кусков шоколадки увеличивается на 1. В начале это кол-во было равно 1, а в конце, как мы заметили, 40. Значит, игра продолжалась ровно 39 ходов. Поэтому последний (39-й) ход был обязательно ходом первого (его ходы - первый, третий и все с нечетными номерами) — и первый выиграл. Можем сделать вывод, что первый всегда выигрывает.

№2

На столе лежат 25 спичек. Играют двое. Играющие по очереди могут взять от одной до четырех спичек. Выигрывает тот, кто берет последние(юю) спички(у). Для какого игрока существует выигрышная стратегия?

Решение:

Победит тот игрок, которому достанутся последние 1-4 спички. Будем считать эти позиции выигрышными. Если же игроку достается 5 спичек, то любым своим ходом он обеспечивает победу сопернику, считаем такую позицию проигрышной. Выигрышная стратегия существует для второго игрока. Для этого он должен дополнять ход первого до 5 спичек (если первый взял одну, второй берет четыре и т.п.). Тогда после первого хода второго игрока останется 20 спичек, затем 15,10,5 и 0 – первый проиграл.